טורי חזקות, פיתוח טיילור ומשפט היחידות

תזכורת:

<u>טור חזקות:</u>

טור מהצורה - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots$ נקרא טור חזקות סביב הנק' $z=\alpha$.

<u>תחום ההתכנסות של טור חזקות:</u>

עבור טור חזקות - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ תחום ההתכנסות D הוא:

1. $D=\mathbb{C}$ (כל המישור)
2. $D=\{\alpha\}$ - הנק' $z=\alpha$ בלבד.
3. קיים $R>0$ כך ש- $\{z \,|\, |z-\alpha|<R\} \subseteq D \subseteq \{z \,|\, |z-\alpha| \le R\}$ - כלומר תחום ההתכנסות מוכל בעיגול הסגור ברדיוס R סביב α ומכיל את העיגול הפתוח.
בעיגול הפתוח, הטור מתכנס בהחלט, ועל שפת העיגול יכול להיות שהטור יתכנס ויכול להיות שלא.

<u>רדיוס ההתכנסות:</u>

ניתן לחשב את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות ע"י הנוסחא: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ (R

יכול להיות גם אפס או אינסוף).

כמו כן, אם קיים הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ אז: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

<u>טור טיילור:</u>

הטור: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$ נקרא טור טיילור של הפונקציה f סביב הנקודה $z=\alpha$.

<u>רדיוס ההתכנסות של טור טיילור:</u>

רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של הפונקציה f סביב הנקודה $z=\alpha$ הוא המרחק של α מנקודת הסינגולריות (הלא-סליקה) של f הקרובה אליה ביותר (אם f שלמה, אז רדיוס ההתכנסות הוא אינסוף...)

<u>משפט:</u>

תהי f אנליטית בעיגול פתוח D סביב הנקודה $z=\alpha$, אז

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$ לכל $z \in D$ (כלומר טור טיילור של פונקציה אנליטית מתכנס לפונקציה בעיגול D).

<u>משפט נוסף:</u>

בתוך עיגול ההתכנסות הפתוח, הטור $S=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-\alpha\right)^n$ מתכנס לפונקציה אנליטית, וזהו למעשה טור טיילור של פונקציה זו.

<u>פיתוחי טיילור לפונקציות האלמנטריות:</u>

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{z^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{z^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

האיש והטור:

Brook Taylor (1685 – 1731)

תרגיל מס' 1

פתחות את הפונקציות הבאות לטור טיילור ומצאו את רדיוס ההתכנסות:

א. $f(z)=e^z$

ב. $f(z)=\frac{1}{z-i}$

ג. $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$

פתרון

א. לכל n מתקיים: $f^{(n)}(z)=e^z$, ולכן: $f^{(n)}(0)=e^0=1$, נציב בנוסחא של טור טיילור ונקבל:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

הפונקציה היא שלמה ולכן רדיוס ההתכנסות הוא אינסופי.

ב. נשים לב כי:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)+(1-i)}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}}$$

אבל:

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}}=\frac{1}{1-\frac{z-1}{i-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i-1}\right)^n\cdot(z-1)^n$$

אם נקח מעגל ברדיוס קטן מספיק, כך ש- $\left|\frac{z-1}{i-1}\right|<1$, נקבל סכום של טור הנדסי

ולכן נקבל:

$$f(z)=\frac{1}{1-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i-1}\right)^n(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i-1}\right)^{n+1}(z-1)^n$$

נמצא את רדיוס ההתכנסות:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\left(\frac{1}{i-1}\right)^n}{-\left(\frac{1}{i-1}\right)^{n+1}}\right|=|i-1|=\sqrt{2}$$

נשים לב, כי נקודת הסינגולריות של f הקרובה לנק' $z=1$ היא $z=i$ שמרחקה ממנה הוא בדיוק $\sqrt{2}$.

ג. נשים לב כי: $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'$.

כמו כן: $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ (בעיגול היחידה), נבצע גזירה אבר-אבר על הטור ונקבל:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n\right)'=\left(z^0\right)'+\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

תרגיל מס' 2

תהי: $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sin z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$. הוכיחו כי ניתן לפתח את f לטור חזקות סביב הנק' $z=0$, ומצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

פתרון

נשים לב כי מתקיים:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(0+z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z}{\sin z}-1}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z-\sin z}{z\sin z}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z+z\cos z}\overset{\text{לופיטל}}{=}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\cos z+\cos z-z\sin z}=0$$

כלומר, קבלנו כי f גזירה בנק' $z=0$ וכן ברור כי f גזירה בסביבה כלשהי של 0 (כי קיימת סביבה של 0 שבה $\frac{z}{\sin z}$ גזירה).

