תוצאות של משפט קושי

תזכורת:

משפט ליוביל:

תהי f פונקציה שלמה וחסומה. אז f קבועה.

עקרון המקסימום המקומי:

תהי f אנליטית בתחום D. אם f אינה קבועה ב-D, אז אין ל-$|f|$ מקסימום מקומי ב-D.

עקרון המקסימום:

תהי f אנליטית בתחום חסום D, ורציפה ב-$\bar{D}$. אז $|f|$ מקבלת את המקסימום שלה על השפה של D - ∂D.

* כוכב השבוע:

Joseph Liouville
(1809-1882)

תרגיל מס' 1

נתון: f שלמה, $\operatorname{Re} f$ חסומה מלעיל.
צ"ל: f קבועה.

פתרון

נסמן: $g(z)=e^{f(z)}$.
כיוון ש-f שלמה נובע כי גם g היא שלמה (הרכבה של שלמות).
ידוע כי $\operatorname{Re} f(z)$ חסומה מלעיל, כלומר קיים $M>0$ כך ש: $\operatorname{Re} f(z)\le M$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
ולכן מתקיים: $|g(z)|=\left|e^{f(z)}\right|=e^{\operatorname{Re} f(z)}\le e^{M}$ - כלומר g חסומה.
ועפ"י משפט ליוביל נקבל כי g קבועה.

מזה ש-g קבועה, לא נובע ישירות ש-f קבועה, נוכיח זאת -
כיוון ש-g קבועה, נוכל להסיק כי נגזרתה מתאפסת בכל המישור, כלומר:

$$g'(z)=f'(z)e^{f(z)}=0$$

אבל לכל z מתקיים: $e^{f(z)}\neq 0$, ולכן נסיק כי: $f'(z)=0$ לכל z – כלומר f קבועה – **מש"ל**.

תרגיל מס' 2

נתון: f פונקציה שלמה, f' חסומה.
צ"ל: f היא פולינום ממעלה 1 לכל היותר.

פתרון

כיוון ש-f שלמה, אז נוכל להסיק כי גם f' שלמה (המשפט שראינו בתרגול הקודם שאומר שהנגזרת של פונק' אנליטית גם היא אנליטית).
לכן, נקבל כי f' שלמה וחסומה, ועפ"י משפט ליוביל נסיק כי f' קבועה.
נסמן: $f'(z) \equiv c$, ולכן נסיק כי: $f(z) = cz + d$ - כלומר f היא פולינום ממעלה 1 לכל היותר (אם $c=0$ אז נקבל פולינום ממעלה אפס).

תרגיל מס' 3

נתון: f שלמה, $|f(z)| \ge M > 0$ לכל z.
צ"ל: f קבועה

פתרון

מהנתון ניתן להסיק שלכל z מתקיים: $|f(z)| > 0$, ולכן לכל z - $f(z) \neq 0$.

נגדיר את הפונק': $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ - גם היא פונק' שלמה.

כמו כן, לכל z מתקיים: $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z)|} \le \dfrac{1}{M}$ - כלומר g גם חסומה.

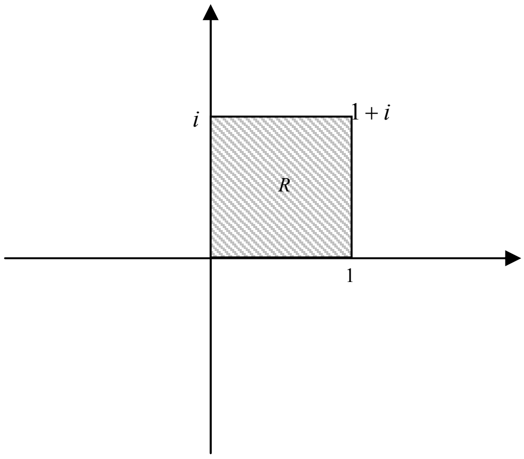
לכן עפ"י משפט ליוביל נסיק כי g קבועה.
ולכן גם f קבועה – **מש"ל**.

