תכונות של מספרים מרוכבים

תזכורת:

הצגה אלגברית של מספר מרוכב:

$$z = x + iy$$

הצמוד:

$$\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy$$

החלק הממשי:

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x+iy) = x$$

החלק המדומה:

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x+iy) = y$$

הערך המוחלט:

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

זהויות בסיסיות:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}, z\overline{z} = |z|^2$$

תרגיל מס' 1

פשט את השבר: $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ (כלומר – הבא להצגה בצורה $a+ib$).

פתרון

הדרך הסטנדרטית לפישוט שברים היא הכפלת המונה והמכנה באיבר הצמוד למכנה. בדרך זו נקבל במונה מס' ממשי (כי $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$), ובמונה מס' מרוכב כלשהו.

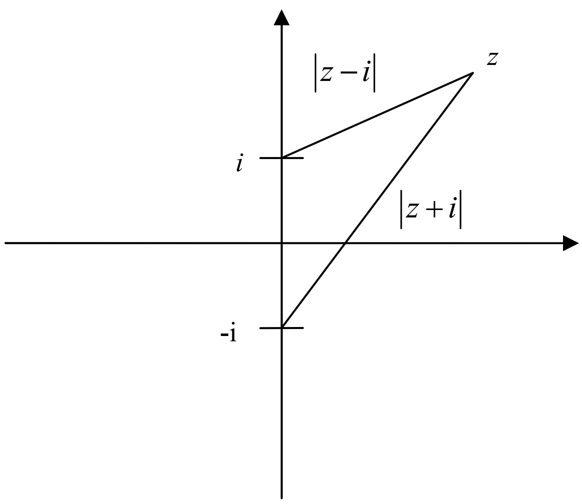
$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{(1+i)^{16}}{(1-i)^7(1+i)^7} = \frac{\left((1+i)^2\right)^8}{\left((1+i)(1-i)\right)^7} = \frac{(2i)^8}{2^7} = \frac{2^8}{2^7} = 2$$

תרגיל מס' 2

תאר את קבוצת הנקודות במישור $\mathbb{C}$ המקיימות את אי השוויון: $|z-i| - |z+i| < 2$.

פתרון

ראשית, נצייר תיאור סכמתי של הבעיה:



אנו רואים כאן בעצם משולש, שקודקודיו הם: $z, i, -i$.

הצלע שבין z ל-i, ארכה $|z-i|$,

הצלע שבין z ל-$-i$ ארכה $|z-(-i)| = |z+i|$,

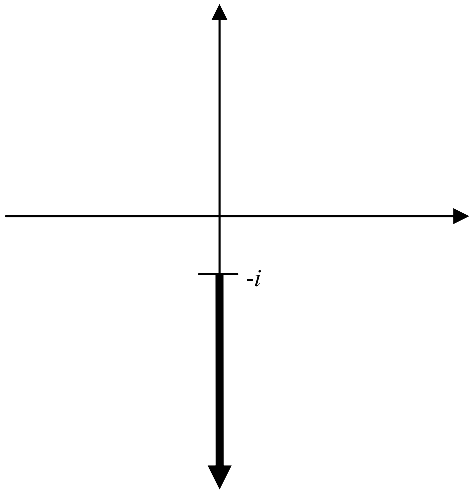
והצלע שבין i ל-i- ארכה $|i-(-i)| = |2i| = 2$.

לכן עפ"י אי-שיוויון המשולש, לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים: $|z-i| \le |z+i| + 2$ $\Leftarrow$
$|z-i| - |z+i| \le 2$.
כעת, כל מה שנותר לעשות ע"מ לפתור את השאלה הוא למצוא באילו מקרים מתקיים השוויון $|z-i| - |z+i| = 2$ (ואז נדע מתי מתקיים אי השוויון החזק).

