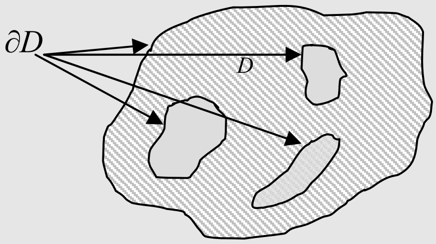
חישוב אינטגרלים בעזרת משפט קושי ונוסחת קושי

תזכורת:

משפט קושי (קושי-גורסה):

יהי D תחום ששפתו חלקה למקוטעין, כך ש- D^c (המשלים) מורכב ממספר סופי של רכיבי קשירות (כלומר ל-D יש מספר סופי של "חורים"), ותהי f אנליטית ב-D, אז:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$



נוסחת קושי:

יהי D תחום פשוט קשר, ששפתו ∂D חלקה למקוטעין, ותהי $f(z)$ אנליטית ב-$\bar{D}$.

אז לכל נקודה פנימית $z_0 \in D$ מתקיים: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$.

נוסחת קושי המוכללת:

יהי D תחום פשוט קשר, ששפתו ∂D חלקה למקוטעין, ותהי $f(z)$ אנליטית ב-$\bar{D}$.

אז לכל נקודה פנימית $z_0 \in D$ מתקיים: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

מסקנה מנוסחת קושי המוכללת:

אם f אנליטית בתחום D, אז f' גם היא אנליטית ב-D - כלומר f גזירה אינסוף פעמים.

מוקדש לזכרם של:

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Edouard Jean-Baptiste Goursat (1858-1936)

תרגיל מס' 1

חשבו: $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z-1}{(9+z^2)(z+i)}dz$.

פתרון

נסמן: $f(z)=\dfrac{z-1}{(9+z^2)}$.

ברור כי f אנליטית בתוך ועל המעגל $\{|z|=2\}$, והנק' $z=i$ נמצאת בתוך המעגל, ולכן עפ"י נוסחת קושי: $\displaystyle f(-i)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{f(z)}{z+i}dz$, ולכן:

$$\int_{|z|=2}\frac{z-1}{(9+z^2)(z+i)}dz=2\pi i\cdot f(-i)=2\pi i\cdot\frac{-i-1}{(9+i^2)}=2\pi i\cdot\frac{-(1+i)}{8}=\frac{\pi}{4}(1-i)$$

תרגיל מס' 2

חשבו: $\displaystyle\int_{|z-1|=3}\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$

פתרון

הפונק' $f(z)=\cos z$ היא אנליטית בכל המישור, ולכן עפ"י נוסחת קושי המוכללת נקבל: $\displaystyle f''(i)=\frac{2!}{2\pi i}\cdot\int_{|z-1|=3}\frac{f(z)}{(z-i)^3}dz$, ולכן:

$$\int_{|z-1|=3}\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz=\pi i\cdot f''(i)=-\pi i\cdot\cos(i)=-\pi i\cdot\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=-\frac{\pi}{2}i\left(e+e^{-1}\right)$$

תרגיל מס' 3

חשבו את: $\displaystyle\int_C\frac{dz}{1+z^2}$, כאשר:

א. $C=\left\{z \mid |z-i|=\frac{1}{2}\right\}$

ב. $C=\left\{z \mid |z|=2\right\}$

פתרון

א. נשים לב, כי $\dfrac{1}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{1}{1+z^2}$, ולכן המכנה של האינטגרנד מתאפס בנקודות: $z=\pm i$.

מבין הנקודות האלו, רק $z=i$ נמצאת בתוך C.

כעת, אם נגדיר: $g(z)=\frac{1}{z+i}$, אז נקבל: $\int_C \frac{g(z)}{z-i}dz = \int_C \frac{dz}{1+z^2}$.