כלומר קיבלנו ש-f אנליטית ב-$z=0$, ולכן ניתן לרשום אותה כטור טיילור סביב 0.
כמו כן, נקודות הסינגולריות של f הן: $z=\pi k, k\in\mathbb{Z}$ (מתי ש-sin מתאפס), ואם כן נקודת הסינגולריות הקרובה ביותר ל-0 היא $z=\pi$, ונסיק כי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא π.

תרגיל מס' 3

א. מצאו את פיתוח טיילור של הפונקציה: $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ סביב הראשית.

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל: $I_k=\int_C\frac{dz}{z^k\left(1+z^2\right)}$, כאשר: $C=\left\{z\,\middle|\,|z|=\frac{1}{2}\right\}$.

פתרון

א. $f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-\left(-z^2\right)}\overset{\text{סכום של טור הנדסי, עבור } |z|<1}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$

רדיוס התכנסות הטור – המרחק לנקודת הסינגולריות הראשונה שהיא $z=\pm i$, כלומר 1.

ב. לפי נוסחת קושי לנגזרות מתקיים: $f^{(k)}(0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz=\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z^{k+1}\left(1+z^2\right)}=\frac{k!}{2\pi i}I_{k+1}$

ולכן נקבל: $I_k=\frac{2\pi i}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)$.

כעת מהפיתוח שמצאנו בסעיף א' נקבל כי:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}} & k\ is\ even\\ 0 & k\ is\ odd\end{cases}$$

ולסיכום נקבל: $I_k=\begin{cases}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\cdot 2\pi i & k\ is\ odd\\ 0 & k\ is\ even\end{cases}$

עוד תזכורת:

<u>אפסים של פונקציה אנליטית:</u>

תהי f פונקציה אנליטית בתחום D. אם בנק' $\alpha\in D$ מתקיים: $f(\alpha)=0$ אז נקרא לנק' $z=\alpha$ בשם: אפס של f.

<u>סדר של אפס:</u>

אם $f^{(k)}(\alpha)=0$ לכל $0\le k<n$, וכן: $f^{(n)}(\alpha)\neq 0$, נאמר כי הנק' $z=\alpha$ היא אפס מסדר n של f.

אפס מסדר 1 יקרא <u>אפס פשוט</u>. יכול להיות גם אפס מסדר אינסופי.

<u>משפט:</u>

אם f אנליטית בתחום D, וקיימת נקודה $\alpha\in D$ שהיא אפס אינסופי של f, אז $f\equiv 0$ ב-D.

<u>משפט היחידות:</u>

I. אם f אנליטית בתחום D, וקיימת סדרה מתכנסת של נקודות (לא מנוונת) $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq D$, שהגבול שלה ב-$D$, כך שלכל n מתקיים: $f(z_n)=0$, אז $f\equiv 0$ ב-D.

II. אם f,g אנליטיות בתחום D, וקיימת סדרה מתכנסת של נקודות (לא מנוונת) $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq D$ שהגבול שלה ב-D, כך שלכל n מתקיים: $f(z_n)=g(z_n)$, אז $f\equiv g$ ב-D.

(שני הניסוחים הם שקולים זה לזה)

תרגיל מס' 4

האם קיימת פונק' אנליטית בנק' $z=0$ כך שעבור סדרת הנקודות $\left\{z_n=\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מקבלת את סדרת הערכים: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

א. כאשר $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{8},0,...\right\}$?

ב. כאשר $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{6},...\right\}$?

ג. כאשר $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},...\right\}$?

פתרון

סדרת הנק' $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא מתכנסת ל-0, וכן עפ"י הנתון: $f\left(\frac{1}{2n}\right)=0$ לכל n. לכן עפ"י משפט היחידות נסיק כי $f\equiv 0$ בתחום האנליטיות שלה, וזה בסתירה לכך ש-$f(1)=\frac{1}{2}$, למשל. כלומר, לא קיימת f כזו.

ב. לכל n טבעי מתקיים: $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$, כמו כן $\frac{1}{2n}\to 0$ ולכן נסיק עפ"י משפט היחידות כי $f(z)=z$ לכל z בתחום האנליטיות של f. אבל $f(1)=\frac{1}{2}\neq 1$, למשל. כלומר קיבלנו סתירה ולכן נסיק כי לא קיימת f כזו.

ג. לכל n טבעי מתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}=\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$. כלומר, f מתלכדת עם הפונקציה $\frac{z}{2+z}$ על סדרת הנקודות $\frac{1}{n}\to 0$. לכן עפ"י משפט היחידות נסיק כי $f(z)=\frac{z}{2+z}$ לכל z בתחום ההתכנסות.

תרגיל מס' 5

תהי f פונקציה אנליטית בתחום D. $\{z_n\}\subseteq D$ סדרת נקודות מתכנסת - $z_n\to z_0\in D$.

כמו כן ידוע כי $f'(z_n)=1$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

מהי הפונקציה f?

פתרון

ראינו כבר, כי מכך ש-f אנליטית ניתן להסיק כי גם f' אנליטית ב-D. לכן עפ"י משפט היחידות נסיק כי $f'\equiv 1$ בתחום D ($f'(z_n)=1$ לכל n טבעי).

