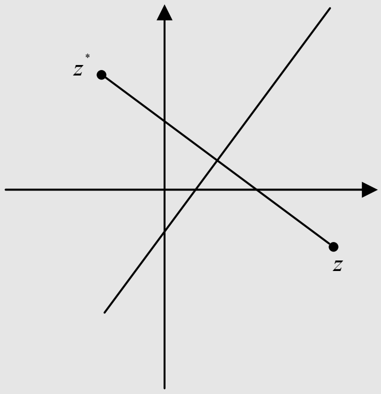
העתקות מביוס – המשך

תזכורת:

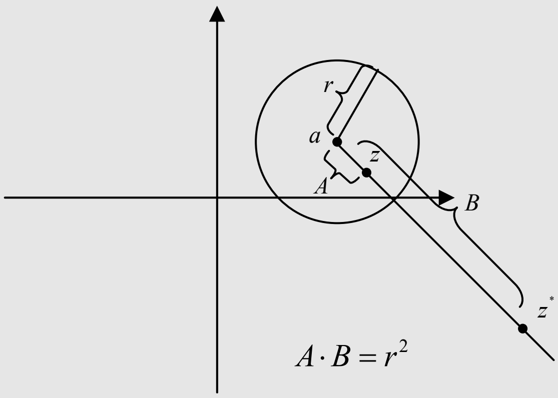
נקודה אינברסית (סימטרית):

ביחס לישר – אם z נקודה כלשהי שאינה על הישר l, אז הנק' הנמצאת מצידו השני של הישר היוצרת ביחד עם z קטע כך ש-l הוא האנך האמצעי לקטע זה, תקרא הנק' האינברסית של z ביחס לישר l, ונסמנה - z^*.



ביחס למעגל – יהי C מעגל שמרכזו a ורדיוסו r. עבור נק' z כלשהי, הנק' z^* הנמצאת על אותה הקרן היוצאת ממרכז המעגל עליה z נמצאת, והמקיימת ביחד עם z: $|z-a|\cdot|z^*-a|=r^2$ תקרא הנק' אינברסית של z ביחס למעגל C.

שילוב התנאים נותן את המשוואה: $(z^*-a)\left(\overline{z-a}\right)=r^2$.



הערה: הנק' האינברסית ביחס למרכז המעגל היא - ∞.

תכונת שימור האינברסיה:

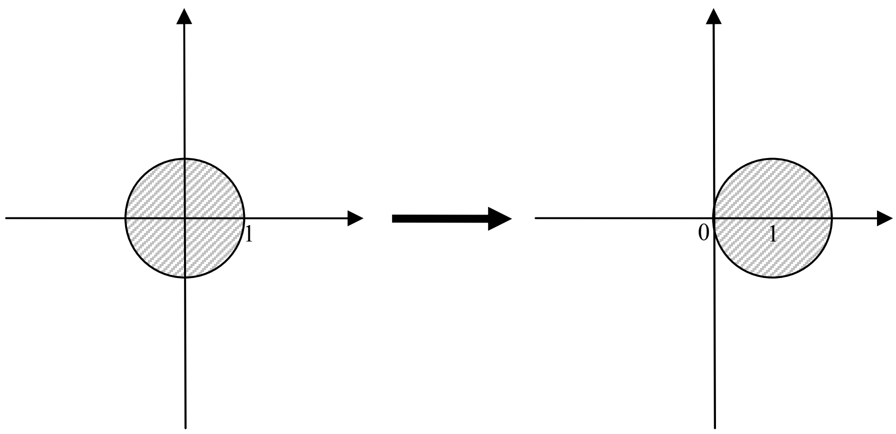
תהי w העתקת מביוס המעתיקה את המעגל המוכלל C_1 על המעגל המוכלל C_2, ותהי נק' z כלשהי.

אם הנק' z מועתקת לנק' w, אז הנק' z^* האינברסית ל-z ביחס ל-C_1 מועתקת לנק' w^* האינברסית ל-w ביחס ל-C_2.

תרגיל מס' 1 (מבוחן אמצע)

מצא העתקת מביוס המעתיקה את העיגול $\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\right\}$ לעיגול $\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-1|<1\right\}$

ומקיימת: $w(0)=\frac{1}{2},w(1)=0$.



