תרגול חזרה

אביב תשנ"ט, מועד א', שאלה מס' 7

א. הוכח שאם $g(z)$ אנליטית ב-$\mathbb{C}$, ואם $\left|\frac{g(z)}{z}\right| \le 3$ עבור כל z, $|z|>5$, אז $g(z)$ היא מהצורה $g(z)=Az+B$ כאשר A ו-B קבועים, ו- $|A|\le 3$.

הדרכה: השתמש בהערכת קושי לנגזרת השניה.

ב. מצא פונקציה $f(z)$ אנליטית בכל z, $z\ne i$, המקיימת

i. ל-f יש קוטב מסדר 1 בנקודה $z=i$

ii. ל-f יש אפס מסדר 1 בנקודה $z=1$

iii. $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=2$

רמז: התבונן ב $g(z)=\frac{z-i}{z-1}f(z)$.

פתרון

א. תהי $z_0\in\mathbb{C}$ כלשהי.

נסתכל על המעגל: $C_R=\{z \mid |z-z_0|=R\}$.

כעת, כיוון ש-g אנליטית, מתקיים עפ"י נוסחת קושי:

$$(*)\ g''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{g(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

כעת, עפ"י משפט ההערכה, נקבל:

$$\left|\int_{C_R}\frac{g(z)}{(z-z_0)^3}dz\right|\le 2\pi R\cdot M$$

כאשר, M חסם כלשהו על הערך המוחלט של האינטגרנד על C_R.

כעת, השיוויון $(*)$ נכון לכל R שנבחר, ולכן נניח כי R מספיק גדול כך שלכל $z\in C_R$ מתקיים: $|z|>5$.

לכן, עפ"י הנתון, מתקיים: $\left|\frac{g(z)}{z}\right|\le 3$, כלומר: $|g(z)|\le 3|z|$.

כמו כן, לפי אי-שיווין המשולש: $|z|=|z-z_0+z_0|\le|z-z_0|+|z_0|$.

ונקבל:

$$\left|\frac{g(z)}{(z-z_0)^3}\right|=\frac{|g(z)|}{|z-z_0|^3}=\frac{|g(z)|}{R^3}\le\frac{3(|z-z_0|+|z_0|)}{R^3}=\frac{3R+3|z_0|}{R^3}$$

ולכן, סה"כ נקבל:

$$\left|\int_{C_R}\frac{g(z)}{(z-z_0)^3}dz\right|\le 2\pi R\cdot\frac{3R+3|z_0|}{R^3}=6\pi\cdot\frac{R^2+R|z_0|}{R^3}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

ולכן נסיק כי: $\int_{C_R}\frac{g(z)}{(z-z_0)^3}dz=0$, ולכן לפי (*): $g''(z_0)=0$.

כלומר קיבלנו כי לכל נקודה שהיא במישור המרוכב הנגזרת השניה מתאפסת, כלומר $g''\equiv 0$, ולכן נסיק כי: $g(z)=Az+B$.

בנוסף, נתון כי: $\left|\frac{g(z)}{z}\right|\le 3$ עבור $|z|>5$, לכן, נקבל:

$$3\ge\left|\frac{g(z)}{z}\right|=\left|\frac{Az+B}{z}\right|=\left|A+\frac{B}{z}\right|\ge\left||A|-\left|\frac{B}{z}\right|\right|$$

אבל כש- $z\to\infty$, $\left|\frac{B}{z}\right|\to 0$, ולכן נסיק כי: $|A|\le 3$ כנדרש.

ב. לפי הרמז, נסתכל על: $g(z)=\frac{z-i}{z-1}f(z)$.

נזכור שאם ל-f יש קוטב מסדר m בנקודה $z=i$, אז ניתן להציג את f כך: $f(z)=\frac{\tilde f(z)}{(z-i)^m}$, כאשר $\tilde f$ אנליטית ב- $z=i$, במקרה שלנו $m=1$ ולכן $(z-i)f(z)=\tilde f(z)$, ולכן נסיק כי g אנליטית ב- $z=i$ (כלומר, יש לה סינגולריות סליקה בנקודה זו ואפשר להשלימה לפונקציה אנליטית).

בצורה דומה, אם ל-f יש אפס מסדר n בנקודה $z=1$, אז אפשר להציג את f כך: $f(z)=(z-1)\hat f(z)$, כאשר $\hat f$ אנליטית ב-1, ו- $\hat f(1)\ne 0$, ולכן נסיק גם כי: $\frac{f(z)}{z-1}=\hat f(z)$ אנליטית ב-1 ונקבל כי גם $g(z)$ אנליטית ב-1 (שוב, הסינגולריות היא סליקה).

כלומר קיבלנו ש-g היא אנליטית ב-1 וב-i. בכל שאר הנקודות במישור ברור שהיא אנליטית (כי f אנליטית), ולכן נסיק כי g שלמה.

