טורי לורן ונקודות סינגולריות

<u>**טור לורן:**</u>

באופן כללי – טור חזקות שמופיעות בו גם חזקות שליליות. כלומר, טור מהצורה: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$.

<u>**משפט:**</u>

תהי *f* אנליטית בטבעת $\{z \mid R_1 < |z-\alpha| < R_2\}$ (כאשר $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$).

נגדיר: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$, כאשר C הוא מעגל ברדיוס $R_1 < r < R_2$ סביב $z=\alpha$.

אז הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ מתכנס בטבעת, וסכומו הוא הפונקציה *f*.

כלומר לכל z בטבעת מתקיים: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$.

טור זה נקרא: **טור לורן של *f* סביב הנקודה α בטבעת $R_1 < |z-\alpha| < R_2$.**

אם $R_1 = 0$ אז הטור נקרא פשוט: **טור לורן של *f* סביב הנקודה α .**

<u>**הגדרות:**</u>

- החלק שמכיל את החזקות השליליות בטור לורן סביב α, כלומר - $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-\alpha)^n$, נקרא **"החלק הסינגולרי"** של הטור.
- המקדם של $(z-\alpha)^{-1}$ כלומר a_{-1}, בפיתוח לטור לורן סביב α, נקרא **"השארית של *f* בנקודה α"** וסימונו - $\text{Res}(f,\alpha)$.

  אם נזכור איך מוגדר a_{-1} אז נקבל כי: $\int_C f(z)dz = 2\pi i \,\text{Res}(f,\alpha)$.

Pierre Alphonse Laurent
(1813-1854)

(דווקא את לורן לא הצלחתי למצוא. אם אתם מוצאים איזה תמונה שלו תעשו טובה תשלחו לי...)

תרגיל מס' 1

מצא את טור לורן של הפונקציה $f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ סביב הנקודה $z=-2$, וחשב את השארית - $\text{Res}(f,-2)$.

פתרון

נעזר בטור טיילור של הפונקציה $\sin z$: $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$.

ונקבל: $\sin\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1}$.

לכן נקבל:

$$f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}=((z+2)-5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n}-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1}$$

כעת, $\text{Res}(f,-2)=a_{-1}$, ואם נסתכל על הפיתוח שקיבלנו, נקבל ישר ש-

$\text{Res}(f,-2)=\frac{-5\cdot(-1)^0}{(0+1)!}=-5$ (המקדם הראשון בטור הימני).

תרגיל מס' 2

פתח את $f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)}$ לטור לורן:

א. בטבעת: $D_1=\{z\mid 0<|z|<1\}$

ב. בטבעת: $D_2=\{z\mid 1<|z|<2\}$

פתרון

א. מפירוק לשברים פשוטים נקבל: $f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$.

כעת, בטבעת D_1 מתקיים: $|z|<1$ ולכן:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

(פיתוח ע"י שימוש בטור גיאומטרי מתכנס - $\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$, כאשר $|q|<1$).

כלומר קיבלנו: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$.

נשים לב, שזה בעצם טור טיילור (אין חזקות שליליות) וזה לא מפתיע, כי הפונקציה היא אנליטית בכל עיגול היחידה...

ב. בטבעת D_2 מתקיים: $|z|<2$ ולכן $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ ונקבל שוב כי: $\frac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$.

לעומת זאת - $|z|>1$ ולכן לא ניתן להשתמש בפיתוח שעשינו בסעיף א. במקרה זה מה שנעשה זה נרשום את $\frac{1}{1-z}$ בצורה קצת אחרת:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

כעת, $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ בטבעת D_2 ולכן ניתן להשתמש בנוסחא של טור גאומטרי ונקבל:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

נחבר הכל ביחד ונקבל:

$$f(z)=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=-\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)$$

תרגיל מס' 3

חשב את האינטגרל: $\int_C \frac{1}{\sin(z^2)}dz$, כאשר C הוא מעגל כלשהו ברדיוס $0<r<\sqrt{\pi}$, שמרכזו בראשית.

פתרון

$f)$ $\left\{z \mid 0<|z|<\sqrt{\pi}\right\}$ - ננסה למצוא את טור לורן של הפונקציה $f(z)=\dfrac{1}{\sin\left(z^2\right)}$ בעיגול הנקוב

אנליטית בטבעת זו).