נמצא זאת בשתי דרכים:
הדרך האלגברית:
נסמן: $z = x + iy$. עלינו לפתור, אם כן את המשוואה: $|x+iy-i| - |x+iy+i| = 2$.

$$\Downarrow$$
$$|x+i(y-1)| = |x+i(y+1)| + 2$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 + 4\sqrt{x^2+(y+1)^2} + 4$$
$$\Downarrow$$
$$y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 + 4 + 4\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$\Downarrow$$
$$-4y - 4 = 4\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$\Downarrow$$
$$-y-1 = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \quad *$$
$$\Downarrow$$
$$(-y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x = 0$$

כלומר קיבלנו כי בהכרח $x = 0$ וכמו כן, מ-* (כיוון שאנחנו מתכוונים תמיד לשרש החיובי) נסיק כי חייב להתקיים גם $0 \le -y-1$ $\Leftarrow$ $y \le -1$.
ואם כן קבוצת הנקודות המקיימת את השיוויון היא: $\{iy \mid y \le -1\}$, כלומר:



הדרך הגיאומטרית:

נשחזר את הוכחת אי-שוויון המשולש ($|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$) –

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+|z_2|^2=$$

$$=|z_1|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)+|z_2|^2\le|z_1|^2+2\left|z_1\overline{z_2}\right|+|z_2|^2=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2=\left(|z_1|+|z_2|\right)^2$$

$\operatorname{Re}(z)\le|z|$

כלומר, שוויון יתקיים אמ"מ $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\left|z_1\overline{z_2}\right|$, כלומר אמ"מ $z_1\overline{z_2}$ הוא מספר ממשי אי-שלילי.

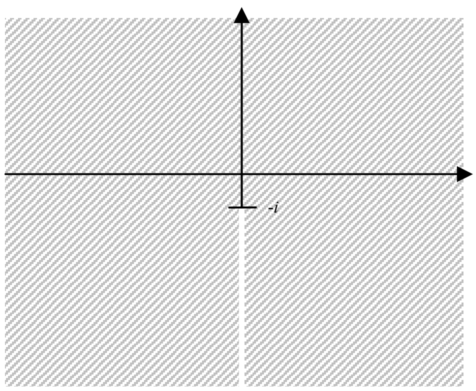
כעת, במקרה שלנו - $z_1=z+i, z_2=-2i$, ונקבל -

$z_1\overline{z_2}=(z+i)\overline{(-2i)}=(z+i)\cdot 2i=2(iz-1)$.

ולכן השוויון שאנחנו מחפשים יתקיים אמ"מ $iz-1$ הוא מספר ממשי אי-שלילי, כלומר $z=iy$ וכן מתקיים: $0\le i\cdot iy-1=-y-1 \Leftarrow y\le -1$.

ואם כן, גם בדרך זו, קיבלנו כי קבוצת הנקודות המקיימת את השוויון היא: $\{iy \mid y\le -1\}$.

ולסיום, קבוצת הנקודות המקיימת את האי-שוויון החזק היא הקבוצה המשלימה לקבוצה שמצאנו והיא: $\mathbb{C}\setminus\{iy \mid y\le -1\}$ -

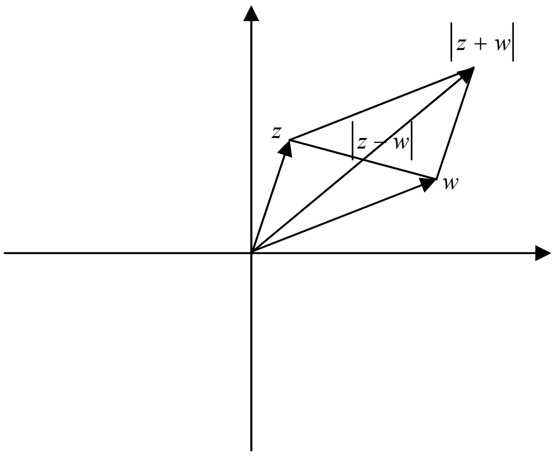


תרגיל מס' 3

הוכח את שיוויון המקבילית: $\left|z+w\right|^2+\left|z-w\right|^2=2\left(\left|z\right|^2+\left|w\right|^2\right)$.