פתרון

כידוע, העתקת מביוס נקבעת באופן יחיד לפי 3 נקודות. נתונות לנו שתי נקודות, עלינו למצוא נקודה שלישית ולהשתמש בנוסחת היחס הכפול.
לשם מציאת נקודה נוספת נשתמש בתכונת שימור האינברסיה:
הנק' האינברסית ל-0 ביחס למעגל $C_1=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\right\}$ היא ∞ (כי 0 הינה מרכז המעגל).
תמונת המעגל C_1 היא המעגל $C_2=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-1|=1\right\}$, ולכן $w(\infty)$ היא הנק' האינברסית ל-$w(0)$ ביחס ל-C_2.

נמצא אם כן, את הנק' האינברסית ל-$w(0)=\frac{1}{2}$ ביחס למעגל C_2. מתקיים אם כן:

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^*-1\right)\left(\overline{\frac{1}{2}-1}\right)=1^2=1 \Leftarrow \left(\left(\frac{1}{2}\right)^*-1\right)=-2 \Leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)^*=-1 .$$

לכן נסיק כי $w(\infty)\to -1$.

כעת נסמן: $z_1=0,z_2=1,z_3=\infty$ וכן: $w_1=\frac{1}{2},w_2=0,w_3=-1$, נציב בנוסחת היחס הכפול, ונקבל:

$$\frac{w-\frac{1}{2}}{w-(-1)}\cdot\frac{0-(-1)}{0-\frac{1}{2}}=\frac{z-0}{z-\infty}\cdot\frac{1-\infty}{1-0}$$

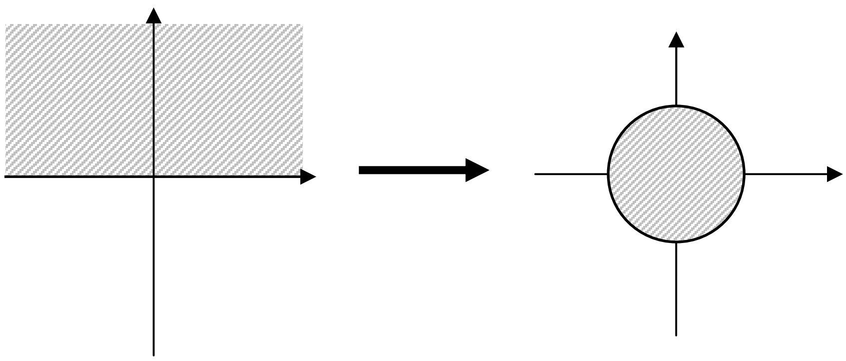
$$\Downarrow$$

$$-2\cdot\frac{w-\frac{1}{2}}{w+1}=z$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{-2w+1}{w+1}=z$$
$$\Downarrow$$
$$-2w+1=z(w+1)$$
$$\Downarrow$$
$$-2w-zw=z-1$$
$$\Downarrow$$
$$w(-2-z)=z-1$$
$$\Downarrow$$
$$w=\frac{z-1}{-z-2}=\frac{-z+1}{z+2}$$

כלומר קיבלנו: $w(z)=\frac{-z+1}{z+2}$.

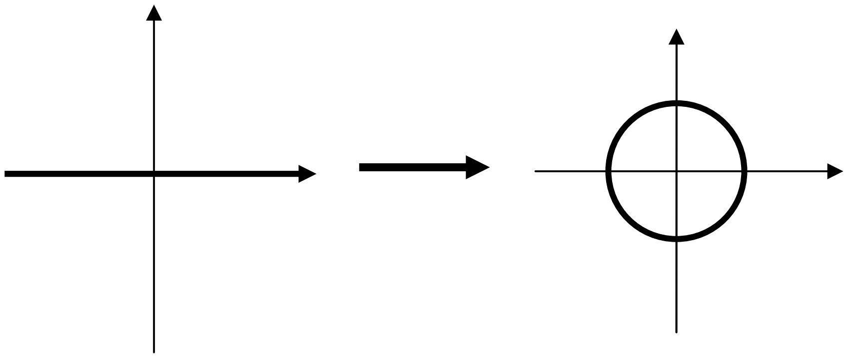
תרגיל מס' 2

מצאו את ההעתקה הכללית ביותר המעתיקה את חצי המישור העליון - $D_1=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$, על עיגול היחידה - $D_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$.