כמו כן, ברור כי g אנליטית בתוך ועל C, ולכן עפ"י נוסחת קושי מתקיים:

$$g(i)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{z-i}dz$$

$$\Downarrow$$

$$\int_C \frac{g(z)}{z-i}dz = 2\pi i\cdot g(i) = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi$$

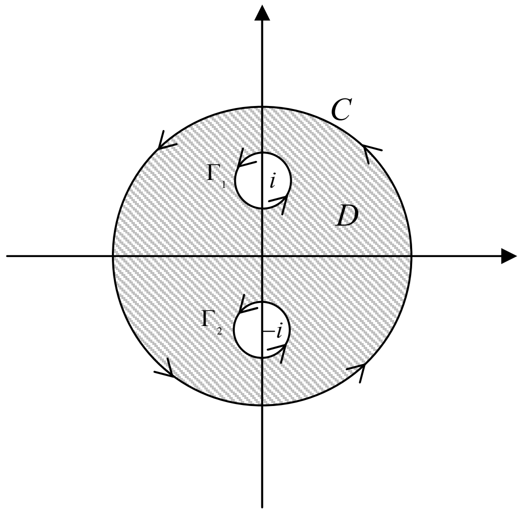
$$\Downarrow$$

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2}=\pi$$

ב. כעת, שתי הנקודות $z=i, z=-i$ נמצאות בפנים של המסלול C, ולכן אי אפשר להשתמש ישירות בנוסחת קושי.

נציג שתי דרכים לפתרון:

<u>דרך I</u>: נבנה שני מסלולים חדשים, בתוך C:



כלומר, Γ_1 הוא מעגל ברדיוס קטן מ-1 סביב הנק' $z=i$, ו- Γ_2 הוא מעגל ברדיוס קטן מ-1 סביב הנק' $z=-i$. כך שאין חיתוך בין אף זוג מבין שלושת המעגלים.

הפונק' $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ היא אנליטית בתחום שכלוא בין 3 המעגלים, ולכן עפ"י משפט קושי-גורסה נסיק כי: $\int_{\partial D} f(z)dz=0$.

אבל: $\partial D = C-\Gamma_1-\Gamma_2$.

ולכן נקבל: $\int_C \frac{1}{1+z^2}dz - \int_{\Gamma_1}\frac{1}{1+z^2}dz - \int_{\Gamma_2}\frac{1}{1+z^2}dz = 0$

$$\Downarrow$$

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2}$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים באגף ימין בנפרד.

ברור כי הפונק' $g(z) = \frac{1}{z+i}$ שהגדרנו בסעיף א' אנליטית בתוך Γ_1, ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל כמו בסעיף א': $\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{g(z)}{z-i} = 2\pi i \cdot g(i) = \pi$.

כמו כן, הפונק' $h(z) = \frac{1}{z-i}$ אנליטית בתוך Γ_2, ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל:

$\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_2} \frac{h(z)}{z+i} = 2\pi i \cdot h(-i) = -\pi$.

ולסיכום, נקבל: $\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \pi + (-\pi) = 0$.

<u>דרך II</u>: נשים לב כי: $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$, ולכן:

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \int_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz = \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z+i}$$

כעת, כל אחד מהאינגטרלים באגף ימין ניתן לחישוב פשוט עפ"י נוסחת קושי:

נסמן $g(z) = 1$, אז ברור כי g אנליטית בתוך C, ולכן:

$$g(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z-i} dz \Rightarrow \int_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$$

$$g(-i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z+i} dz \Rightarrow \int_C \frac{dz}{z+i} = 2\pi i$$

ונקבל: $\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i - \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i = 0$.

תרגיל מס' 4

חשבו: $I = \int_{|z|=1} \frac{z+\bar{z}}{(z-z_0)^2} dz$, עבור $|z_0| \neq 1$.

פתרון

ראשית, נשים לב כי המונה באינטגרנד אינו אנליטי, לכן ננסה להביא את האינטגרנד לצורה יותר נוחה -

$$\frac{z+\bar{z}}{(z-z_0)^2} = \frac{z(z+\bar{z})}{z(z-z_0)^2} = \frac{z^2+|z|^2}{z(z-z_0)^2} = \frac{z^2+1}{z(z-z_o)^2}$$

האינטגרל מחושב על המעגל $|z| = 1$

כלומר, קיבלנו כי: $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z\left(z-z_0\right)^2}dz$.

