עקרון הארגומנט ומשפט רושה

<u>עקרון הארגומנט:</u>

תהי f המוגדרת בתחום D כלשהו, ו- Γ מסלול סגור-פשוט, המוכל יחד עם הפנים שלו ב-D.
כך שמתקיים:

1. f אנליטית ואין לה אפסים על Γ.
2. ל-f מספר סופי של נקודות סינגולריות בתוך Γ, שכולן קטבים.

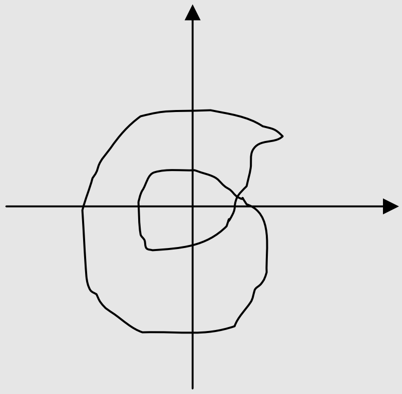
אז מתקיים:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N-P$$

כאשר:
N = מספר האפסים של f בתוך Γ (כאשר אפס מסדר m נספר m פעמים)
P = מספר הקטבים של f בתוך Γ (כאשר קוטב מסדר m נספר m פעמים)

הערך $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ (שהוא מספר שלם) נקרא גם "האינדקס" של $f(\Gamma)$ שהוא מספר הפעמים שהמסלול $f(\Gamma)$ מקיף את הראשית.

למשל –
האינדקס של המסלול:



הוא 2 (בהנחה שהולכים לאורך הקו פעם אחת בלבד ובכיוון החיובי...).

תרגיל מס' 1

חשבון: $I=\int_{|z|=2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, כאשר: $f(z)=\frac{(z+3)(z+1)}{z^2}$.

פתרון

האפסים של f הם $z=-3$ ו-$z=-1$ ושניהם אפסים פשוטים. מתוכם, רק $z=-1$ נמצא בתוך המעגל $\{z \mid |z|=2\}$, לכן נקבל: $N=1$.

הקוטב היחיד של f הוא $z=0$, וזהו קוטב מסדר 2 (מדוע?) ולכן $P=2$.

סה"כ נקבל: $I=2\pi i(N-P)=2\pi i(1-2)=-2\pi i$.

תרגיל מס' 2

חשבו את האינטגרל: $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin 2z}{\sin^2 z-\frac{1}{2}}dz$

פתרון

נסמן: $f(z)=\sin^2 z-\frac{1}{2}$.

אז: $f'(z)=2\sin z\cos z=\sin 2z$.

ונקבל: $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

כעת נמצא את מספר האפסים של f:

$$\sin^2 z=\frac{1}{2}\Leftarrow f(z)=0$$
$$\Downarrow$$
$$\sin z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Downarrow$$
$$z=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$$

האפסים שנמצאים בתוך מעגל היחידה הם אם כן: $z_1=\frac{\pi}{4},z_2=-\frac{\pi}{4}$.

והם אפסים פשוטים, שכן: $f'(z)=\sin 2z$ ולכן:

$$f'(z_1)=\sin\frac{\pi}{2}=1\neq 0$$
$$f'(z_2)=\sin-\frac{\pi}{2}=-1\neq 0$$

כלומר נקבל סה"כ: $N=2$.

הפונקציה f היא אנליטית בתוך מעגל היחידה ולכן $P=0$ (אין קטבים).

כמו כן, נשים לב כי f אנליטית ואינה מתאפסת על מעגל היחידה, לכן תנאי עקרון הארגומנט מתקיימים ואפשר לרשום:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P=2$$
$$\Downarrow$$
$$I=4\pi i$$

שימו לב: היה ניתן לחשב את האינטגרל גם בעזרת משפט השארית, אבל אז היינו צריכים לחשב שאריות והיה יוצא קצת יותר ארוך.

<u>משפט רושה:</u>

תהיינה f,g אנליטית בתחום D. Γ - קונטור סגור פשוט המוכל יחד עם הפנים שלו ב-D.
אם לכל $z\in\Gamma$ מתקיים: $\left|g\left(z\right)\right|<\left|f\left(z\right)\right|$, אז ל-$f$ ול- $f+g$ יש אותו מספר אפסים בפנים של Γ (כאשר אפס מסדר m נספר m פעמים).