פתרון

ראשית, נמצא את הצורה הכללית ביותר של העתקת מביוס המעתיקה את הציר הממשי (שפת D_1) על מעגל היחידה (שפת D_2).



נסמן: $w=\frac{az+b}{cz+d}$.

כעת: $w\left(-\frac{b}{a}\right)=0$, $w\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$.

כיוון ש- $0,\infty$ הן סימטריות ביחס למעגל היחידה, והעתקת מביוס שומרת על אינברסיה, נסיק כי $-\frac{b}{a},-\frac{d}{c}$ סימטריות ביחס לציר הממשי. לכן אם נסמן: $-\frac{b}{a}=\beta$, אז בהכרח מתקיים: $-\frac{d}{c}=\overline{\beta}$, ונקבל: $w=\frac{a}{c}\cdot\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}$.

לכל $z\in\mathbb{R}$ מתקיים: $|z-\beta|=|z-\overline{\beta}|$ (סימטריה), ולכן: $|w(z)|=\left|\frac{a}{c}\right|$.

אבל ההעתקה מעבירה את הציר הממשי למעגל היחידה, ולכן לכל $z\in\mathbb{R}$ חייב להתקיים: $|z|=1$.

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{a}{c}\right|=1$$

לכן, ניתן לרשום: $\frac{a}{c}=e^{i\theta}$.

כלומר, קיבלנו כי כל העתקה העונה לתנאים המבוקשים היא מהצורה: $w=e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}$, $(\beta\in\mathbb{C},\theta\in\mathbb{R})$.

מאידך, כל העתקה מהצורה הנ"ל מעתיקה את הציר הממשי על מעגל היחידה (מאותם נימוקים שבעזרתם הגענו לצורה זו), ולכן צורה זו היא הכללית ביותר להעתקה המעתיקה את הציר הממשי על מעגל היחידה.

לסיום, הנק' 0 נמצאת בתוך עיגול היחידה, ולכן $w^{-1}(0)=-\frac{b}{a}=\beta$ צריכה להמצא בתוך חצי המישור העליון, כלומר חייב להתקיים התנאי: $\mathrm{Im}(\beta)>0$.

תרגיל מס' 3

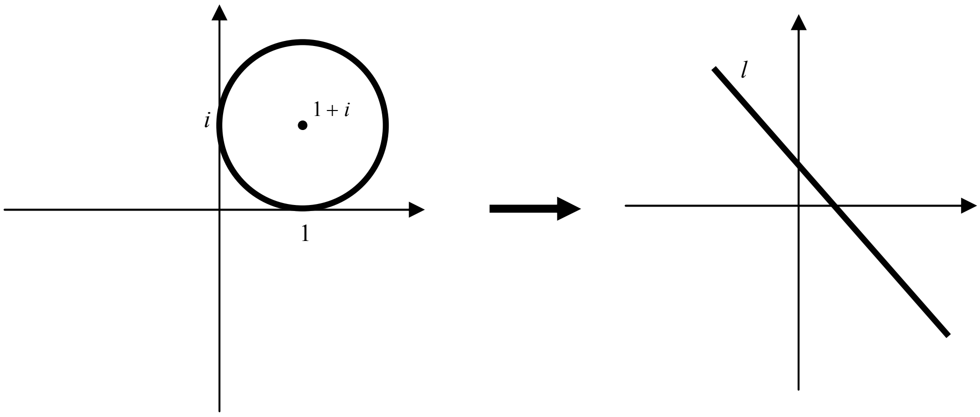
תהי $w(z)=\frac{z-(1+i)}{z-a}$.

א. נתון שעבור a ממשי, תמונת המעגל $C_1=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,\left|z-(1+i)\right|=1\right\}$ היא הישר l. מצאו מהם a ו-l.

ב. מצאו מספר מרוכב a, כך שהציר הממשי יועתק על מעגל היחידה - $C_2=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\right\}$.

פתרון:

א. נצייר את הבעיה:

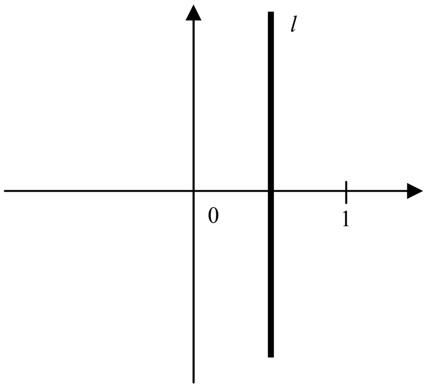


ראשית נשים לב כי $w(a)=\infty$, $\infty\in l$ ולכן נסיק כי $a\in C_1$.