כעת, נחלק לשלושה מקרים:

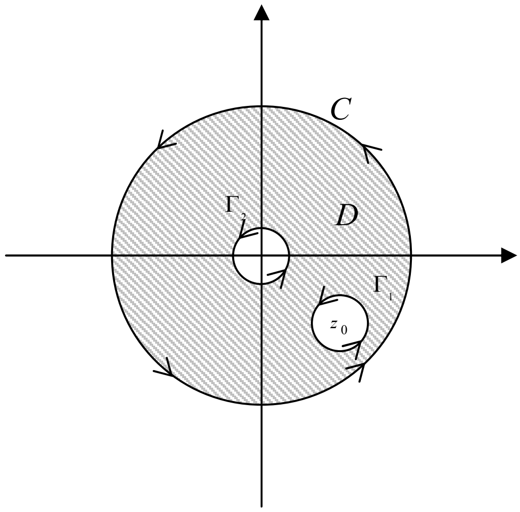
I. $\left|z_0\right|>1$:

$z=0$ זוהי הנק' היחידה הבעייתית באינטגרנד, ולכן, אם נסמן: $g\left(z\right)=\frac{z^2+1}{\left(z-z_0\right)^2}$, אז נקבל לפי נוסחת קושי: $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{g\left(z\right)}{z}dz=2\pi i\cdot g\left(0\right)=\frac{2\pi i}{z_0^2}$.

II. $\left|z_0\right|<1, z_0\neq 0$:

הנק' z_0 נמצאת בתוך המעגל. ולכן המכנה של האינטגרנד מתאפס בשתי נקודות בתוך המעגל, $z=0,z_0$.

כעת, ניצור שני מעגלים, אחד סביב $z=0$ והשני סביב z_0 -



וכמו בשאלה הקודמת, עפ"י משפט קושי-גורסה נקבל:

$$I=\int\limits_{|z=1|}\frac{z^2+1}{z\left(z-z_0\right)^2}dz=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{g\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^2}dz+\int\limits_{\Gamma_2}\frac{h\left(z\right)}{z}dz$$

כאשר: $g\left(z\right)=\frac{z^2+1}{z}=z+\frac{1}{z},h\left(z\right)=\frac{z^2+1}{\left(z-z_0\right)^2}$.

ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל:

$$I=2\pi i\cdot g'\left(z_0\right)+2\pi i\cdot h\left(0\right)=2\pi i\cdot\left[1-\frac{1}{z^2}\right]_{z=z_0}+2\pi i\cdot\frac{1}{\left(-z_0\right)^2}=2\pi i\left(1-\frac{1}{z_0^2}+\frac{1}{z_0^2}\right)=2\pi i$$

III. $z_0=0$:

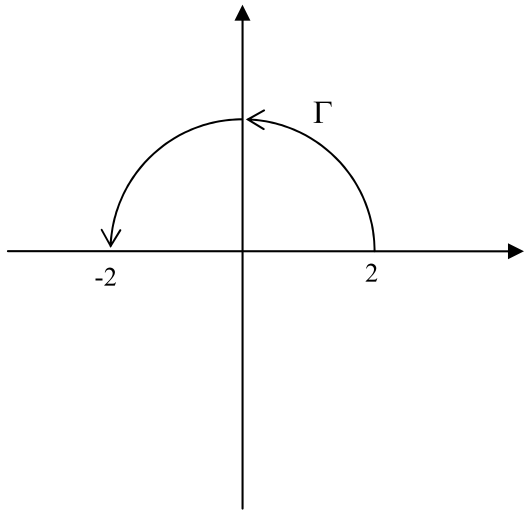
במקרה זה נקבל: $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3}dz$.

ולכן, אם נסמן: $g(z)=z^2+1$, אז עפ"י נוסחת קושי המוכללת נקבל:

$$I=\frac{2\pi i}{2!}g''(0)=\pi i\cdot[2]_{z=0}=2\pi i$$

תרגיל מס' 5

נסמן: $I=\int\limits_{\Gamma}\frac{2z}{z^2+1}dz$, כאשר $\Gamma=\{z\,|\,|z|=2,\operatorname{Im}z\geq 0\}$ (בכיוון החיובי) –



א. האם לאינטגרנד - $f(z)=\frac{2z}{z^2+1}$ יש פונק' קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ?

ב. חשבו את I.