תרגיל מס' 4

נתון: f פונקציה שלמה ולא קבועה.
צ"ל: לא יכול להיות שגם 1 וגם i הם מחזורים של f.

פתרון

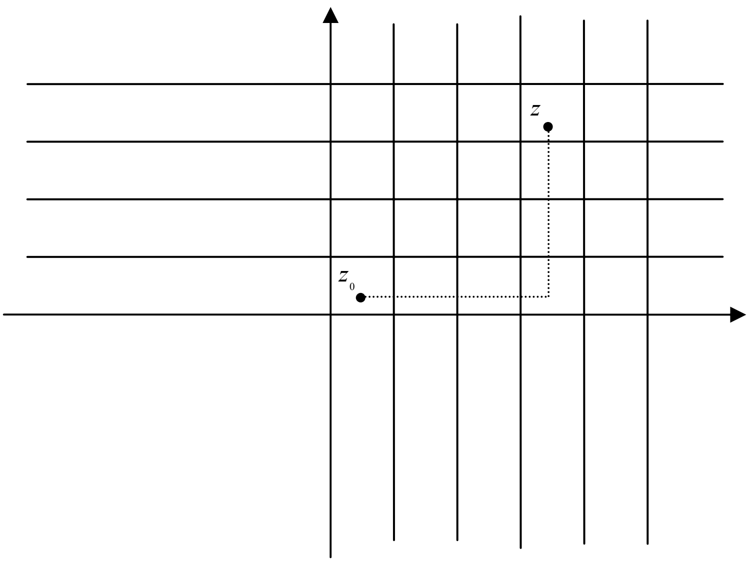
נסתכל על הריבוע הסגור -R הבא:



אז זוהי קבוצה סגורה וחסומה, וכיוון ש-f רציפה, נסיק כי f חסומה ב-R. כלומר, קיים $M>0$ כל שלכל $z\in R$ מתקיים: $\left|f(z)\right|\le M$.

נניח בשלילה כי 1 ו-i הם מחזורים של f. אז לכל n,m שלמים מתקיים: $f(z)=f(z+n+mi)$.

כעת, תהי $z\in\mathbb{C}$ נק' כלשהו במישור, אז קיימים m,n שלמים ו- $z_0\in R$ כך ש- $z=z_0+m+ni$, ולכן נקבל כי: $\left|f(z)\right|=\left|f(z_0+m+ni)\right|\le M$.



כלומר קיבלנו כי <u>לכל</u> $z\in\mathbb{C}$ מתקיים: $\left|f(z)\right|\le M$, כלומר f שלמה וחסומה – לכן לפי משפט ליוביל f קבועה.

אבל זה סתירה לנתון ולכן נסיק כי לא ייתכן ש-1 ו-i הם מחזורים של f – **מש"ל**.

תרגיל מס' 5 (ממבחן)

מצא את כל הפונקציות השלמות f, המקיימת את התנאי: $\left|f(z)\right|\le M\left(1+|z|^{\frac{4}{5}}\right)$ לכל z ($M>0$).

פתרון

תהי $z_0\in\mathbb{C}$ כלשהי. נסמן: $C_R=\left\{z \mid |z-z_0|=R\right\}$. אז: $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ עבור $R>0$ כלשהו (נוסחת קושי לנגזרת).

לכן:

$$\left|f'(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right| \underset{\text{משפט ההערכה לאינטגרלים מסילתיים}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\cdot\max_{z\in C_R}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|\cdot 2\pi R = R\cdot\max_{z\in C_R}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|$$

כעת, לכל $z\in C_R$ מתקיים: $|z|-|z_0|\leq|z-z_0|=R$, ולכן: $|z|\leq|z_0|+R$ (*).