תרגיל מס' 3

נתון: $|a|<e^{-1}$.
צ"ל: לא קיים מספר מרוכב $|z|<1$, כך שמתקיים: $e^z=az^3$.

פתרון

נסמן: $f\left(z\right)=e^z, g\left(z\right)=-az^3$.
כעת, לכל z על מעגל היחידה מתקיים: $\left|f\left(z\right)\right|=\left|e^z\right|=e^x\geq e^{-1}$ וכן $\left|g\left(z\right)\right|=\left|az^3\right|=|a|$.
כמו כן נתון כי $|a|<e^{-1}$, ולכן נקבל כי לכל z על מעגל היחידה מתקיים: $\left|g\left(z\right)\right|=|a|<e^{-1}\leq\left|f\left(z\right)\right|$,
כלומר: $\left|g\left(z\right)\right|<\left|f\left(z\right)\right|$.
ברור כי f,g אנליטיות בתוך ועל מעגל היחידה, ולכן עפ"י משפט רושה נסיק כי ל-f ול-$f+g$ אותו מספר אפסים בתוך מעגל היחידה.
אבל $f\left(z\right)=e^z\neq 0$ לכל z, בפרט אין ל-f אפסים בתוך עיגול היחידה ולכן גם ל-$f+g$ אין אפסים בתוך היחידה.
כלומר לא קיים $|z|<1$ כך ש: $0=f\left(z\right)+g\left(z\right)=e^z-az^3$, או במלים אחרות, לא קיים z בעיגול היחידה המקיים: $e^z=az^3$.

תרגיל מס' 4

כמה פתרונות יש למשוואה: $z^4+5z+1=0$:
א. בעיגול: $D_1=\left\{z\,|\,|z|<1\right\}$
ב. בטבעת: $D_2=\left\{z\,|\,1<|z|<2\right\}$

פתרון

א. נסמן: $f\left(z\right)=5z, g\left(z\right)=z^4+1$.
כעת, על מעגל היחידה מתקיים: $\left|f\left(z\right)\right|=|5z|=5>2=|z|^4+1\geq\left|z^4+1\right|=\left|g\left(z\right)\right|$.
כמו כן ברור כי f,g אנליטיות על ובתוך מעגל היחידה, ולכן נסיק כי מספר האפסים של f ב- C_1 שווה למספר האפסים של $f+g$ ב- C_1.
אבל $f\left(z\right)=5z$ ולכן ברור כי ל-f יש אפס פשוט אחד ב- C_1, לכן ל-$f+g$ יש אפס אחד ב- C_1, כלומר קיים z יחיד ב- C_1, המקיים: $f\left(z\right)+g\left(z\right)=z^4+5z+1=0$.
לכן למשוואה הנתונה יש פתרון יחיד בעיגול C_1.

ב. נסמן: $f(z)=z^4, g(z)=5z+1$
משפט רושה לא מתקיים עבור טבעת, אבל אפשר לחשב כמה פתרונות יש בעיגול החיצוני ולהפחית ממספר הפתרונות בעיגול הפנימי, ולקבל את מספר הפתרונות בטבעת (כמעט).
אז על המעגל $\{z \mid |z|=2\}$, מתקיים: $|f(z)|=|z|^4=16>11=5|z|+1\ge|5z+1|=|g(z)|$.
לכן, נסיק כי מספר האפסים של f שווה למספר האפסים של $f+g$ בעיגול $\{z \mid |z|<2\}$.
כיוון של-f יש אפס מסדר 4, נסיק כי גם ל-$f+g$ 4 אפסים בעיגול $\{z \mid |z|<2\}$.
מסעיף א' אנחנו יודעים כי בעיגול בעיגול $\{z \mid |z|<1\}$, יש פתרון אחד.
כמו כן, על מעגל היחידה הראנו בחלק א' כי מתקיים: $|5z|>|z^4+1|$, ולכן:
$|z^4+5z+1|=|5z+(z^4+1)|\ge||5z|-|z^4+1||>0$, כלומר אין למשוואה פתרונות על מעגל היחידה,
ולכן נסכם ונסיק כי בטבעת C_2 יש $4-1=3$ פתרונות למשוואה.

<u>באופן כללי:</u>
אם יש לנו משוואה כזו: $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0=0$ ורוצים למצוא מספר פתרונות בתוך עיגול מסויים, אז בוחרים את האיבר "הכי חזק", כלומר שערכו המוחלט גבוה מכל השאר על המעגל המדובר, ומגדירים אותו להיות f, ואת שאר הפולינום להיות g.

תרגיל מס' 5

תהי $g(z)$ אנליטית בתוך ועל הקונטור Γ (סגור-פשוט).
נתון כי הראשית נמצאת בפנים של Γ וכן, כי לכל $z\in\Gamma$ מתקיים: $|z|>|g(z)|$.

צ"ל: קיימת נקודת שבת <u>יחידה</u> ל- g בתוך Γ.

פתרון

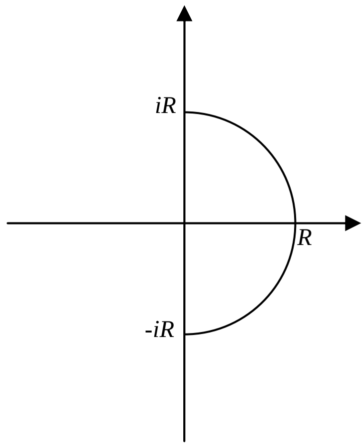
נתון כי g אנליטית בתוך ועל Γ. כעת, אם נסמן $f(z)=-z$, אז מהנתון $|g(z)|<|z|=|f(z)|$,
נסיק כי תנאי משפט רושה מתקיימים על Γ, ולכן ל-f ול-$f+g$ אותו מספר אפסים בתוך Γ.
אבל $f(z)=z$, ברור כי יש לה בדיוק אפס אחד בתוך Γ (כי הראשית נמצאת בפנים שלו).
ולכן נסיק כי ל-$f+g$ יש אפס אחד בתוך Γ. כלומר למשוואה: $f(z)+g(z)=g(z)-z=0$ יש פתרון יחיד, כלומר קיימת נקודה שבת יחידה ל-g בתוך Γ.

תרגיל מס' 6

צ"ל: למשוואה: $z=\lambda-e^{-z}$ $(\lambda>1)$, יש פתרון יחיד בחצי המישור הימני.

פתרון

נסמן: $f(z)=z-\lambda, g(z)=e^{-z}$.
כעת נסתכל על הקונטור Γ_R הבא:



עבור כל $R>\lambda+1$ מתקיים:

- על חצי המעגל:

$$\left|f(z)\right|=\left|z-\lambda\right|\ge\left|\left|z\right|-\lambda\right|=R-\lambda>1$$

$$\left|g(z)\right|=\left|e^{-z}\right|=e^{-x}\le 1 \qquad x\ge 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left|f(z)\right|>\left|g(z)\right|$$

- על הקטע $\left[-iR,iR\right]$:

$$\left|f(z)\right|=\left|z-\lambda\right|=\sqrt{\lambda^2+y^2}>1 \qquad x=0$$

$$\left|g(z)\right|=\left|e^{-z}\right|=e^{-x}=1$$

$$\Downarrow$$

$$\left|f(z)\right|>\left|g(z)\right|$$

כלומר קיבלנו כי על Γ_R מתקיים: $\left|f(z)\right|>\left|g(z)\right|$ (עבור $R>\lambda+1$), כמו כן ברור כי f,g אנליטית בתוך ועל Γ_R, ולכן עפ"י משפט רושה נסיק כי מספר האפסים של f ו-$f+g$ בתוך Γ_R הוא זהה.
אבל ברור כי ל-f יש בדיוק אפס פשוט אחד בתוך Γ_R (עבור $R>\lambda+1$) והוא: $z=\lambda$.
לכן גם ל-$f+g$ יש בדיוק אפס אחד בתוך Γ_R, כלומר למשוואה: $0=f(z)+g(z)=z-\lambda+e^{-z}$, יש פתרון יחיד ב- Γ_R, וזו בעצם המשוואה: $z=\lambda-e^{-z}$.
כלומר הראנו כי לכל R מספיק גדול, מספר הפתרונות של המשוואה בתוך חצי המעגל ברדיוס R הוא בדיוק 1. לכן נסיק סה"כ בחצי המישור הימני למשוואה יש בדיוק פתרון אחד.