פתרון

א. <u>**התשובה הלא-נכונה:**</u>

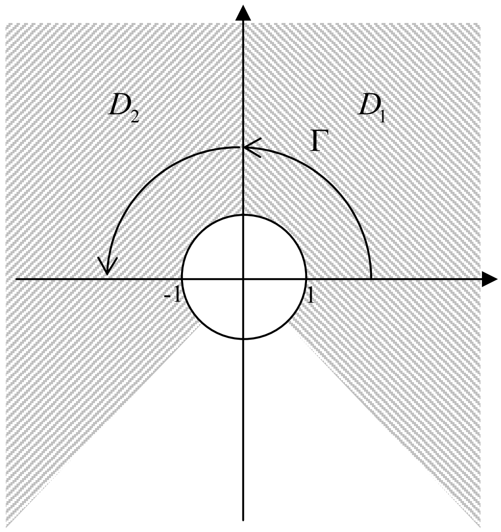
נשים לב כי $f(z)$ הוא מהצורה $\frac{g'(z)}{g(z)}$, כלומר נגזרת של ענף כלשהו של הלוגריתם. ולכן אם קיימת פונק' קדומה ל-f אז היא בהכרח ענף כלשהו של $\log(z^2+1)$.

אבל הפונק' z^2+1 מעתיקה את Γ על המעגל: $\{|z-1|=4\}$ (תחשבו למה...). מעגל זה מקיף את הראשית, ולכן אין אף ענף אנליטי של *log* שמוגדר בתחום פשוט קשר כלשהו שמכיל את $\{|z-1|=4\}$, ובהתאם, לא קיים ענף אנליטי של $\log(z^2+1)$ בתחום פשוט קשר שמכיל את Γ .

ולכן לא קיימת ל-f פונק' קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ .

<u>**התשובה הנכונה:**</u>

באופן כללי, אחד הניסוחים של משפט קושי אומר שאם f אנליטית בתחום פשוט-קשר כלשהו, אז ל-f יש קדומה בתחום זה. כעת, נסתכל על התחום D הבא:



$$D_1 = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

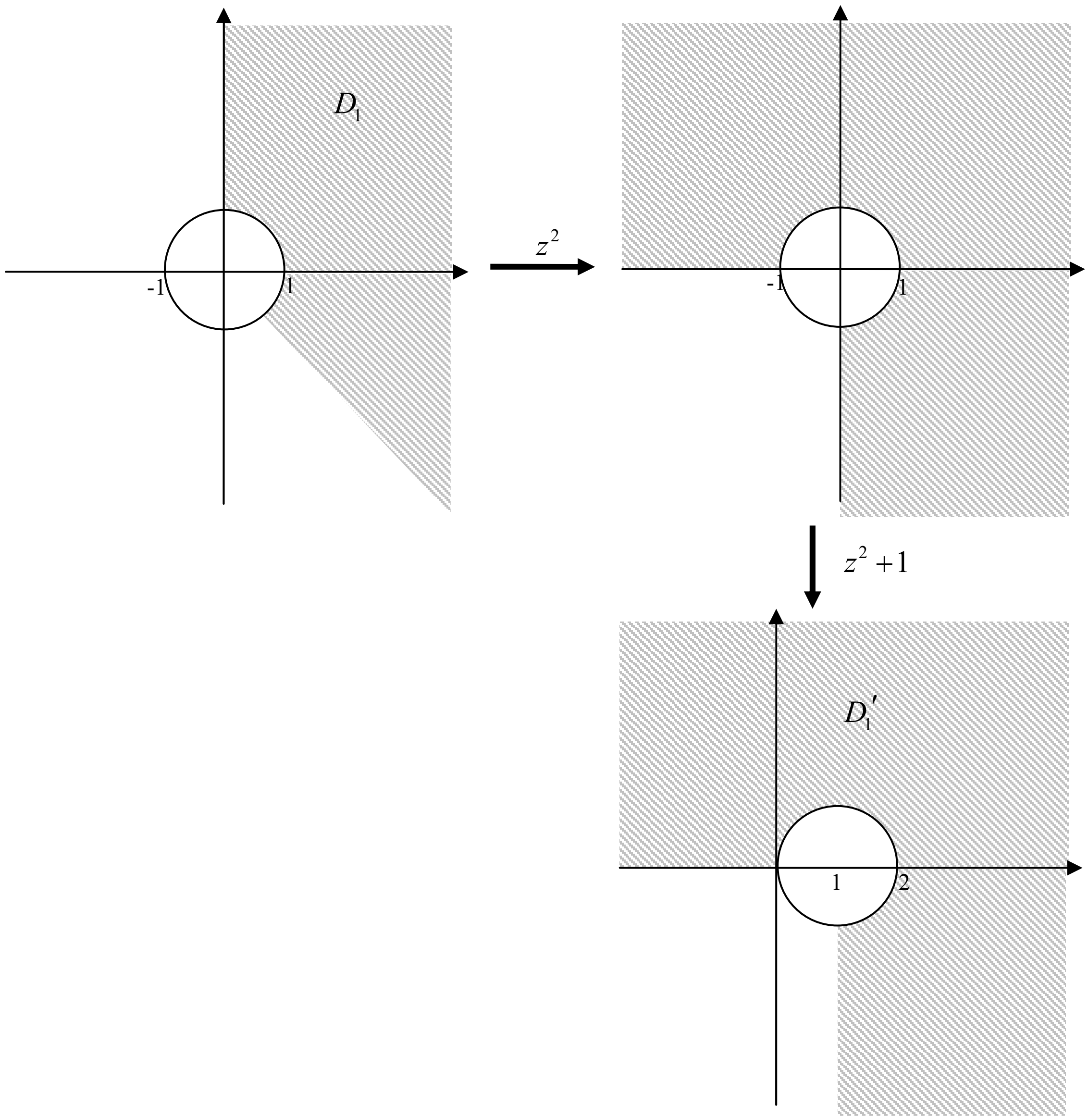
$$D_2 = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \right\}$$

$$D = D_1 \cup D_2 = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right) \right\}.$$

D הוא תחום פשוט-קשר המכיל את Γ, ו-f אנליטית בו.
ולכן עפ"י משפט קושי, קיימת פונקציה קדומה של f בתחום זה.
לכן, אפשר ישר להגיד כי התשובה לשאלה היא **כן**.

אבל רק בשביל הכיף, ננסה גם למצוא פונקציה קדומה ל-f בתחום D.

ראשית, נבדוק לאן D_1 מועתק ע"י z^2+1:



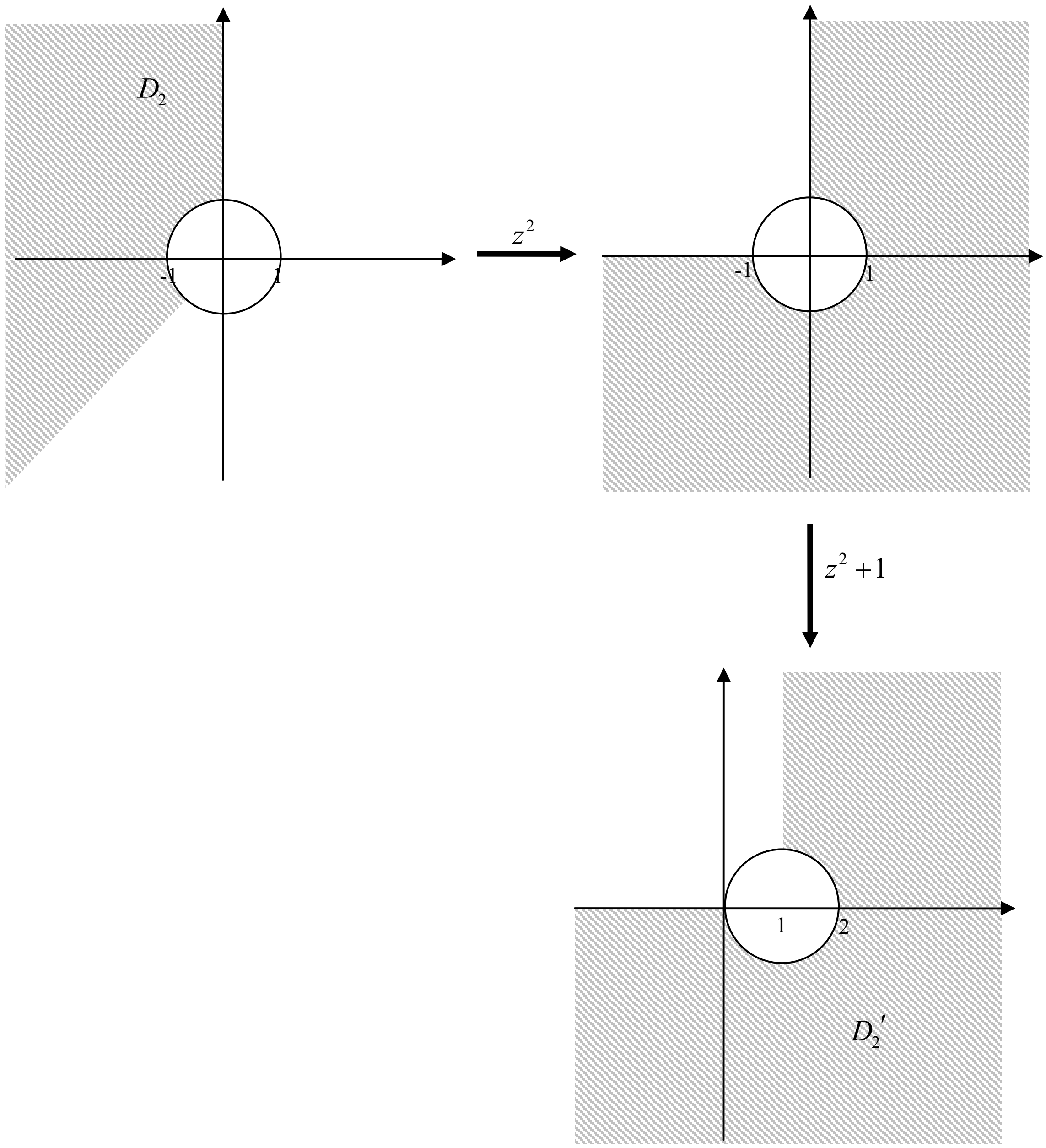
ברור כי בתחום D_1' יש ענף אנליטי של log (כי הוא לא מקיף את הראשית). למשל, נבחר:

$L_1(z)=\ln|z|+i\arg_1(z)$, כאשר: $\arg_1:\mathbb{C}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

תחום ההגדרה של הענף (האנליטי) הזה הינו: $\mathbb{C}\setminus\left\{z \mid Arg(z)=-\frac{\pi}{2}\right\}$ (כלומר המישור כולו פרט לחלק השלילי של הציר המדומה).

ולכן L_1 היא ענף אנליטי של log המוגדר ב- D_1'.

נבדוק לאן D_2 מועתק ע"י z^2+1:



עכשיו, ברור שגם בתחום D_2' יש ענף אנליטי של *log*. למשל, נבחר: $L_2(z)=\ln|z|+i\arg_2(z)$,
כאשר: $\arg_2:\mathbb{C}\to\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$.

תחום ההגדרה של הענף האנליטי הנ"ל הוא: $\mathbb{C}\setminus\left\{z \mid Arg(z)=\frac{\pi}{2}\right\}$ (כלומר כל המישור, פרט לחלק החיובי של הציר המדומה).

תחום זה מכיל את D_2', ולכן L_2 היא ענף אנליטי של *log* בתחום D_2'.

כעת, נגדיר: $F(z)=\begin{cases} L_1\left(z^2+1\right) & z\in D_1 \\ L_2\left(z^2+1\right) & z\in D_2 \end{cases}$.

המקום היחיד שבו יכולה להיות בעיה בהגדרה, הוא בחלק של הציר המדומה שנמצא בתוך D (החיתוך של D_1 ו- D_2), כלומר $\{z=iy \mid y>1\}$. נראה כי F מוגדרת היטב גם שם:

$$L_1\left(z^2+1\right)=\ln\left|-y^2+1\right|+i\arg_1\left(-y^2+1\right)=\ln\left|1-y^2\right|+i\pi$$

$-y^2+1$ זהו מספר ממשי שלילי (כי $y>1$),

ולכן $\arg_1\left(-y^2+1\right)=\pi$ (תזכרו בהגדרת $\arg_1$).

$$L_2\left(z^2+1\right)=\ln\left|-y^2+1\right|+i\arg_2\left(-y^2+1\right)=\ln\left|1-y^2\right|+i\pi$$

$-y^2+1$ זהו מספר ממשי שלילי (כי $y>1$),

ולכן $\arg_2\left(-y^2+1\right)=\pi$ (תזכרו בהגדרת $\arg_2$).