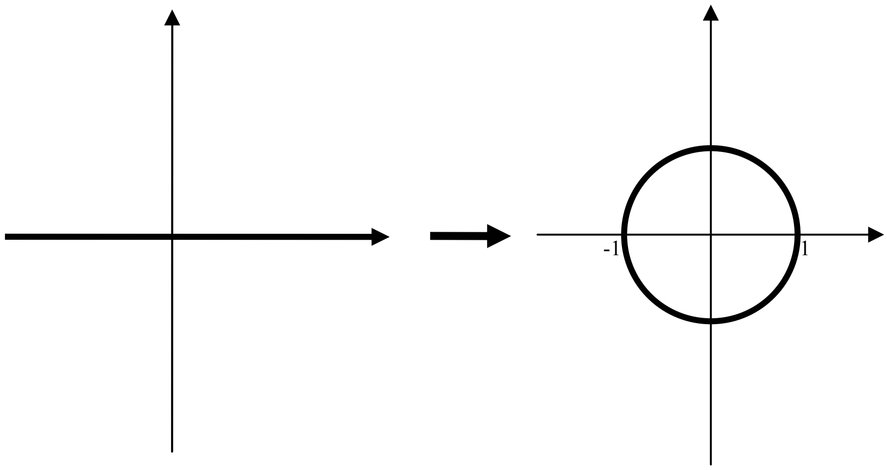
כמו כן נתון כי a ממשי, ולכן בהכרח נקבל כי $a=1$ (הנק' הממשית היחידה על C_1).

כלומר, קיבלנו: $w=\dfrac{z-(1+i)}{z-1}$.

כעת, הנק' $1+i,\infty$ הן סימטריות ביחס למעגל C_1, ולכן $w(1+i)=0, w(\infty)=1$ צריכות להיות סימטריות ביחס לישר l. עפ"י הגדרת סמטריות ביחס לישר, נסיק כי הישר l הוא האנך האמצעי לקטע $[0,1]$, כלומר – הישר $\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}\right\}$.



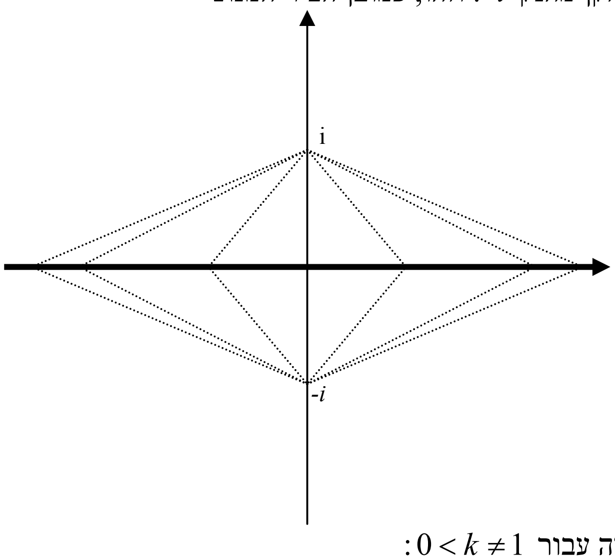
ב. נצייר את הבעיה:



הנקודות $0,\infty$ הן סימטריות ביחס למעגל היחידה. כמו כן: $0 = w(1+i), \infty = w(a)$, ולכן נסיק כי על $1+i, a$ להיות סמטריות ביחס לציר הממשי.
ולכן - $a = \overline{1+i} = 1-i$.