כעת נסתכל על הגבול:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{g(z)}{z}=\lim_{z\to\infty}\frac{z-i}{z-1}\cdot\frac{f(z)}{z}=1\cdot 2=2$$

לופיטל, למשל

נתון: $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=2$

לכן נסיק כי קיים $M>0$, כך שלכל $|z|>M$ מתקיים: $\left|\frac{g(z)}{z}\right|\le 3$.

לכן לפי סעיף א' (המספר 5 שם היה שרירותי לחלוטין, אפשר להחליף אותו ב-M ולקבל אותה תוצאה), נסיק כי: $g(z)=Az+B$.

נחזור לגבול –

$$2=\lim_{z\to\infty}\frac{g(z)}{z}=\lim_{z\to\infty}\frac{Az+B}{z}=\lim_{z\to\infty}A+\frac{B}{z}=A+0=A$$

ולכן נסיק כי: $A=2$.

וקיבלנו כי: $f(z)=\frac{z-1}{z-i}\cdot(2z+B)$.

כעת, חשוב לשים לב כי אסור שיתקיים:

- $B=-2$ - כי אז נקבל: $f(z)=\frac{z-1}{z-i}\cdot(2z-2)=\frac{2(z-1)^2}{z-i}$, ואז $z=1$ הוא כבר לא אפס פשוט של f (אלא מסדר 2).
- $B=-2i$ - כי אז נקבל: $f(z)=\frac{z-1}{z-i}\cdot(2z-2i)=2(z-1)$, כלומר $z=i$ היא סינגולריות סליקה ולא קוטב פשוט.

כל B אחר, כנראה שיהיה בסדר.

שאלה, מהתרגול הקודם

הוכיחו כי אם a ממשי, $|a|\le 1$, ומתקיים: $\sin z=a$, אז z הוא ממשי.

פתרון

נניח בשלילה כי קיים z שאינו ממשי, כך ש- $\sin z=a$.

עכשיו, אם אתם זוכרים (וגם אם לא), אז: $\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ (אם אתם לא זוכרים, אפשר פשוט לפתוח את הנוסחא של *sin* המרוכבת ולקבל את זה).

לכן, אם $\sin z=a$, ו-a הוא ממשי, אז בהכרח מתקיים:

$$\begin{aligned}&I.\sin x\cosh y=a\\&II.\cos x\sinh y=0\end{aligned}$$ (השוואת מקדמים)

מ-II, נסיק כי מתקיים אחד מהשניים: $\sinh y=0$ או $\cos x=0$, אבל לפי ההנחה $y\neq 0$ ולכן נסיק כי בהכרח מתקיים: $\cos x=0$, כלומר: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

כעת נסתכל על I, אז כיוון ש- $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, נסיק כי $\sin x=\pm 1$, ולכן בהכרח מתקיים: $\cosh y=\pm a$. אבל נתון ש- $|a|\le 1$, ואנחנו יודעים ש- $\cosh y>1$ לכל $y\neq 0$ (תזכרו בגרף של *cosh* שמופיע בתרגול מס' 6).

כלומר קיבלנו: $|\cosh y|>1\ge|a|$ וזו כמובן סתירה.

$\Downarrow$

מש"ל.

(אותו דבר אפשר להוכיח גם ל-*cos*).

אביב תשס"ג, מועד ב' , שאלה מס' 3

עבור אילו ערכים ממשיים של a ו-b, הפונקציה: $f\left(z\right)=x^2-ay^2+bxyi$ אנליטית ב-$z=0$?

פתרון

נסמן: $f\left(x+iy\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$, כאשר:

$$u\left(x,y\right)=x^2-ay^2$$
$$v\left(x,y\right)=bxy$$

לפי תנאי קושי רימן, צריך להתקיים:

$$u_x=v_y$$
$$u_y=-v_x$$

בסביבה של $z=0$.

כלומר:

$$2x=bx$$
$$-2ay=-by$$

כיוון שאנחנו מסתכלים על <u>סביבה</u> של $z=0$ ברור שיש לנו שם נקודות בהן $x\neq 0$, ונקודות בהן $y\neq 0$ ולכן מהשיוויון הראשון נקבל: $b=2$, ומהשיוויון השני, נקבל: $a=\frac{b}{2}=1$.

וקיבלנו כי f אנליטית ב-$z=0$ אמ"מ $a=1,b=2$ (תשובה א).

אביב תשס"ג, מועד ב' , שאלה מס' 4

תהי Γ השפה של החצי העליון של הטבעת $\left\{z\,|\,1<|z|<2\right\}$:

$\Gamma=\left[-2,-1\right]\cup\left\{z\,|\,|z|=1,\operatorname{Im}z\geq 0\right\}\cup\left[1,2\right]\cup\left\{z\,|\,|z|=2,\operatorname{Im}z\geq 0\right\}$,

אז האינטגרל בכיוון החיובי $\int\limits_{\Gamma}\frac{z}{\bar{z}}dz$ שווה ל:

א. $-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. 0 ה. 2

פתרון

נסמן:

I_1 - האינטגרל על החצי העליון של המעגל החיצוני (בכיוון החיובי).

I_2 - האינטגרל על הקטע $\left[-2,-1\right]$

I_3 - האינטגרל על החצי העליון של המעגל הפנימי (בכיוון השלילי).

I_4 - האינטגרל על הקטע $\left[1,2\right]$

אז ברור כי מתקיים: $I=I_1+I_2+I_3+I_4$ (I זה האינטגרל שאנחנו מחפשים).

נחשב כל אחד מהאינטגרלים בנפרד:

$$I_1 = \int_{|z|=2,\operatorname{Im} z\ge 0} \frac{z}{\overline{z}}dz = \int_{|z|=2,\operatorname{Im} z\ge 0} \frac{z^2}{\overline{z}\cdot z}dz = \int_{|z|=2,\operatorname{Im} z\ge 0} \frac{z^2}{|z|^2}dz = \frac{1}{4}\int_{|z|=2,\operatorname{Im} z\ge 0} z^2dz$$

כעת, z^2 היא שלמה, ויש לה קדומה - $\frac{z^3}{3}$, ולכן לפי משפט הפונקציה הקדומה:

$$I_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{z^3}{3}\bigg|_2^{-2}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$I_2 = \int_{[-2,-1]} \frac{z}{\overline{z}}dz = \int_{-2}^{-1}\frac{x}{x}dx = \int_{-2}^{-1}dx = x\big|_{-2}^{-1} = -1-(-2) = 1$$

באותה דרך כמו שעשינו עבור I_1:

$$I_3 = \int_{|z|=1,\operatorname{Im} z\ge 0} \frac{z}{\overline{z}}dz = \int_{|z|=1,\operatorname{Im} z\ge 0} \frac{z^2}{|z|}dz = \int_{|z|=1,\operatorname{Im} z\ge 0} z^2dz = \frac{z^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$I_4 = \int_{[1,2]} \frac{z}{\overline{z}}dz = \int_{1}^{2}\frac{x}{x}dx = \int_{1}^{2}dx = x\big|_1^2 = 2-1 = 1$$

ולכן סה"כ נקבל: $I = -\frac{4}{3}+1+\frac{2}{3}+1 = \frac{4}{3}$, כלומר התשובה היא ב'.

שאלה, משום מקום

מהו סוג הסינגולריות שיש לפונקציה: $f(z) = \frac{\sinh z}{z^3} - \frac{1}{z^2}$ בנקודה $z=0$?

פתרון

טור טיילור של sinh סביב 0 הוא: $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ולכן טור לורן של f סביב 0 הוא:

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^3} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} - \frac{1}{z^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}$$

כלומר, קיבלנו שטור לורן מכיל רק חזקות חיוביות, לכן נסיק כי זו $z=0$ זוהי סינגולריות סליקה של f.

<u>שימו לב:</u>

במבט ראשון אם מסתכלים על הפונקציה, זה נראה כאילו יש קוטב מסדר שני, כי גם ל- $\frac{1}{z^2}$ וגם ל- $\frac{\sinh z}{z^3}$ יש קוטב מסדר שני. אבל החלקים הסינגולריים של שתי הפונקציות האלה מאפסים אחד את השני ולכן נשארים עם פונקציה אנליטית.

באופן כללי, אם יש לנו סכום של כמה פונקציות, ורוצים לדעת את סוג הסינגולריות בנקודה מסויימת, אז לא מספיק לבדוק עבור כל חלק בנפרד, אלא צריך לקחת את כל החלקים בסכום שהם בעייתיים בנקודה הזו ביחד, ועל הסכום שלהם לבדוק את סוג הסינגולריות (חלקים שאין להם סינגולריות בנקודה אותה בודקים, אז טור לורן שלהם לא יוסיף חזקות שליליות לטור לורן של הפונקציה, ולכן אפשר להשמיט להתעלם מהם בבדיקה).