כעת נזכר כי: $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$, ולכן:

$$\sin\left(z^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{4n+2}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{4n}$$

לכן, אם נסמן: $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}z^{4n}$, אז נקבל ש-$g$ היא פונקציה אנליטית בעיגול הלא-נקוב $\left\{z \mid |z|<\sqrt{\pi}\right\}$ (כי היא מוגדרת ע"י טור חזקות מתכנס), וכן לכל z בעיגול זה מתקיים: $g(z)\neq 0$.

לכן הפונקציה: $\dfrac{1}{g(z)}$ גם היא אנליטית בעיגול, וניתן לפתחה לטור טיילור סביב הראשית, כלומר:

$$\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n.$$

לכן נקבל כי בעיגול הנקוב מתקיים: $f(z)=\dfrac{1}{\sin\left(z^2\right)}=\dfrac{1}{z^2g(z)}=\dfrac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{n-2}$.

כעת, נשים לב כי: $f(z)\cdot\sin\left(z^2\right)=1$ ולכן מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{n-2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{4n+2}=1$$

כלומר: $\left(\dfrac{b_0}{z^2}+\dfrac{b_1}{z}+b_2+b_3z+\ldots\right)\cdot\left(z^2-\dfrac{z^6}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\ldots\right)=1$.

מהשוואת מקדמים נקבל:

$$\begin{aligned}b_0&=1\\ b_1&=0\\ b_2&=0\\ &\ldots\end{aligned}$$

כעת נשים לב כי קבלנו: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{n-2}$, ומיחידות טור לורן, נסיק כי זהו הטור לורן של הפונקציה f בעיגול הנקוב.

לכן נסיק כי $\operatorname{Res}(f,0)=b_1=0$ (המקדם של z^{-1}).

ולכן נקבל כי: $\int_C f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,0)=0$, כלומר: $\int_C\dfrac{1}{\sin\left(z^2\right)}dz=0$.

נקודת סינגולריות:

תהי f פונקציה אנליטית בעיגול נקוב - $\{z \mid 0<|z-\alpha|<r\}$, אם f אינה גזירה (או אינה מוגדרת) בנקודה α, אז α נקראת נקודת סינגולריות של f.

סוגי סינגולריות:

1. **סינגולריות סליקה** – ניתן להגדיר פונקציה חדשה $\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq\alpha \\ a & z=\alpha \end{cases}$ כך ש- $\tilde{f}$ אנליטית בעיגול $\{z \mid |z-\alpha|<r\}$. (כלומר, אפשר לתת ערך כלשהו בנקודת הסינגולריות ולקבל פונקציה אנליטית – כלומר "לסלק" את הסינגולריות, דומה לנקודת "אי-רציפות סליקה" מחדו"א).
2. **קוטב** – אם ניתן להציג את f בצורה: $f(z)=\frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$ כאשר g אנליטית, $g(\alpha)\neq 0$, אז α נקראת קוטב מסדר m של f. (קוטב מסדר 1 נקרא "קוטב פשוט").
3. **סינגולריות עיקרית** - נק' סינגולריות שאינה סליקה ואינה קוטב.

משפט:

אם α אפס מסדר m של הפונקציה האנליטית f, אז α היא קוטב מסדר m של הפונקציה $g=\frac{1}{f}$.

טבלה מסכמת:

סוג הסינגולריות	התנהגות של הפונקציה סביב α	טור לורן (סביב α)
סליקה	1. הגבול $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ קיים וסופי. 2. הפונקציה חסומה בסביבה של α. 3. מתקיים: $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)=0$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ - בעצם זהו טור טיילור.
קוטב מסדר m	1. $f(z)=\frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$, כאשר g אנליטית ושונה מאפס ב- α. 2. $\lim_{z\to\alpha} f(z)=\infty$ 3. הגבול $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^m f(z)$ קיים, סופי ושונה מאפס.	$\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ - חלק סינגולרי סופי.
עיקרית	1. לא קיים הגבול $\lim_{z\to\alpha} f(z)=\infty$ 2. לכל נקודה $w\in\mathbb{C}$ קיימת סדרת נקודות $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, כך ש- $z_n\to\alpha$ ומתקיים: $f(z_n)\to w$, בכל סביבה של α. כלומר, f מקבלת "כמעט" כל ערך מרוכב אפשרי בכל סביבה של הנק' α (זהו משפט קסוראטי ויירשטראס).	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ - חלק סינגולרי אינסופי.

תרגיל מס' 4

מצא וסווג נקודות סינגולריות עבור הפונקציות הבאות:

א. $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$

ב. $g(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

ג. $h(z)=(z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$

פתרון

א. נקודות הסינגולריות הן "הנקודות הבעייתיות" של הפונקציה – כלומר, הנקודות בהן המכנה מתאפס.
לכן נקודות הסינגולריות הן: $z=\pi k\,(k\in\mathbb{Z})$.

נסמן: $g(z)=z\sin z$.

אז: $g'(z)=\sin z+z\cos z$.

עבור $k\neq 0$ נקבל: $g'(\pi k)=0+\pi k\cdot(-1)^k\neq 0$ - כלומר הנקודות $z=\pi k\neq 0$ הן אפסים פשוטים של $g(z)$, לכן עפ"י המשפט שהראנו בתזכורת נסיק כי נקודות אלו הן קטבים פשוטים של f.

כמו כן: $g'(0)=0$.

$g''(z)=\cos z+\cos z-z\sin z=2\cos z-z\sin z$ ולכן: $g''(0)=2\neq 0$, כלומר 0 היא אפס מסדר שני של g ולכן קוטב מסדר שני של f.

ב. הנקודות הבעייתיות של הפונקציה הן: $z=0, z=\dfrac{1}{\pi k}\,(0\neq k\in\mathbb{Z})$.

עבור הנקודות $z=\dfrac{1}{\pi k}$, מתקיים:

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi k}}\left(z-\frac{1}{\pi k}\right)g(z)=\lim_{z\to\frac{1}{\pi k}}\frac{z-\frac{1}{\pi k}}{\sin\frac{1}{\pi k}}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{z\to\frac{1}{\pi k}}\frac{1}{\frac{1}{\pi k}\cos\frac{1}{\pi k}}=\pi k\cdot(-1)^k\neq 0$$

ולכן נסיק כי נקודות אלו הן קטבים פשוטים של g.

הנקודה $z=0$ היא נקודת הצטברות של נקודות סינגולריות - אין אף סביבה של 0 שבה g אנליטית, לכן זו לא נקודת סינגולריות. אנחנו לא מתעסקים בנקודות כאלה.

ג. במקרה זה נקודת הסינגולריות היחידה היא $z=-2$.
כעת, בשאלה מס' 1 פיתחנו את טור לורן של h סביב הנקודה $z=-2$ וקבלנו טור שמכיל אינסוף חזקות שליליות. לכן נסיק כי נקודה זו היא סינגולריות עיקרית של הפונקציה.

תרגיל מס' 5

יהיו f,g אנליטית בסביבת הנקודה הנקודה $z=a$ כך של-f יש אפס מסדר n ול-g יש אפס מסדר m בנקודה זו.
הוכיחו כי:

א. אם $n\geq m$ אז $h=\frac{f}{g}$ אנליטית ובעלת אפס מסדר $n-m$ בנקודה $z=a$.

ב. טם $n<m$, אז ל- $h=\frac{f}{g}$ יש קוטב מסדר $m-n$ בנקודה $z=a$.

פתרון

עפ"י הנתון, ניתן לרשום את f,g כך:

$$f(z)=(z-a)^n\tilde{f}(z)$$
$$g(z)=(z-a)^m\tilde{g}(z)$$

כאשר $\tilde{f}(a),\tilde{g}(a)\neq 0$ (לפי הגדרת האפסים).

ולכן: $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-a)^n}{(z-a)^m}\cdot\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}=(z-a)^{n-m}\cdot\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$.

כאשר, $\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ אנליטית ב- $z=a$ (מנה של אנליטיות כאשר המכנה אינו מתאפס).

ולכן:

א. אם $n\geq m$, אז נקבל: $h(z)=(z-a)^d\,\tilde{h}(z)$, כאשר $d=n-m\geq 0$, $\tilde{h}(z)=\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ - אנליטית ולא מתאפסת בנקודה $z=a$ ולכן נסיק כי $z=a$ היא אפס מסדר $n-m$ של h.

ב. אם $n<m$ נקבל: $h(z)=\frac{\tilde{h}(z)}{(z-a)^d}$, כאשר $d=m-n>0$, $\tilde{h}(z)=\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ אנליטית ולא מתאפסת בנקודה $z=a$ ולכן לפי הגדרת הקוטב נסיק כי $z=a$ היא קוטב מסדר $m-n$ של h.

תרגיל מס' 6

תהי f אנליטית בעיגול המנוקב: $\{z\mid 0<|z-a|<R\}$, כך ש- $f(z)\neq 0$ לכל z בעיגול המנוקב.

חשבו את השארית $\mathrm{Res}(g,a)$ כאשר: $g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$.

במקרים הבאים:

א. a הוא אפס מסדר m של f.
ב. a הוא קוטב מסדר m של f.

פתרון

א. a הוא אפס מסדר m של f ולכן: $f(z)=(z-a)^m\tilde{f}(z)$, כאשר $\tilde{f}$ אנליטית ושונה מאפס בעיגול (הלא-נקוב). לכן:

$$f'(z)=m(z-a)^{m-1}\tilde{f}(z)+(z-a)^m\tilde{f}'(z)$$

ונקבל:

$$g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=m(z-a)^{m-1}\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)}+(z-a)^m\frac{\tilde{f}'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}$$

אבל $\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}$ אנליטית בעיגול (הלא-נקוב) ולכן אינה תורמת לחלק הסינגולרי של g, כלומר נקבל:

$$\operatorname{Res}(g,a)=m$$

ב. a הוא קוטב מסדר m של f ולכן: $f(z)=\frac{\tilde{f}(z)}{(z-a)^m}$, כאשר g אנליטית ושונה מאפס ב-a.

לכן: $f'(z)=\frac{\tilde{f}'(z)(z-a)^m-m(z-a)^{m-1}\tilde{f}(z)}{(z-a)^{2m}}=\frac{\tilde{f}'(z)}{(z-a)^m}-\frac{m\tilde{f}(z)}{(z-a)^{m+1}}$.

ונקבל: $g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}-\frac{m}{z-a}$

$$\frac{\frac{\tilde{f}'(z)}{(z-a)^m}}{f(z)}=\frac{\frac{\tilde{f}'(z)}{(z-a)^m}}{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-a)^m}}=\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} \qquad \frac{\frac{m\tilde{f}(z)}{(z-a)^{m+1}}}{f(z)}=\frac{\frac{m\tilde{f}(z)}{(z-a)^{m+1}}}{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-a)^m}}=\frac{m}{z-a}$$

כאשר, גם כאן: $\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}$ אנליטית ולכן לא תורמת לחלק הסינגולרי של הפונקציה, ונסיק כי:

$$\operatorname{Res}(g,a)=-m.$$

תרגיל מס' 7

נתון: f שלמה ומקיימת - $|f(z)|\le|e^z-1|$ לכל z.

צ"ל: $f(z)=c(e^z-1)$ (c קבוע המקיים: $|c|\le1$).

פתרון

נגדיר את הפונקציה הבאה: $g(z)=\frac{f(z)}{e^z-1}$ בתחום- $\mathbb{C}\setminus\{2\pi ik \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

נשים לב כי בסביבה של כל נקודה $z=2\pi ik$ מתקיים: $\left|g(z)\right|=\frac{\left|f(z)\right|}{\left|e^z-1\right|}\le 1$, כלומר g חסומה בסביבת כל נקודת סינגולריות שלה.
ולכן נסיק כי כל נקודות הסינגולריות הן סליקות.
כלומר, ניתן להגדיר:

$$\tilde{g}(z)=\begin{cases} g(z) & z\neq 2\pi ik \\ w_k & z=2\pi ik \end{cases}$$

כך ש- $\tilde{g}$ שלמה, וכיוון שהיא רציפה ובסביבה של כל $z=2\pi ik$ היא חסומה ע"י 1, אז גם מתקיים גם: $\left|w_k\right|\le 1$.

כלומר, $\tilde{g}$ שלמה וחסומה ($\left|\tilde{g}(z)\right|\le 1$ לכל z) ולכן עפ"י משפט ליוביל נסיק כי $\tilde{g}$ קבועה.

כלומר $\tilde{g}(z)=c$, כאשר חייב להתקיים $\left|\tilde{g}(z)\right|=\left|c\right|\le 1$.

כעת עבור כל $z\neq 2\pi ik$ נקבל $\left|c\right|\le 1, c=\tilde{g}(z)=g(z)=\frac{f(z)}{e^z-1}$ כלומר: $f(z)=c\left(e^z-1\right)$.

עבור $z=2\pi ik$ נקבל עפ"י הנתון: $\left|f(2\pi i)\right|\le\left|e^{2\pi ik}-1\right|=0$, כלומר:

$f(2\pi ik)=0=c\left(e^{2\pi ik}-1\right)$, ולכן השויון מתקיים לכל z – **מש"ל.**