ולכן נקבל:

$$\max_{z\in C_R}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right| = \max_{z\in C_R}\frac{|f(z)|}{R^2} \underset{\text{לפי הנתון}}{\leq} \max_{z\in C_R}\frac{M\left(1+|z|^{\frac{4}{5}}\right)}{R^2} \underset{\text{לפי (*)}}{\leq} \frac{M\left(1+(|z_0|+R)^{\frac{4}{5}}\right)}{R^2}$$

ולסיכום נקבל: $\left|f'(z_0)\right|\leq R\cdot\frac{M\left(1+(|z_0|+R)^{\frac{4}{5}}\right)}{R^2} = \frac{M\left(1+(|z_0|+R)^{\frac{4}{5}}\right)}{R}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$

לכן נסיק כי: $f'(z_0)=0$ לכל $z_0\in\mathbb{C}$, כלומר f – קבועה.

תרגיל מס' 6

הוכיחו את עקרון המינימום:

תהי f אנליטית בתחום חסום R, ורציפה ב- $\bar{R}$, כך שלכל $z\in\bar{R}$ מתקיים: $f(z)\neq 0$.

אז - $|f(z)|$ מקבל את המינימום שלו בשפה של R - ∂R.

פתרון

נסמן: $g(z)=\frac{1}{f(z)}$. אז לפי הנתון – g אנליטית ב-R ורציפה ב- $\bar{R}$ (מנה של אנליטיות כאשר המונה לא מתאפס בתחום). לכן, עפ"י עקרון המקסימום, נסיק כי $|g(z)|$ מקבלת את ערכה המקסימלי בנקודה כלשהי ב- ∂R. ברור שבנקודה שבה $|g(z)|=\frac{1}{|f(z)|}$ מקסימלי, $|f(z)|$ הוא מינימלי.

ולכן קיבלנו כי $|f(z)|$ מקבלת את ערכה המינימלי בנקודה כלשהי ב- ∂R - **מש"ל**.

שימו לב כי התנאי $f(z)\neq 0$ הכרחי, אחרת אם נקח למשל את הפונק' $f(z)=z$ בעיגול סביב הראשית, אז המינימום מן הסתם יתקבל בראשית ולא בשפת עיגול.

תרגיל מס' 7

נסמן: $f(z)=e^{z^2}$.

א. מצאו את הערך המקסימלי של $|f|$ בעיגול היחידה, ואת נקודות המקסימום של f בעיגול היחידה.

ב. מצאו את הערך המינימלי של $|f|$ בעיגול היחידה, ואת נקודות המינימום של f בעיגול היחידה.

פתרון

א. ברור, כי f אינה קבועה בעיגול היחידה (אם בא לכם, תבדקו), ולכן עפ"י עקרון המקסימום, נסיק כי $|f|$ מקבל את ערכו המקסימלי על שפת עיגול היחידה, כלומר על מעגל היחידה.

נסמן: $z=e^{i\theta},0\le\theta\le2\pi$, נקודה כלשהו על מעגל היחידה, אז:

$$\left|f(z)\right|=\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|=\left|e^{e^{2i\theta}}\right|=\left|e^{\cos2\theta+i\sin2\theta}\right|=e^{\cos2\theta}$$

כיוון שהפונק' e^x היא פונק' עולה, אז $\left|f(z)\right|$ מקבלת את ערכה המקסימלי בנקודות בהן $\cos2\theta$ מקבלת ערך מקסימלי – כלומר בנקודות בהן $\cos2\theta=1$ שהן: $\theta=0,\pi$.

לכן $\left|f(z)\right|$ מקבלת את ערכה המקסימלי בנקודות: $e^0=1,e^{i\pi}=-1$ והערך המקסימלי הוא: $e^1=e$.

ב. f אינה קבועה בעיגול היחידה, וכמו כן לכל z מתקיים: $e^{z^2}\neq0$, ולכן מתקיימים התנאים של עקרון המינימום – כלומר $|f|$ מקבל ערך מינימלי על שפת המעגל.

באותה דרך כמו קודם, נקבל שהערך המינימלי של $|f|$ הוא e^{-1} והוא מתקבל בנקודות $z=e^{i\theta}$ כאשר $\cos2\theta=-1$, כלומר בנקודות: $e^{\frac{\pi}{2}i}=i.e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$.

תרגיל מס' 8

נתון: f אנליטית בתחום R ואינה קבועה בו.
צ"ל: ל- $\operatorname{Re}f$ אין מקסימום מקומי ב-R.

פתרון

נסמן: $g(z)=e^{f(z)}$.

ברור כי g אנליטית וכן הוכחנו קודם כי g אינה קבועה.

ולכן עפ"י עקרון המקסימום המקומי, אין ל- $\left|g(z)\right|$ מקסימום מקומי ב-R.

כעת, נניח בשלילה כי ל- $\operatorname{Re}f$ יש מקסימום מקומי ב-R, אז קיים $z_0\in R$ וקיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $|z-z_0|<\varepsilon$ מתקיים: $\operatorname{Re}f(z)\le\operatorname{Re}f(z_0)\Leftarrow e^{\operatorname{Re}f(z)}\le e^{\operatorname{Re}f(z_0)}$.

אבל: $\left|g(z)\right|=\left|e^{f(z)}\right|=e^{\operatorname{Re}f(z)}$.

ולכן קיבלנו כי לכל $|z-z_0|<\varepsilon$ מתקיים: $\left|g(z)\right|\le\left|g(z_0)\right|$ - כלומר קיבלנו מקסימום מקומי ל- $\left|g(z)\right|$ - וזו סתירה. $\Leftarrow$ **מש"ל**.

תרגיל מס' 9

נתון: f אנליטית בעיגול היחידה, ורציפה על מעגל היחידה.

$\left|f(z)\right|>1$ לכל z על מעגל היחידה, וכן $\left|f(0)\right|<1$.

צ"ל: קיימת נקודה z_0 בתוך עיגול היחידה, כך ש- $f(z_0)=0$.

פתרון

נניח בשלילה כי לא קיימת z_0 כזו.

אז מתקיימים כל התנאים של עקרון המינימום, ולכן $\left|f(z)\right|$ מקבלת מינימום על מעגל היחידה.

אבל $\left|f(0)\right|<\left|f(z)\right|$ לכל z על מעגל היחידה, וקיבלנו אם כן סתירה.

$\Downarrow$

משל"ל

תרגיל מס' 10

נתון: f,g אנליטיות בתחום D כלשהו. $f(z),g(z)\neq 0$ ב-D.

כמו כן - $\left|f(z)\right|=\left|g(z)\right|$ לכל $z\in\partial D$.

צ"ל: $f(z)=c\cdot g(z)$, כאשר: $\left|c\right|=1$.

פתרון

נגדיר פונק' חדשה: $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$. כיוון ש-g לא מתאפסת ב-D, ו-f,g אנליטיות, נוכל להסיק כי h אנליטית ב-D.

לכן עפ"י עקרון המקסימום נסיק כי $\left|h(z)\right|$ מקבלת ערך מקסימלי על ∂D.

כמו כן, $h(z)\neq 0$ ב-D (כי $f(z)\neq 0$), ולכן עפ"י עקרון המינימום נסיק כי $\left|h(z)\right|$ מקבלת ערך מינימלי ב-∂D.

אבל - $\left|h(z)\right|=\left|\dfrac{f(z)}{g(z)}\right|=\dfrac{\left|f(z)\right|}{\left|g(z)\right|}=1$ לכל $z\in\partial D$ (לפי הנתון).

כלומר קיבלנו כי $\left|h(z)\right|$ קבועה על ∂D ולכן נסיק כי $\left|h(z)\right|$ קבועה בכל D (גם המינימום וגם המקסימום של $\left|h(z)\right|$ מתקבלים על השפה ולכן שניהם שווים ל-1).

ולכן נסיק כי h היא פונק' קבועה ב-D (פונק' אנליטית שערכה המוחלט קבוע בתחום, היא עצמה קבועה בתחום, הוכחנו את זה בתרגול מס' 3).

כלומר קיבלנו כי $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}=c \Leftarrow f(z)=c\cdot g(z)$, כאשר: $\left|c\right|=\left|h(z)\right|=1$ - **משל"ל**.