ולכן $f(z)=z+c$ (c קבוע כלשהו).

תרגיל מס' 6

תהי $f\left(z\right)=\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$.

אנחנו יודעים כי $f\left(z\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{1-z}=\pi k,k\in\mathbb{Z}$,

כלומר - $f\left(z\right)\Leftrightarrow z=z_k=\frac{\pi k-1}{\pi k}=1-\frac{1}{\pi k},k\in\mathbb{Z}$.

לסדרת הנקודות $\left\{z_k\right\}$ יש נקודת הצטברות, אבל למרות זאת f אינה הפונקציה הקבועה אפס.

מדוע זה לא סותר את משפט היחידות?

פתרון

לסדרת הנקודות: $\left\{z_k\right\}=\left\{1-\frac{1}{\pi k}\right\}$ יש אמנם גבול, אבל גבול זה הוא הנקודה $z=1$. נקודה זו אינה שייכת לתחום האנליטיות של f, ולכן משפט היחידות אינו תקף במקרה זה.

תרגיל מס' 7

תהי f פונקציה אנליטית בעיגול היחידה, המקיימת: $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le e^{-n}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $f\equiv 0$.

פתרון

נניח בשלילה f אינה זהותית אפס, לכן הנק' $z=0$ היא אפס מסדר <u>סופי</u> של f, כלומר - קיים k טבעי כלשהו כך שלכל $m<k$ מתקיים $f^{(m)}\left(0\right)=0$, אבל $f^{(k)}\left(0\right)\ne 0$.

כמו כן f אנליטית בעיגול היחידה, לכן אפשר לפתח אותה לטור טיילור סביב הראשית ולקבל:

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}z^n=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}z^n=z^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+k)}\left(0\right)}{\left(n+k\right)!}z^n$$

כלומר, ניתן לרשום את f בצורה: $f\left(z\right)=z^k g\left(z\right)$ כאשר g אנליטית בעיגול היחידה (כיוון שהיא מוגדרת ע"י טור חזקות מתכנס), וכן: $g\left(0\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+k)}\left(0\right)}{\left(n+k\right)!}0^k=\frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}\ne 0$.

כעת נתבונן בסדרת הנקודות $\left\{z_n\right\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$. אז לכל n טבעי מתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^k g\left(\frac{1}{n}\right)$, ולכן

נסיק כי: $g\left(\frac{1}{n}\right)=n^k f\left(\frac{1}{n}\right)$.

מכאן ש- $\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|n^k f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le n^k e^{-n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

אבל הראנו כי $g\left(0\right)\ne 0$, ואם כן קיבלנו סתירה לאנליטיות (לרציפות) של g.

לכן נסיק כי $f\equiv 0$ בתחום – **מש"ל**.

תרגיל מס' 8

נכון\לא נכון?

א. קיימת פונקציה אנליטית f בעיגול היחידה, כך שמתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$.

ב. קיימת פונקציה אנליטית f בעיגול היחידה, כך שמתקיים: $f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$.

פתרון

א. נסמן: $g(z)=f(z)\cdot f(-z)-z$.

אז על g מתאפסת על סדרת הנקודות - $\left\{z_n=\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ולכן עפ"י משפט היחידות $g(z)=0$ לכל z בעיגול היחידה. כלומר, נקבל כי $f(z)\cdot f(-z)=z$ לכל z בעיגול היחידה.

אבל זה לא ייתכן, כיוון שהפונק' באגף שמאל היא זוגית בעוד שהפונקציה באגף ימין היא אי-זוגית!
לכן נסיק כי הטענה אינה נכונה.

ב. נסמן כמו קודם: $g(z)=f(z)\cdot f(-z)-z^2$, ונקבל כי $g\equiv 0$ בעיגול היחידה, ולכן לכל z בעיגול היחידה מתקיים: $f(z)\cdot f(-z)=z^2$. קל לראות כי הפונקציה: $f(z)=iz$ מקיימת את התנאי הזה.

<u>הערה</u>: אם ממש רוצים, אז אפשר למצוא את f ע"י שימוש בטור טיילור שלה.

f אנליטית ולכן בעיגול היחידה - $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \Leftarrow f(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^n$.

כמו כן ידוע כי: $f(z)\cdot f(-z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^n\right)=z^2$ ולכן נוכל להסיק כי:

השוואת מקדמים עבור z^0 $\longrightarrow$ $a_0{}^2=0\Rightarrow a_0=0$

השוואת מקדמים עבור z^2 $\longrightarrow$ $a_0a_2-a_1{}^2+a_2a_0=1\Rightarrow a_1{}^2=-1\Rightarrow a_1=\pm i$

השוואת מקדמים לשאר החזקות $\longrightarrow$ $a_{n>1}=0$