פתרון

נסתכל על המשמעות הגיאומטרית של השיוויון:



אם, כן מה שהשיוויון אומר הוא, שבמקבילית, סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבועי הצלעות.

כעת נוכיח את השיוויון:

$$\left|z+w\right|^2=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w}=\left|z\right|^2+\left|w\right|^2+2\operatorname{Re}\left(z\bar{w}\right)$$

$$\left|z-w\right|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=z\bar{z}-z\bar{w}-w\bar{z}+w\bar{w}=\left|z\right|^2+\left|w\right|^2-2\operatorname{Re}\left(w\bar{z}\right)$$

$$\Downarrow$$

$\left|z+w\right|^2+\left|z-w\right|^2=2\left(\left|z\right|^2+\left|w\right|^2\right)$ - **מש"ל.**

תזכורת:

הארגומנט של מספר מרוכב:

$$z=x+iy$$

$$\tan(\theta)=\frac{y}{x},\theta=\arg(z)$$

הצגה קוטבית (פולארית) של מספר מרוכב:

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$r=|z|$$

$$\theta=\arg(z)$$

נוסחת דה-מואבר:

$$z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{ni\theta}$$

שרש של מספר מרוכב:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\theta}}=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)},k=0,1,...,n-1$$

תרגיל מס' 4

מצא את כל הפתרונות של המשוואה: $(z-1)^3=-3$.

פתרון

$-3=3e^{i\pi}$ ולכן $\sqrt[3]{-3}=\sqrt[3]{3}\bullet e^{i\theta}$ כאשר $\theta=\frac{\pi+2\pi k}{3}$ (k=0,1,2).

אם נחזור למשוואה, נקבל: $z-1=\sqrt[3]{-3}$ $\Leftarrow$ $z=1+3e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)}$.

ולכן הפתרונות הם:

$$z_1=1+\sqrt[3]{3}e^{\frac{i\pi}{3}}=1+\sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=1+\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=1+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{3}\bullet\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt[6]{3^5}}{2}$$

$$z_2=1+\sqrt[3]{3}e^{i\pi}=1+\sqrt[3]{3}\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right)=1+\sqrt[3]{3}(-1)=1-\sqrt[3]{3}$$

$$z_3=1+\sqrt[3]{3}e^{i\bullet\frac{5\pi}{3}}=1+\sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=1+\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=1+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-i\frac{\sqrt[6]{3^5}}{2}=\frac{2+\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt[6]{3^5}}{2}$$

תרגיל מס' 5

הוכח בעזרת נוסחת דה-מואבר את הזהות: $\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin3\theta$.

פתרון

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^3=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta+3i^2\cos\theta\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta=$$
$$=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$$

אבל לפי נוסחת דה-מואבר:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

נשווה בין האגפים הימניים ונקבל:

$$\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta=\cos3\theta+i\sin3\theta$$
$$\Downarrow$$
$$\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

נשווה בין החלקים המדומים ונקבל:

$$3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=\sin3\theta$$

נשתמש בזהות: $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ ונקבל:

$$3\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)-\sin^3\theta=\sin3\theta$$
$$\Downarrow$$
$$3\sin\theta-3\sin^3\theta-\sin^3\theta=\sin3\theta$$
$$\Downarrow$$
$$-4\sin^3\theta=-3\sin\theta+\sin3\theta$$
$$\Downarrow$$

$\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin3\theta$ - **מש"ל.**

תרגיל מס' 6 (שאלה ממבחן)

כמה פתרונות (מרוכבים) יש למשוואה: $z^5-\overline{z}^3=0$?

פתרון

נרשום את המשוואה בצורה הבאה: $z^5=\overline{z}^3$.
קודם כל, ברור כי $z=0$ מקיים את המשוואה.
כעת, אם $z\neq0$, אז ניתן לכפול את שני האגפים ב- $\overline{z}^3$ ונקבל:

$$z^8=\overline{z}^3z^3=\left(z\overline{z}\right)^3=\left(\left|z\right|^2\right)^3=\left|z\right|^6$$

נסמן: $z=re^{i\theta}$ ונקבל את המשוואה: $\left(re^{i\theta}\right)^8=r^6$, ועפ"י נוסחת דה-מואבר נקבל:

$$r^8e^{8i\theta}=r^6$$

$z\neq0$ ולכן גם $r\neq0$, ולכן נוכל לחלק ב- r^6 ונקבל: $r^2e^{8i\theta}=1=e^{2\pi ki}$.

$$\Downarrow$$

$r=1$, וכן $8i\theta=2\pi ik$

$$\Downarrow$$

$\theta=\frac{1}{4}\pi k$ (k=0,1,…,7).

כלומר סה"כ קיבלנו 9 פתרונות: $z=0$ ו-8 שרשי היחידה מסדר 8.

תרגיל מס' 7

צ"ל: הפונקציה $f\left(z\right)=\dfrac{z}{\left(z-1\right)^2}$ היא חח"ע בתוך עיגול היחידה ($\left\{z\mid\left|z\right|<1\right\}$).

פתרון

נניח כי $f\left(z\right)=f\left(w\right)\Leftarrow\dfrac{z}{\left(z-1\right)^2}=\dfrac{w}{\left(w-1\right)^2}$, נכפיל בהצלבה ונקבל:

$$z\left(w-1\right)^2=w\left(z-1\right)^2\Rightarrow z\left(w^2-2w+1\right)=w\left(z^2-2z+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow zw^2-2zw+z=z^2w-2zw+w\Rightarrow zw^2-w=z^2w-z\Rightarrow w\left(zw-1\right)=z\left(zw-1\right)$$

כעת, אם נניח כי $zw=1$, אז בהכרח יתקיים: $\left|zw\right|=\left|z\right|\left|w\right|=1$, אבל זה לא ייתכן, כיוון שהנקודות z,w נמצאות **בתוך** עיגול היחידה, ולכן - $\left|z\right|,\left|w\right|<1\Leftarrow\left|z\right|\left|w\right|<1$.

כלומר, בהכרח מתקיים $zw-1\neq0$ וניתן לחלק בו את שני האגפים. נעשה זאת ונקבל:

$$w=z$$
$$\Downarrow$$

f חח"ע – **משל.**

תרגיל מס' 8

צייר את התחומים הבאים:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z\neq0,0\leq\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$B=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z\neq0,1\leq\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$C=\left\{z\in\mathbb{C}\mid\frac{\pi}{4}\leq Arg\left(z+i\right)\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

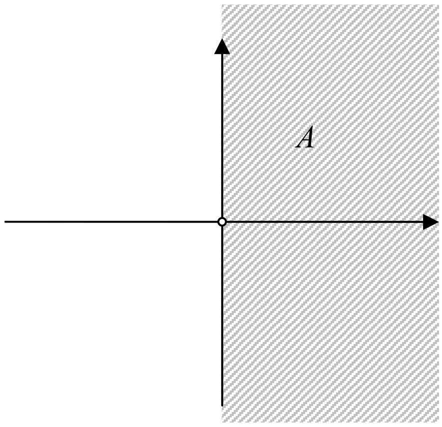
פתרון

נמצא מהי A:

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{\left|z\right|^2}\Rightarrow\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\operatorname{Re}\left(\dfrac{\bar{z}}{\left|z\right|^2}\right)=\dfrac{1}{\left|z\right|^2}\operatorname{Re}\left(\bar{z}\right)=\dfrac{\operatorname{Re}\left(z\right)}{\left|z\right|^2}$ ולכן:

$0\leq\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)\Leftrightarrow0\leq\dfrac{\operatorname{Re}\left(z\right)}{\left|z\right|^2}\Leftrightarrow0\leq\operatorname{Re}\left(z\right)$ ונקבל כי:

$A=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z\neq0,0\leq\operatorname{Re}\left(z\right)\right\}$ שזהו בעצם חצי המישור הימני ללא 0 –



נמצא מהי B:

נשתמש בחישוב שעשינו קודם, ונקבל: $|z|^2 \le \mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow 1 \le \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2} \Leftrightarrow 1 \le \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

כעת, נסמן: $z = x + iy$ ונקבל את אי-השיוויון - $x^2 + y^2 \le x$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - x + y^2 \le 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 \le 0$$

השלמה לריבוע

$$\Downarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$$

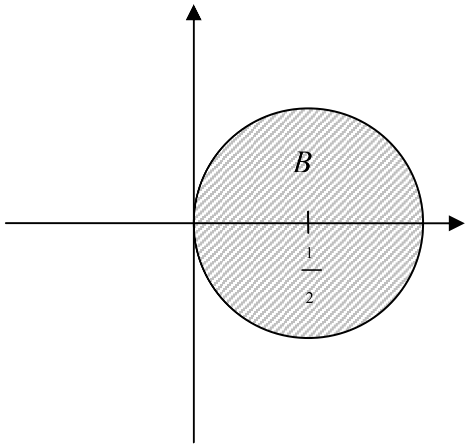
$$\Downarrow$$

$$\left|z - \frac{1}{2}\right|^2 \le \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

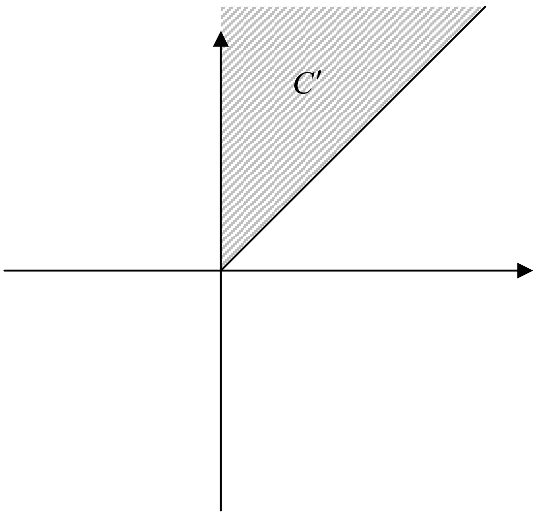
$$\left|z - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$$

ונקבל אם כן: $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2} \right\}$ שזוהי בעצם משוואת העיגול שמרכזו בנקודה $z = \frac{1}{2}$ ורדיוסו $\frac{1}{2}$:

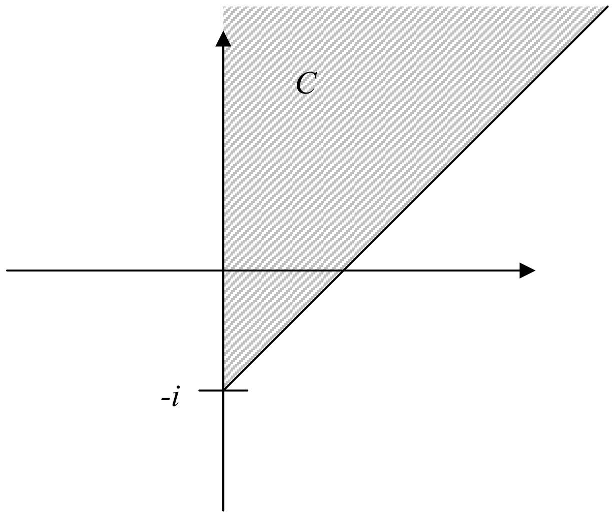


נמצא מהי C:

נסמן $w = z + i$, $C' = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} \le Arg\left(w\right) \le \frac{\pi}{2} \right\}$. C' היא אם כן קבוצת הנקודות שהארגומנט העיקרי שלהן הוא בין $\frac{\pi}{4}$ ל-$\frac{\pi}{2}$ -



כמו כן - $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z + i \in C' \right\}$, ולכן נקבל C היא בעצם קבוצת הנקודות (כלומר, "הנמכה" של C' ב-i):


C
-i