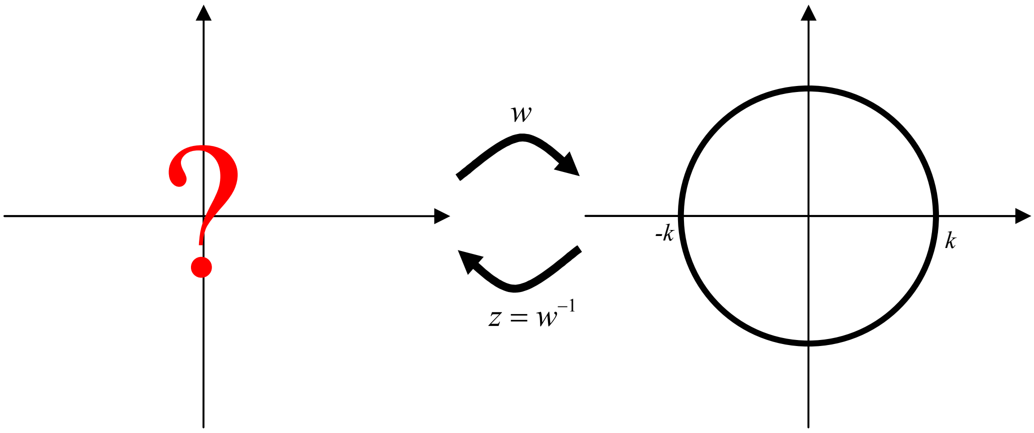
תרגיל מס' 4:
תארו את אוסף הנקודות המקיימות את השיוויון: $|z+i| = k|z-i|$ ($0 < k \in \mathbb{R}$).

פתרון:
נבדוק קודם מה קורה עבור $k=1$:
במקרה זה הנקודות מקיימות את השיוויון: $|z+i| = |z-i|$, כלומר אלו הן כל הנקודות שמרחקן מהנק' i שווה למרחקן מהנק' $-i$. וזהו, כמובן הציר הממשי –



כעת נבדוק מה קורה עבור $0 < k \neq 1$:
ראשית נשים לב כי: $|z+i| = k|z-i| \Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{z-i}\right| = k$

נסמן: $w = \frac{z+i}{z-i}$, ומה שאנחנו מחפשים אם כן, הוא אוסף הנק' המקיימות: $|w(z)| = k$,
ובמלים אחרות – את המקור של המעגל $C_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = k \right\}$ ע"י ההעתקה w.



לשם כך, נמצא מהי ההעתקה ההפוכה ל-w –

$$w=\frac{z+i}{z-i}\Rightarrow a=1,b=i,c=1,d=-i$$

$$\Downarrow$$

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a}=\frac{-iw-i}{-w+1}=i\frac{w+1}{w-1}$$

נסמן: $T(z)=i\frac{z+1}{z-1}$ (ההעתקה ההפוכה, כפונק' של z).

כלומר, כל שנותר לנו לעשות הוא למצוא את תמונת המעגל C_k תחת ההעתקה $T(z)$.

ראשית, נשים לב, כי הנק' המועתקת ל- ∞ היא $z_\infty=1$, אשר אינה נמצאת על המעגל C_k ($k\neq 1$), לכן תמונת המעגל C_k היא בהכרח מעגל.

נסמן מעגל זה כך: $\hat{C}_k=\{z\in\mathbb{C}\,||z-z_0|=r\}$ (z_0 – מרכז המעגל, r – רדיוס המעגל).

אם z_∞^* זו הנק' האינברסית ל-z_∞ ביחס ל-C_2, אז $T(z_\infty^*)$ היא הנק' האינברסית ל-$T(z_\infty)=\infty$ ביחס ל-$\hat{C}_2$, כלומר - $T(z_\infty^*)=z_0$.

נמצא אם כן את z_∞^*: $(z_\infty^*-0)\cdot(\overline{z_\infty-0})=k^2$

$$\Downarrow$$

$z_\infty^*=k^2$ ($z_\infty=1$).

ונקבל את מרכז המעגל $\hat{C}_k$: $z_0=T(z_\infty^*)=T(k^2)=i\frac{k^2+1}{k^2-1}$.

לסיום, נחשב את רדיוס המעגל $\hat{C}_k$:

הנק' $0,\infty$ סימטריות ביחס למעגל C_k, ולכן $z(0)=-i,z(\infty)=i$ סימטריות ביחס למעגל $\hat{C}_k$. כלומר מתקיים: $\left(i-i\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)\cdot\left(\overline{-i-i\frac{k^2+1}{k^2-1}}\right)=r^2$

$$\Downarrow$$

$$i\left(1-\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)\cdot i\left(1+\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)=r^2$$

$$\Downarrow$$

$$-\left(1-\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2\right)=r^2$$

$$\Downarrow$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2-1}$$

לסיכום, נקבל: