תכונות של פונקציות מרוכבות

תזכורת

רציפות:

f רציפה ב- z_0 אמ"מ: $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

גזירות:

f גזירה ב- z_0 אמ"מ: $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ קיים (ואז הנגזרת שווה לגבול זה).

אנליטיות:

f אנליטית בנק' z_0 אם"ם קיימת סביבה של z_0 (קבוצה פתוחה כלשהי המכילה את z_0, למשל עיגול פתוח כלשהו סביב z_0) בה f גזירה.

תנאי קושי-רימן:

תהי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$.

נאמר ש-f מקיימת את תנאי קושי רימן אם:

$$u_x=v_y$$

$$u_y=-v_x$$

משפט:

- אם $f=u+iv$ גזירה בנק' $z_0=x_0+iy_0$, אז u,v מקיימות את תנאי קושי-רימן בנקודה (x_0,y_0).
- אם u,v דיפרנציאביליות ב-(x_0,y_0), ומקיימות שם את תנאי קושי-רימן, אז $f=u+iv$ גזירה ב- $z_0=x_0+iy_0$.

בנוסף, במקרים אלו מתקיים: $f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y$.

תרגיל מס' 1

בדקו האם הפונקציות הבאות רציפות\גזירות\אנליטיות בנק' $z=0$:

$$f(z)=\overline{z}$$

$$g(z)=|z|^2$$

$$h(z)=\overline{z}-4z^3$$

פתרון

- $f(z)=\overline{z}$

רציפות:

$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=x-iy$ כלומר - $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$, שתיהן פונקציות רציפות ולכן גם f רציפה (סכום של רציפות).

גזירות ב-0:
נבדוק בשתי דרכים –

דרך I – הגדרת הנגזרת:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}.$$

כעת, נסתכל על שני מקרים שונים:

1. שאיפה ל-0 דרך הציר הממשי: $\lim_{z=x+i\cdot 0\to 0}\frac{\overline{z}}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{\overline{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$
2. שאיפה ל-0 דרך הציר המרוכב: $\lim_{z=0+iy\to 0}\frac{\overline{z}}{z}=\lim_{y\to 0}\frac{\overline{iy}}{iy}=\lim_{y\to 0}\frac{-iy}{iy}=-1$.

ואם כן, קיבלנו שני ערכים אפשריים שונים לגבול הנ"ל, ולכן הוא לא קיים.
כלומר הפונק' אינה גזירה בנק' $z=0$.

דרך II - קושי-רימן:

$u_x(0,0)=1, v_y(0,0)=-1$ לכן תנאי קושי-רימן אינם מתקיימים ביחס ל-f ונסיק כי f אינה גזירה (שימו לב, אגב שהתנאי אינו מתקיים ללא קשר לנק' בה בחרנו).

לסיכום, קיבלנו כי f אינה גזירה ב-0 (למעשה בכל $\mathbb{C}$) ובהכרח גם אינה אנליטית.

- $g(z)=|z|^2$

רציפות:
$g(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2+y^2$ כלומר - $u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=0$,
שתיהן פונקציות רציפות ולכן נסיק כי גם g רציפה.

גזירות ב-0:
נבדוק תנאי קושי-רימן: $u_x=2x, u_y=2y, v_x=0, v_y=0$, ואם כן עבור $z=0$ מתקיים:
$u_x(0,0)=v_y(0,0)=u_y(0,0)=-v_x(0,0)=0$, ברור כי u,v הן דיפרנציאביליות ולכן נסיק כי g גזירה ב-0.

אנליטיות ב-0:
מהסתכלות שוב בנגזרות החלקיות, אפשר להסיק בקלות כי עבור $z\neq 0$ לפחות אחד מתנאי קושי-רימן לא מתקיים ולכן g אינה גזירה באף נקודה פרט ל-0. ועל כן g אינה אנליטית ב-0.

נבדוק את h:
רציפות:
h רציפה כסכום של שתי פונקציות (מרוכבות) רציפות.

גזירות ב-0:
אם נניח כי h גזירה ב-0 אז בהכרח גם הפונקציה: $\hat{h}(z)=h(z)+4z^3$ היא גזירה (סכום של פונקציות גזירות), אבל $\hat{h}(z)=\overline{z}$ והוכחנו קודם שפונקציה זו אינה גזירה ב-0.

$$\Downarrow$$

h אינה גזירה ב-0, וברור שגם אינה אנליטית ב-0.

תרגיל מס' 2

דיפרנציאביליות (של פונקציה מרוכבת):

$f(z)$ תקרא דיפרנציאבילית בנק' z_0 אם קיים $\alpha \in \mathbb{C}$, כך שבסביבת z_0 ניתן להציג את f כך: $f(z) = f(z_0) + \alpha \cdot (z - z_0) + \phi(z)$, כאשר $\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = 0$.

א. הוכיחו כי f דיפרנציאבילית ב- z_0 אם"ם f גזירה בנק' זו. הסיקו כי מתקיים $\alpha = f'(z_0)$.

ב. הוכיחו את הגרסא הבאה של כלל לופיטל:

יהיו $f(z), g(z)$ גזירות בנק' z_0 כך ש: $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$. אז מתקיים:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

פתרון

א. I. נניח כי f דיפרנציאבילית בנק' z_0.

עפ"י הגדרת הדיפרנציאביליות, נסיק כי: $f(z) = f(z_0) + \alpha \cdot (z - z_0) + \phi(z)$

כאשר מתקיים: $\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = 0$

ולכן נקבל:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\alpha(z - z_0) + \phi(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left(\alpha + \frac{\phi(z)}{z - z_0} \right) = \alpha$$

ונסיק אם כן, כי f גזירה ב- z_0, וכן: $f'(z_0) = \alpha$ - **מש"ל I**.

II. נניח כי f גזירה ב- z_0.

נגדיר את הפונקציה: $\phi(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$.

ונקבל:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) = f'(z_0) - f'(z_0) = 0$$

כמו כן, אם נעביר אגפים נקבל: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \phi(z)$, כלומר נקבל בדיוק כי f היא דיפרנציאבילית ב- z_0 - **מש"ל II**.

ב. נוכיח את הטענה:

f,g גזירות ולכן עפ"י סעיף א' נסיק כי:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\phi_1(z)$$
$$g(z)=g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)+\phi_2(z)$$

כאשר ϕ_1,ϕ_2 מקיימות: $\lim_{z\to z_0}\frac{\phi_1(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\phi_2(z)}{z-z_0}=0$.

ולכן נקבל:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\phi_1(z)}{g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)+\phi_2(z)}\underset{f(z_0)=g(z_0)=0}{=}\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z_0)+\frac{\phi_1(z)}{z-z_0}}{g'(z_0)+\frac{\phi_2(z)}{z-z_0}}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

תרגיל מס' 3

תהי f גזירה בתחום R כלשהו, ולכל $z\in R$ מתקיים: $|f(z)|=c$ (c קבוע ממשי כלשהו).

צ"ל: f קבועה ב-R.

פתרון

אם $c=0$, אז לכל $z\in R$ מתקיים: $|f(z)|=0$ $\Leftarrow$ לכל $z\in R$, $f(z)=0$, כלומר f קבועה.

אחרת, נתון כי $|f(z)|$ קבועה ב-R, לכן גם $g(z)=|f(z)|^2$ קבועה ב-R. כלומר:
$g(x+iy)=u^2+v^2=c^2$, ולכן הנגזרות החלקיות של $g(z)$ מתאפסות ב-R. כלומר מתקיים:

$$g_x=2u\cdot u_x+2v\cdot v_x=0$$
$$g_y=2u\cdot u_y+2v\cdot v_y=0$$
$$\Downarrow$$
$$u\cdot u_x+v\cdot v_x=0$$
$$u\cdot u_y+v\cdot v_y=0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

כעת, הוקטור $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ בהכרח אינו וקטור האפס, כיוון ש- $u^2+v^2=c^2\neq 0$. לכן נסיק כי למערכת ההומוגנית לעיל, קיים פתרון לא טריויאלי, ולכן:

$$\begin{vmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{vmatrix}=0$$

$$\Downarrow$$
$$u_x v_y - u_y v_x = 0$$

כעת, נתון כי f גזירה בתחום, לכן נשתמש במשפט קושי-רימן ונציב: $v_y = u_x, v_x = -u_y$
ונקבל: $u_x^2 + u_y^2 = 0 \Leftarrow u_x = u_y = 0 \Leftarrow v_x = v_y = 0$ (הגרירה האחרונה משתמשת בתנאי קושי-רימן).
כלומר קיבלנו כי כל הנגזרות החלקיות מתאפסות ולכן נסיק כי f קבועה ב-R – **מש"ל**.

תרגיל מס' 4

תהי $f(z)$ אנליטית ב-$\mathbb{C}$, ולכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים: $\left(\operatorname{Re} f(z)\right)^2 = \operatorname{Im} f(z)$.
צ"ל: f קבועה ב-$\mathbb{C}$.

פתרון

אם נסמן: $f(z+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, אז הנתון אומר בעצם ש-$u^2 = v$.
כעת, נתון גם כי f אנליטית, ולכן מתקיימים תנאי קושי-רימן, כלומר:

$$u_x = v_y \underset{v=u^2}{=} 2u\cdot u_y \underset{\text{קושי-רימן}}{=} -2u\cdot v_x \underset{v=u^2}{=} -2u\cdot 2u\cdot u_x = -4u^2\cdot u_x$$

ונקבל אם כן: $u_x = -4u^2 u_x \Leftarrow u_x\left(1+4u^2\right) = 0 \Leftarrow u_x = 0$ ($0 < 1+4u^2$ כיוון ש-u ממשית).
בדרך דומה, בעזרת קושי-רימן נגיע למסקנה כי גם $u_y = 0$, ולכן נסיק כי u קבועה.
כמו כן, מתנאי קושי-רימן נובע גם כי $v_x = v_y = 0$ ולכן גם v קבועה.

$$\Downarrow$$

f קבועה – **מש"ל**.

תרגיל מס' 5

נניח כי $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ אנליטית ב-$z=0$.
צ"ל: $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ אנליטית ב-$z=0$.

פתרון

$$g(x+iy) = \overline{f(x-iy)} = u(x,-y) - iv(x,-y).$$

ואם נסמן: $\hat{u}(x,y) = u(x,-y), \hat{v}(x,y) = -v(x,-y)$ אז נקבל: $g = \hat{u} + i\hat{v}$.
כעת, f אנליטית ב-0 ולכן u,v דיפרנציאביליות בסביבת 0, ומקיימות את תנאי קושי-רימן.
קודם כל, מכך ש-u,v דיפרנציאביליות נסיק כי גם $\hat{u},\hat{v}$ כאלו (הרכבות של פונקציות גזירות עם פונקציות דיפרנציאביליות).
כעת נבדוק האם מתקיימים תנאי קושי-רימן:

$$\hat{u}_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,-y)=u_x(x,-y)$$
$$\hat{u}_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}u(x,-y)=-u_y(x,-y)$$
$$\hat{v}_x(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}v(x,-y)=-v_x(x,-y)$$
$$\hat{v}_y(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}v(x,-y)=v_y(x,-y)$$

כעת, מכך ש-f אנליטית ב-0, נסיק כי קיים r קטן דיו, כך ש-f מקיימת את תנאי קושי-רימן בעיגול: $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<r\}$.

תהי $z=x+iy\in D$ כלשהי, אז בהכרח גם $\bar{z}=x-iy\in D$ (כי $|z|=|\bar{z}|$). ולכן גם ב- $\bar{z}$, f מקיימת את תנאי קושי-רימן (כלומר - $u_x(x,-y)=v_y(x,-y), u_y(x,-y)=-v_x(x,-y)$).
לכן מתקיים:

$$\hat{u}_x(x,y)=u_x(x,-y)=v_y(x,-y)=\hat{v}_y(x,y)$$
$$\hat{u}_y(x,y)=-u_y(x,-y)=v_x(x,-y)=-\hat{v}_x(x,y)$$

כלומר, קיבלנו כי g מקיימת אף היא את תנאי קושי-רימן ב-D, לכן נסיק כי g אנליטית ב-0 – **מש"ל**.

תרגיל מס' 6

תהי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, כאשר u,v גזירות ברציפות בתחום D.
נגדיר:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

א. צ"ל: f מקיימת את תנאי קושי-רימן ב-D אמ"מ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ ב-D, וכי במקרה זה מתקיים: $f'=\frac{\partial f}{\partial z}$.

ב. צ"ל: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}f=\frac{1}{4}\Delta f$ (בהנחה ש-u,v גזירות פעמיים ברציפות).

פתרון

א. נחשב את $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u+iv)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=\frac{1}{2}\left(u_x+iv_x+iu_y-v_y\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(u_x-v_y\right)+\frac{i}{2}\left(u_y+v_x\right)$$

ולכן נסיק: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \Leftrightarrow u_x=v_y, u_y=-v_x$

$\Downarrow$

משפט I - $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ אמ"מ f מקיימת קושי-רימן.

נחשב את $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(u+iv)=\frac{1}{2}\left(u_x+iv_x-iu_y+v_y\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_x+v_y\right)+\frac{i}{2}\left(-u_y+v_x\right)=\frac{1}{2}\left(u_x+u_x\right)+\frac{i}{2}\left(v_x+v_x\right)=u_x+iv_x=f'$$

קושי-רימן

$\Leftarrow$ **משפט II**.

ב. נחשב את $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}f$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)f=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}-i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+i\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)f=\frac{1}{4}\Delta f$$

תזכורת:

פונקציה הרמונית:

$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית אמ"מ $u_{xx}+u_{yy}=0$.

הרמונית צמודה:

$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ תקרא הרמונית צמודה ל-u אמ"מ v הרמונית, ומקיימת ביחד עם u את תנאי קושי-רימן.

משפט:

$f=u+iv$ אנליטית $\Leftrightarrow$ u,v הן פונקציות הרמונית צמודות.

תרגיל מס' 7

נתון: $u(x,y)$ הרמונית.

א. צ"ל: $f(x+iy)=\frac{\partial}{\partial z}u(x,y)=\frac{1}{2}u_x-\frac{i}{2}u_y$ אנליטית.

ב. צ"ל: u_x הרמונית. מצאו פונקציה הרמונית צמודה.

פתרון

א. u הרמונית ולכן גזירה פעמיים ברציפות, לכן u_x, u_y גזירות ברציפות, ולכן כדי להוכיח ש-f אנליטית מספיק להראות ש-$\frac{u_x}{2}, -\frac{u_y}{2}$ מקיימות את תנאי קושי-רימן.

לפי התרגיל הקודם, $\frac{u_x}{2}, -\frac{u_y}{2}$ מקיימות קושי-רימן אמ"מ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

אבל - $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} u$, ושוב לפי התרגיל הקודם נקבל: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta u = 0$.

u הרמונית

ונקבל כי $\frac{u_x}{2}, -\frac{u_y}{2}$ מקיימות קושי-רימן, ולכן f אנליטית – **מש"ל**.

ב. f אנליטית, לכן גם $g = 2f = u_x + iu_y$ אנליטית.

לכן, נסיק כי u_x הרמונית, ו-$-u_y$ היא הרמונית צמודה לה.

תרגיל מס' 8

1. האם קיימת פונקציה f אנליטית כך ש-$\operatorname{Re}(f) = x^2 y$?
2. מצאו פונקציה אנליטית f כך ש-$\operatorname{Re}(f) = x^3 - 3xy^2$.

פתרון

1. $u = x^2 y \Rightarrow u_x = 2xy, u_y = x^2 \Rightarrow u_{xx} = 2y, u_{yy} = 0$.

$$\Downarrow$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2y \neq 0$$

$$\Downarrow$$

לא קיימת f כזו.

2. נמצא את ההרמונית הצמודה של u (שנסמנה v):

$v_x = -u_y = 6xy$ (קושי-רימן).

$$\Downarrow$$

$$v(x,y) = \int v_x dx = \int 6xy dx = 3x^2 y + c(y)$$

$$\Downarrow$$

$v_y = 3x^2 + c'(y)$.

כמו כן: $v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2$ (קושי-רימן).

$$\Downarrow$$

$$3x^2 + c'(y) = 3x^2 - 3y^2$$

$$\Downarrow$$

$$c'(y) = -3y^2$$

$$\Downarrow$$

$$c(y) = -y^3 + c$$

$$\Downarrow$$

$$.\, v(x,y) = 3x^2y - y^3 + c$$

וקבלנו, אם כן את הפונקציה:

$$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3 + c\right) = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + c = (x+iy)^3 + c$$

כלומר את: $f(z) = z^3 + c$ שהיא, כידוע, אנליטית.