כלומר, קיבלנו כי לכל $z\in D_1\cap D_2$ מתקיים: $L_1(z)=L_2(z)$, ולכן F מוגדרת היטב בכל D.

כלומר, קיבלנו מעין "הדבקה" של שני ענפים אנליטיים של $\log\left(z^2+1\right)$. ההדבקה הזאת נותנת לנו את הפונק' F שהיא אנליטית בכל D.

כמו כן, ברור כי מתקיים: $L_1'(z)=L_2'(z)=\frac{1}{z}$, ולכן: $L_1'\left(z^2+1\right)=L_2'\left(z^2+1\right)=\frac{2z}{z^2+1}$.

כלומר קיבלנו פונקציה שהיא אנליטית ב-D, ונגזרתה שווה ל-f ב-D, זאת אומרת שזוהי פונקציה קדומה של f בתחום פשוט קשר שמכיל את Γ.

בנוסף, לפי המשפט היסודי לאינטגרלים לאורך מסלול, אפשר לחשב את האינטגרל $\int_\Gamma f(z)\,dz$ ע"י ההפרש בין ערכי הפונק' הקדומה בנקודות הסיום וההתחלה של המסלול:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=F(-2)-F(2)=L_2\left((-2)^2+1\right)-L_1\left(2^2+1\right)=L_2(5)-L_1(5)=$$
$$=\ln 5+i\cdot 2\pi-\left(\ln 5+i\cdot 0\right)=2\pi i.$$

שזו גם התוצאה בסעיף ב'...

<u>אז למה התשובה הלא נכונה היא לא נכונה?</u>

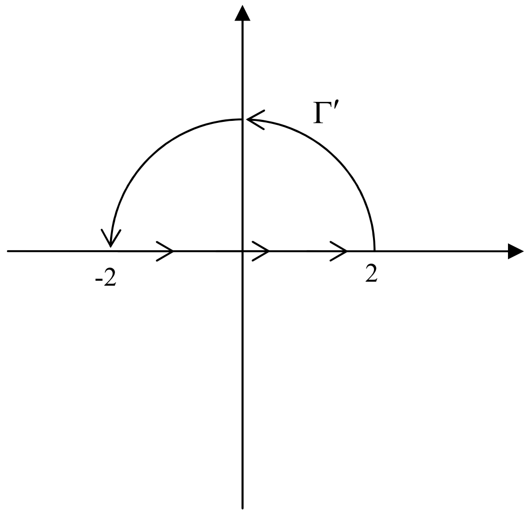
ההנחה הבסיסית שלנו היתה שכיוון שהאינטגרנד הוא מהצורה: $\frac{g'(z)}{g(z)}$, בהכרח הפונק' הקדומה צריכה להיות איזשהו ענף של $\log\left(z^2+1\right)$.

מה שהראנו ב"הוכחה" שם, זה שאכן אין ענף אנליטי של $\log$ שמהווה פונקציה קדומה ל-f.
וזה נכון, באמת אין כזה ענף של $\log$, אבל כן <u>יש</u> פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר שמכיל את Γ ומהווה פונק' קדומה ל-f.

באופן כללי חשוב שתזכרו:

אם f אנליטית בתחום פשוט-קשר R, אז ל-f יש פונקציה קדומה ב-R (משפט קושי).

ב. נשלים את Γ למסלול סגור Γ', ע"י הוספת הקטע הממשי - $[-2,2]$:



כעת, נשים לב כי הפונק' $g(z)=\dfrac{2z}{z+i}$ אנליטית בתוך ועל Γ', ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל:

$$\int_{\Gamma'}\frac{2z}{z^2+1}dz=\int_{\Gamma'}\frac{g(z)}{z-i}dz=2\pi i\cdot g(i)=2\pi i\cdot\frac{2i}{2i}=2\pi i$$

אבל אנחנו יודעים גם ש:

$$\int_{\Gamma'}\frac{2z}{z^2+1}dz=\int_{\Gamma}\frac{2z}{z^2+1}dz+\int_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx$$

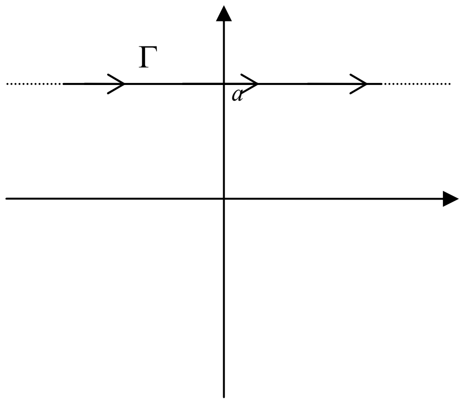
ולכן נקבל:

$$I=\int_{\Gamma'}\frac{2z}{z^2+1}dz-\int_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx=2\pi i-\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-2}^{2}=2\pi i-\left(\ln 5-\ln 5\right)=2\pi i$$

תרגיל מס' 6

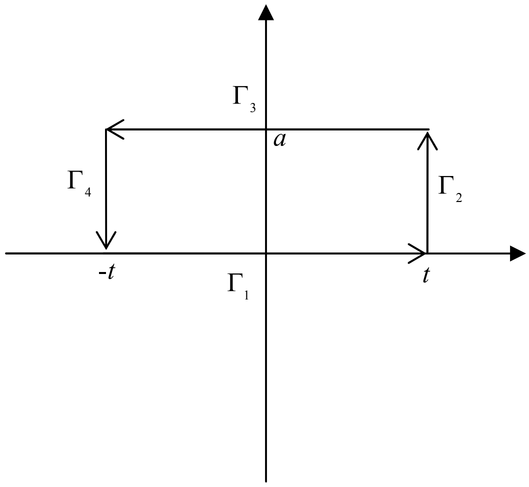
תהי f פונק' אנליטית בתחום: $\{z\,|\,0\le \operatorname{Im} z\le a, a\in\mathbb{R}\}$, כך שמתקיים: $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$.

צ"ל: אם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס, אז $\int_{\Gamma} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, כאשר: $\Gamma=\{z\,|\,\operatorname{Im} z=a\}$.



פתרון

נבנה את הקונטור הבא:



$\Gamma_t = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, כלומר, Γ_t הוא מלבן בגובה קבוע a וברוחב משתנה - $2t$ (למעשה גם $\Gamma_{1,2,3,4}$ תלויים בפרמטר t, אבל כדי לא לסרבל יותר מדי את הסימנים, נכתוב אותם בלי t).

כעת כיוון ש-f אנליטית בתחום המכיל את Γ_t והפנים שלו, נסיק עפ"י משפט קושי-גורסה כי:

$$(*)\,0 = \int_{\Gamma_t} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_4} f(z)\,dz$$

כעת, נבחן את הגבול של ערכי האינטגרלים לאורך החלקים השונים של Γ_t, כאשר $t \to \infty$:

על Γ_1:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-t}^{t} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

על Γ_2:

נשתמש במשפט ההערכה, ונקבל:

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \le a \cdot \max_{\Gamma_2} |f(z)| \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

הסבר: כש- $t\to\infty$, גם $z\to\infty$ לכל $z\in\Gamma_2$, ולפי הנתון - $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$, נסיק כי גם $\max_{z\in\Gamma_2}\left|f(z)\right|\to 0$ ולכן גם גבול האינטגרל הוא 0.

על Γ_3:

נשים לב כי $\Gamma=\lim_{t\to\infty}-\Gamma_3$ (Γ_3 הוא בכיוון מנוגד ל- Γ), ולכן:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz=-\int_{\Gamma} f(z)\,dz$$

על Γ_4:

ניתן להראות בדיוק כמו שעשינו עבור Γ_2, כי: $\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz=0$.

כעת, נחזור לשיוויון $(*)$, ונסתכל על הגבול שלו כאשר $t\to\infty$, ונקבל:

$$0=\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz+\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz+\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz+\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx-\int_{\Gamma} f(z)\,dz=0$$

$$\Downarrow$$

$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ - **מש"ל**.