העתקות מביוס

תזכורת:

המישור המרוכב המורחב:

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, כלומר מוסיפים למישור המרוכב את נק' האינסוף.

העתקות מביוס:

העתקת מביוס $w : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, היא העתקה מהצורה: $w = \frac{az+b}{cz+d}$, כאשר $ad - bc \neq 0$ (אחרת, הפונק' קבועה).

כמו כן - $w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, w(\infty) = \frac{a}{c}$.

העתקות מביוס בסיסיות:

הזזה: $z \to z + b$

סיבוב ומתיחה\כיווץ: $z \to az$ ($1 < |a|$ - מתיחה, $|a| < 1$ - כיווץ).

אינברסיה: $z \to \frac{1}{z}$.

כל העתקת מביוס היא הרכבה של מספר העתקות בסיסיות.

תכונות של העתקת מביוס:

- חח"ע
- קונפורמית
- ההעתקה ההפוכה היא: $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$
- מעתיקה מעגלים מוכללים על מעגלים מוכללים

כללי אצבע:

- מעגל שאינו עובר דרך $-\frac{d}{c}$ מועתק על מעגל שאינו עובר דרך $\frac{a}{c}$.
- מעגל שעובר דרך $-\frac{d}{c}$ מועתק על ישר שאינו עובר דרך $\frac{a}{c}$.
- קו ישר שאינו עובר דרך $-\frac{d}{c}$ מועתק על מעגל העובר דרך $\frac{a}{c}$.
- קו ישר שעובר דרך $-\frac{d}{c}$ מועתק על ישר העובר דרך $\frac{a}{c}$.

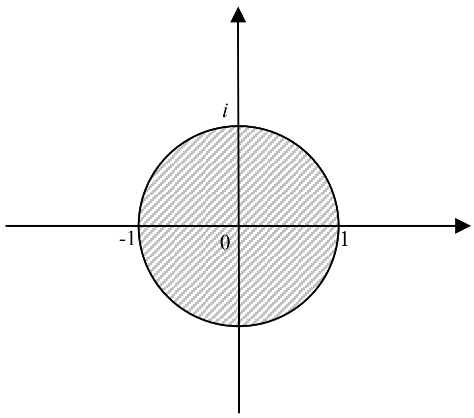
תרגיל מס' 1

א. מצא את התמונה של עיגול היחידה $D=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\right\}$ תחת ההעתקה: $w=\frac{1-z}{1+z}$.

ב. מהי התמונה של חצי העיגול: $H=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1,0<\operatorname{Im}(z)\right\}$ תחת העתקה זו?

פתרון

א. נצייר את התחום:



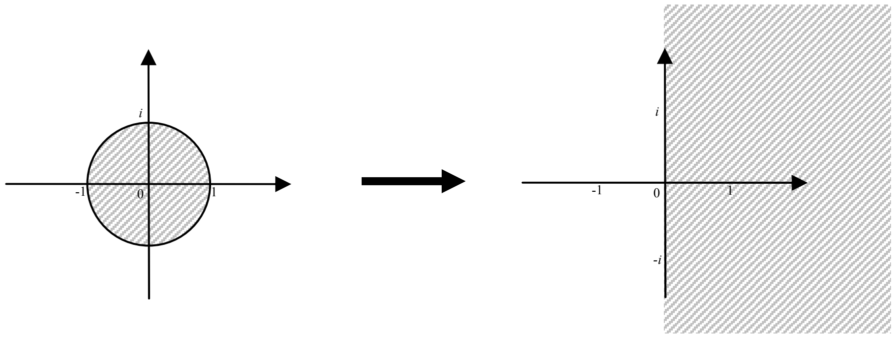
ראשית, נמצא את התמונה של שפת התחום, כלומר של מעגל היחידה.
כיוון שהעתקת מביוס מעתיקה מעגל על מעגל, מספיק להציב 3 נקודות בשביל למצוא את תמונת מעגל היחידה.
נציב $z=1,z=i,z=-1$ בהעתקה ונקבל:

$$w(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$$

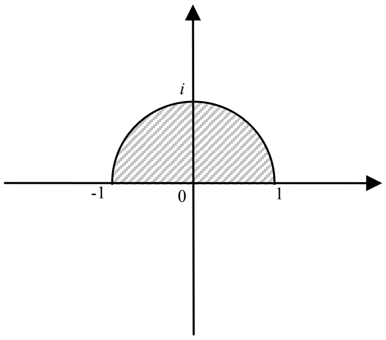
$$w(i)=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{2}=-i.$$

$$w(-1)=\frac{-1-1}{-1+1}=\infty$$

כעת, כיוון שהתמונה היא מעגל מוכלל העובר דרך הנק' $0,-i,\infty$, נסיק כי תמונת מעגל היחידה היא הציר המדומה.
כלומר קיבלנו ששפת התמונה היא הציר המדומה. ולכן קיימות 2 אפשרויות: או שהתמונה היא החצי הימני של המישור המרוכב, או שהיא חציו השמאלי.
על מנת למצוא את החצי הנכון, נבחר נקודה הנמצאת בתוך התחום (עיגול היחידה), נציב בהעתקה ונראה לאיזה מהחצאים היא עוברת.
נבחר $z=0$, ונקבל: $w(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$. הנק' $z=1$ היא כמובן בחצי המישור הימני ולכן נסיק לסיום, כי תמונת עיגול היחידה היא חצי המישור הימני, כלומר - $\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,\operatorname{Re}(z)>0\right\}$:



ב. נצייר את התחום:



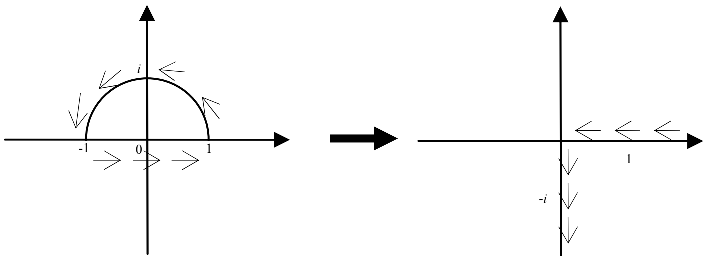
נמצא את תמונת הציר הממשי תחת ההעתקה, שוב לפי 3 נקודות: $z=-1, z=0, z=1$ -

$$w(1)=0$$

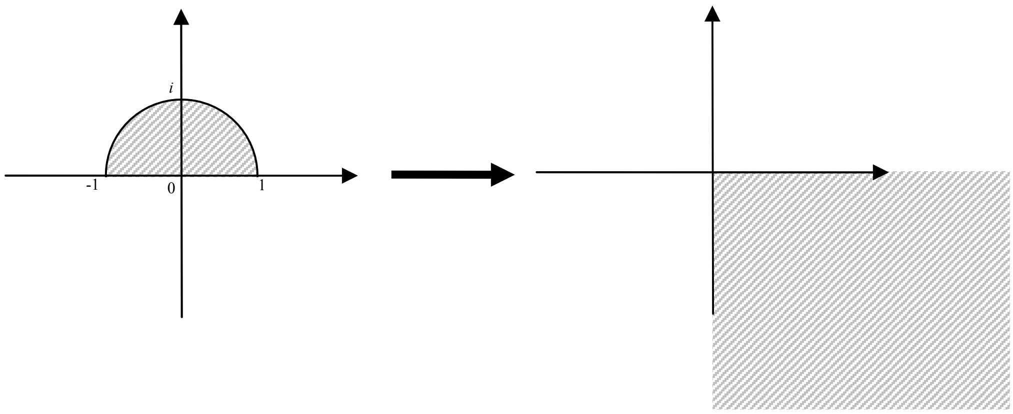
$$w(0)=1$$

$$w(-1)=\infty$$

ולכן נסיק כי ההעתקה מעתיקה את הציר הממשי על עצמו.
בשביל למצוא את שפת התמונה נזכיר כי העתקת מביוס שומרת על הכיוון, ולכן:



כעת כיוון שהצגנו את שפת התחום בכיוון החיובי ביחס לתחום (כך שהתחום נמצא משמאל לשפה), וההעתקה היא קונפורמית, גם שפת התמונה צריכה להיות בכיוון החיובי ביחס לתמונה, כך שהתמונה צריכה להיות משמאל לשפה ולכן נקבל כי התמונה היא הרביע הימני התחתון של המישור, כלומר - $\left\{z\in\mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2}<Arg(z)<0\right\}$:



תרגיל מס' 2

מצא את העתקת מביוס הכללית ביותר המעתיקה את מעגל היחידה על עצמו, ומשאירה את הראשית במקום.

פתרון

נסמן: $w(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

כעת, אם $w(0)=0$, אז בהכרח מתקיים: $b=0$. כלומר: $w=\dfrac{az}{cz+d}$.

כמו כן, אנו דורשים כי מעגל היחידה יועתק על עצמו. הנקודות $z=1, z=-1$ נמצאות על מעגל היחידה, ולכן גם תמונותיהן על מעגל היחידה, כלומר: $|w(1)|=|w(-1)|=1$. ואם נציב את הערכים בהעתקה נקבל: $\left|\dfrac{a}{c+d}\right|=\left|\dfrac{-a}{-c+d}\right|$. מכאן נסיק כי: $|c+d|=|c-d|$,

ולכן גם: $(c+d)(\overline{c}+\overline{d})=(c-d)(\overline{c}-\overline{d})$.

$$\Downarrow$$

$$c\overline{c}+c\overline{d}+\overline{c}d+d\overline{d}=c\overline{c}-c\overline{d}-\overline{c}d+d\overline{d}$$

$$\Downarrow$$

$$2c\overline{d}+2\overline{c}d=0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{I.}\quad c\overline{d}+\overline{c}d=0$$

גם הנקודות $z=i, z=-i$ נמצאות על מעגל היחידה, ולכן מתקיים: $|w(i)|=|w(-i)|=1$.

נציב ונקבל: $\left|\dfrac{ai}{ci+d}\right|=\left|\dfrac{-ai}{-ci+d}\right|$.

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{a}{ci+d}\right|=\left|\frac{a}{-ci+d}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$|ci+d|=|ci-d|$$

$$\Downarrow$$
$$\left(ci+d\right)\left(\overline{ci}+\overline{d}\right)=\left(ci-d\right)\left(\overline{ci}-\overline{d}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$ci\cdot\overline{ci}+ci\cdot\overline{d}+\overline{ci}\cdot d+d\overline{d}=ci\cdot\overline{ci}-ci\cdot\overline{d}-\overline{ci}\cdot d+d\overline{d}$$
$$\Downarrow$$
$$2ci\cdot\overline{d}+2\overline{ci}\cdot d=0$$
$$\Downarrow$$
$$ci\cdot\overline{d}-i\overline{c}d=0$$
$$\Downarrow$$
$$c\overline{d}-\overline{c}d=0\ \ .\text{II}$$

אם נחבר את I ו-II נקבל: $2c\overline{d}=0$, כלומר - $c\overline{d}=0$, ולכן בהכרח $c=0$ או $\overline{d}=0$.
אם $\overline{d}=0$ אז גם $d=0$ ואז נקבל: $ad-bc=a\cdot 0-0\cdot c=0$ וזה לא ייתכן (עפ"י הגדרת העתקת מביוס).
לכן נסיק כי בהכרח מתקיים: $c=0$.

כלומר קיבלנו כי ההעקתה w היא מהצורה: $w=\frac{az}{d}=\frac{a}{d}z$, ואם נסמן: $\beta=\frac{a}{d}$ אז נקבל:
$w=\beta z$.

כיוון שמעגל היחידה מועתק על עצמו, חייב להתקיים: $|\beta|=1$ (אחרת זאת תהיה מתיחה).

כלומר קיבלנו כי כל העתקת מביוס שמעתיקה את עיגול היחידה על עצמו ומשאירה את הראשית במקומה, היא מהצורה: $w=\beta z,|\beta|=1$.
כמו כן, כל העתקה מהצורה $w=\beta z,|\beta|=1$, מעתיקה את מעגל היחידה על עצמו, שכן, אם $|z|=1$, אז $|w(z)|=|\beta z|=|\beta||z|=1\cdot 1=1$. וכן $w(0)=0$ ולכן מקיימת את הדרוש.

לכן, הצורה הכללית ביותר להעתקת מביוס המבוקשת היא: $w=\beta z,|\beta|=1$.

תזכורת:

נוסחת היחס הכפול:
בהינתן 3 נקודות z_1, z_2, z_3 שונות זו מזו, ו-3 נקודות w_1, w_2, w_3 שונות זו מזו, קיימת העתקת מביוס יחידה המקיימת: $w(z_1)=w_1, w(z_2)=w_2, w(z_3)=w_3$ והיא נקבעת ע"י הנוסחא:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

תרגיל מס' 2

א. מצא העתקת מביוס המעתיקה את מעגל היחידה על הציר הממשי, כך שהנק' $1, i, -1$ מועתקות לנק' $-1, 0, 1$ בהתאמה.

ב. מהי תמונת עיגול היחידה תחת העתקה זו?

פתרון

א. נסמן: $z_1=1, z_2=i, z_3=-i$ וכן - $w_1=-1, w_2=0, w_3=1$.
עפ"י נוסחת היחס הכפול, ניתן למצוא העתקת מביוס יחידה המקיימת את הדרישה הנ"ל –

$$\frac{w-(-1)}{w-1}\cdot\frac{0-1}{0-(-1)}=\frac{z-1}{z-(-1)}\cdot\frac{i-(-1)}{i-1}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{w+1}{w-1}=\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1}=\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{(i+1)^2}{(i-1)(i+1)}=\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{2i}{-2}=-i\frac{z-1}{z+1}$$

$$\Downarrow$$

$$(w+1)(z+1)=i(z-1)(w-1)$$

$$\Downarrow$$

$$wz+w+z+1=i(zw-z-w+1)=izw-iz-iw+i$$

$$\Downarrow$$

$$wz+w-izw+iw=-iz+i-z-1$$

$$\Downarrow$$

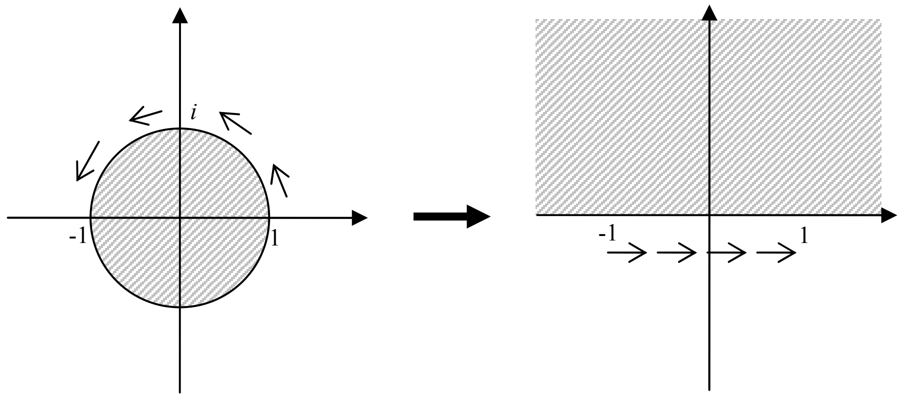
$$w(z+1-iz+i)=z(-i-1)+(i-1)$$

$$\Downarrow$$

$$w=\frac{-(i+1)z+(i-1)}{(1-i)z+(1+i)}=\frac{-(i+1)(i-1)z+(i-1)^2}{(1-i)(i-1)z+(1+i)(i-1)}=\frac{2z-2i}{2iz-2}=\frac{z-i}{iz-1}$$

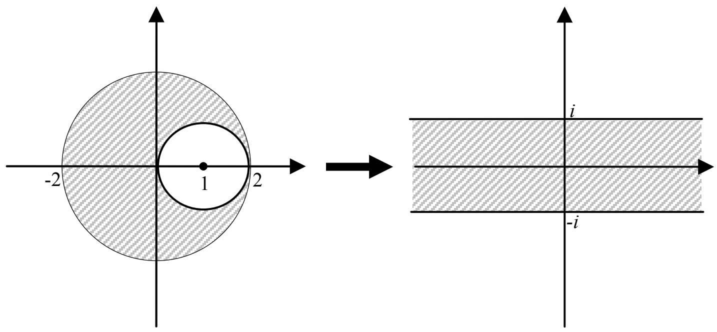
ב. דרך I: הנק' $z=0$ נמצאת בתוך עיגול היחידה, $w(0)=\frac{0-i}{0-1}=i$, כלומר התמונה שלה היא בחצי המישור העליון, ולכן תמונת העיגול הינה חצי המישור העליון.

דרך II: אם נסתכל על המסלול $z_1 \to z_2 \to z_3$, אז העיגול נמצא משמאל למסלול, לכן תמונת העיגול צריכה להמצא משמאל לתמונת המסלול, כלומר משמאל ל- $w_1 \to w_2 \to w_3$, ולכן התמונה הינה חצי המישור העליון.



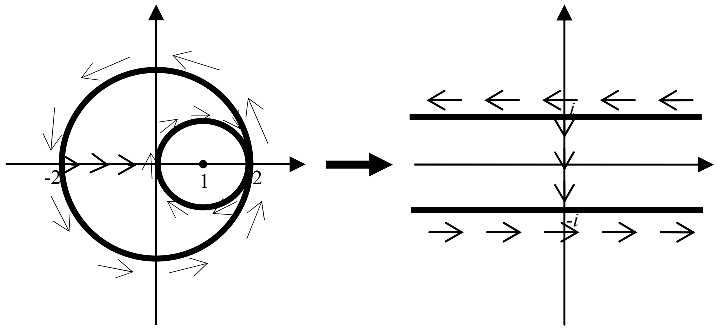
תרגיל מס' 3

מצא העתקת מביוס המעתיקה את התחום $D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2, 1 < |z-1| \right\}$ על הרצועה $D_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) < 1| \right\}$.



פתרון

נצייר את ההעתקה המבוקשת:



נרצה למצוא 3 נק' ואת תמונותיהן תחת ההעתקה כדי להשתמש בנוסחת היחס הכפול.
שני המעגלים בציור, מהווים את שפת התחום D_1, והם מועתקים על שני הישרים שמהווים את השפה של D_2.
הנק' המשותפת לשתי המעגלים היא $z=2$. הנקודה היחידה המשותפת לשני הישרים היא $z=\infty$, לכן נבחר: $z_1=2, w_1=\infty$.
בנוסף, נבחר: $z_2=-2, w_2=i$ וכן: $z_3=0, w_3=-i$.
בדרך זו נקבל כי הציר הממשי מועתק על הציר המדומה.
כעת, כיוון שהנק' 2- נמצאת על המעגל $\left\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<2\right\}$, נסיק כי תמונת המעגל היא קו ישר העובר דרך i. משיקולי שמירת זוויות בין המעגל לקטע $[-2,0]$ ובין הישר העליון בציור לתמונת הקטע, נסיק כי תמונת המעגל $\left\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<2\right\}$ היא הישר העליון בציור.
מאותם שיקולים, נסיק גם כי תמונת המעגל $\left\{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|<1\right\}$ היא הישר התחתון שבציור.
כלומר, ע"י בחירת הנק' הנ"ל נקבל את ההעתקה הרצויה.
נציב כעת בנוסחת היחס הכפול ונקבל:

$$\frac{w-\infty}{w-(-i)}\cdot\frac{i-(-i)}{i-\infty}=\frac{z-2}{z-0}\cdot\frac{-2-0}{-2-2}$$

$$\Downarrow$$

מצמצמים את האגפים בהם מופיע ∞.

$$\frac{2i}{w+i}=\frac{z-2}{2z}$$

$$\Downarrow$$

$$4iz=(z-2)(w+i)=w(z-2)+i(z-2)$$

$$\Downarrow$$

$$3iz+2i=w(z-2)$$

$$\Downarrow$$

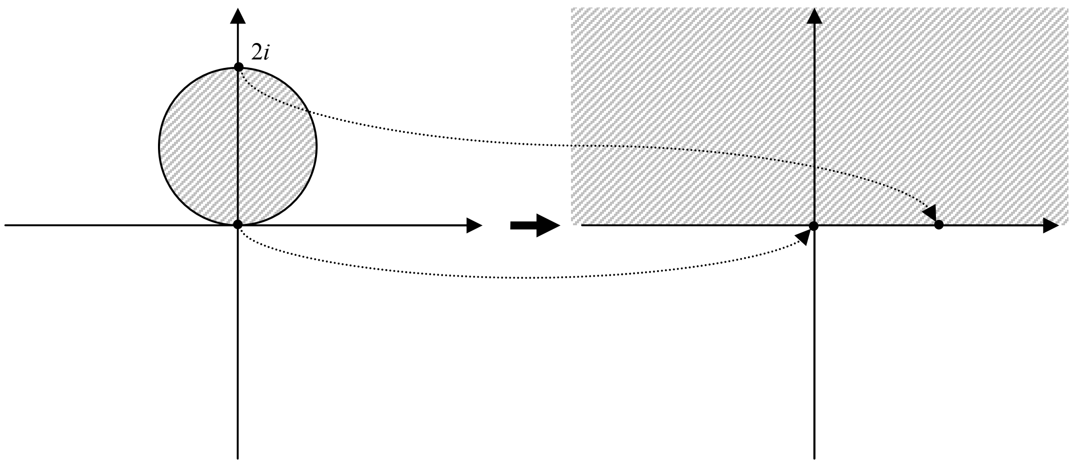
$w=\dfrac{i(3z+2)}{z-2}$ - ההעתקה המבוקשת.

תרגיל מס' 4:

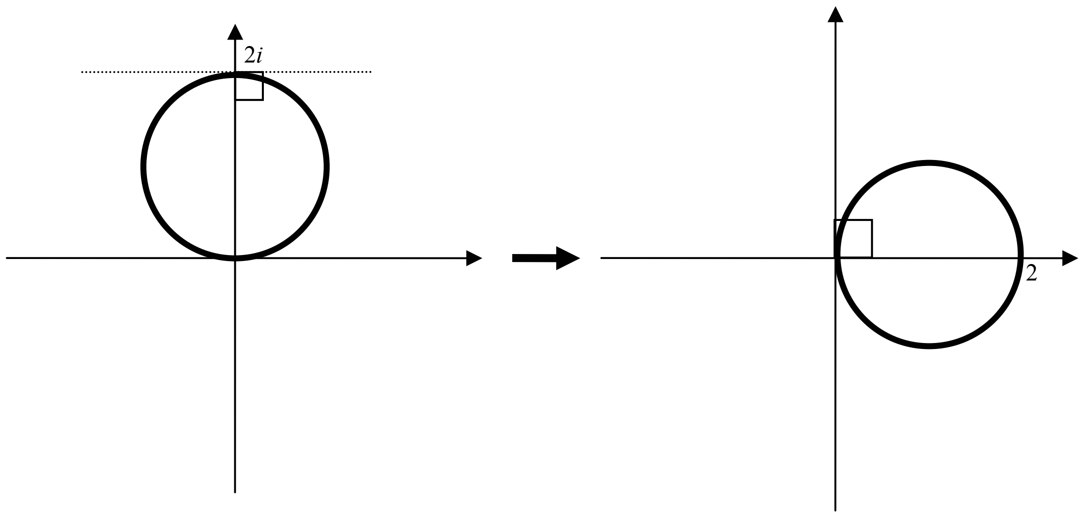
נתון כי ההעתקה w מעתיקה את העיגול $D_1=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-i|<1\right\}$ על חצי המישור העליון, כך שמתקיים: $w(0)=0, w(2i)=2$.
מהי התמונה של הציר המדומה תחת העתקה זו?

פתרון

נצייר את הנתונים:



כיוון ששפת התחום מועתקת לשפת התמונה, נסיק כי תמונת המעגל $C_1=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-i|=1\right\}$ היא הציר הממשי.
כעת, הציר המדומה אורתוגונלי למעגל C_1, וכיוון שהעתקת מביוס היא קונפורמית ומעבירה מעגל מוכלל למעגל מוכלל, נסיק כי תמונת הציר המדומה היא מעגל אורתוגונלי לציר המדומה.
כמו כן, הנק' $0,2i$ נמצאות על הציר המדומה, ותמונותיהן הן $0,2$ בהתאמה.
לכן, נסיק כי תמונת הציר המדומה היא מעגל מוכלל, אורתוגנלי לציר הממשי ועובר דרך הנק' $0,2$. יש רק מעגל אחד כזה והוא: $\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-1|=1\right\}$.


2i
2