שאלה, לא יודע מאיפה

הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-1}+2^{3n-1}}{4^n z^{n+1}}$ הוא:

א. מאפיין פונקציה אנליטית עם נקודת סינגולריות אחת.
ב. מתכנס בסביבת הנקודה $z=3i$.
ג. מתכנס לכל $|z|>5$.
ד. מתכנס בהחלט ב- $1<|z|<3$.
ה. מתכנס לכל $|z|<4$

פתרון

נפריד את הטור לשני סכומים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-1}+2^{3n-1}}{4^n z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{4^n z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n-1}}{4^n z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{4^n}+\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}z^{-n-1}=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{4^n}+\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-2}z^{-n}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4z}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}}}_{S_1}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-2}z^{-n}}_{S_2}$$

כעת, $S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}}$ ולכן לפי "מבחן המנה", נקבל כי רדיוס ההתכנסות שלו הוא:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4^{n+2}}}{\frac{1}{4^{n+3}}}=4$$

כמו כן, $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-2}z^{-n}$. בשביל למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור נסמן: $w=z^{-1}$, ונקבל:

$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-2}w^n$. כעת לפי "מבחן השורש" (אפשר גם לפי המנה, אבל סתם כדי לגוון), נקבל:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{1/n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(2^{n-2}\right)^{1/n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}2^{1-2/n}}=\frac{1}{2}$$

וקיבלנו כי S_2 מתכנס עבור כל $|w|<\frac{1}{2}$, כלומר עבור כל $2<|z|$.

לכן נקבל סה"כ כי הטור המקורי מתכנס בטבעת: $\{z \mid 2<|z|<4\}$.

לכן התשובה הנכונה היחידה היא ב'.
תשובה א' אינה נכונה, כי קיבלנו טור לורן שמתכנס בטבעת חסומה. מכאן אפשר להסיק שעל כל אחד מהמעגלים שמרכיבים את שפת הטבעת יש לפונקציה נקודת סינגולריות.
כלומר יש לה לפחות 2 נקודות סינגולריות.

אביב תשס"ד, מועד ב', שאלה 12

נכון\לא נכון?
נתונה f רציפה המעתיקה את $\mathbb{C}$ לתוך $\mathbb{C}$, כך שלכל $z_0\in\mathbb{C}$, ולכל $r>0$:

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta$$

אז f פונקציה שלמה (כלומר אנליטית בכל $\mathbb{C}$).

פתרון

לא נכון.
נקח לדוגמא: $f(z)=\operatorname{Re} z$.
אז לכל $z_0\in\mathbb{C}$, ולכל $r>0$ נקבל:

$$\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{Re} z_0+\operatorname{Re}\left(re^{i\theta}\right)\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} z_0 d\theta+\int_0^{2\pi} r\cos\theta d\theta=\operatorname{Re} z_0\cdot\int_0^{2\pi} d\theta+r\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=2\pi\operatorname{Re} z_0$$

ולכן נקבל: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\operatorname{Re} z_0=\operatorname{Re} z_0=f\left(z_0\right)$.

כלומר, f מקיימת את התנאי לכל z_0, r.
אבל ברור ש-f אינה שלמה (תנאי קושי-רימן למשל...).

שימו לב שהטענה ההפוכה נכונה, זהו משפט הערך הממוצע של גאוס (שנובע מנוסחת קושי).

באופן כללי – אם אתם מחפשים פונקציה שאינה אנליטית, תנסו קודם את הפונקציות ה"קלאסיות" שנתקלנו בהן - $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \bar{z}, |z|$, ברוב המקרים זה יספיק.

קיץ תש"ס, מועד א', שאלה 6

הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ אנליטית בעיגול $\{z \mid |z|<2\}$,

ומקיימת: $f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{n^2}$.

מצא את הפונקציה f.

פתרון

נסמן: $F(z)=f(z)-\frac{1}{2} f\left(\frac{z}{2}\right)$, ברור כי גם היא אנליטית בעיגול $\{z \mid |z|<2\}$.

כמו כן, אנחנו יודעים כי לכל $n \geq 1$ מתקיים: $F\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$.

כעת, אם נסמן $G(z)=z^2$, אז $G\left(\frac{1}{n}\right)=F\left(\frac{1}{n}\right)$, ולכן עפ"י משפט היחידות נסיק כי $F(z)=z^2$ בעיגול $\{z \mid |z|<2\}$.

כלומר קיבלנו: $f(z)-\frac{1}{2} f\left(\frac{z}{2}\right)=z^2$ (*).

כעת, אנחנו יודעים כי: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, לכן נסיק כי: $f\left(\frac{z}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n$.

ומ-(*) נקבל: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n=z^2 \Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n=z^2$.

נשווה מקדמים, ונקבל:

$$a_0 \cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow a_0=0$$

$$a_1 \cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=0 \Rightarrow a_1=0$$

$$a_2 \cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)=1 \Rightarrow a_2=\frac{8}{7}$$

$$a_3 \cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)=0 \Rightarrow a_3=0$$

$$\ldots$$

כלומר, לסיכום נקבל: $f(z)=\frac{8}{7} z^2$.

(ואם נבדוק, אז: $f(z)-\frac{1}{2} f\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{8}{7} z^2-\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot\left(\frac{z}{2}\right)^2=z^2 \cdot\left(\frac{8}{7}-\frac{1}{7}\right)=z^2$).

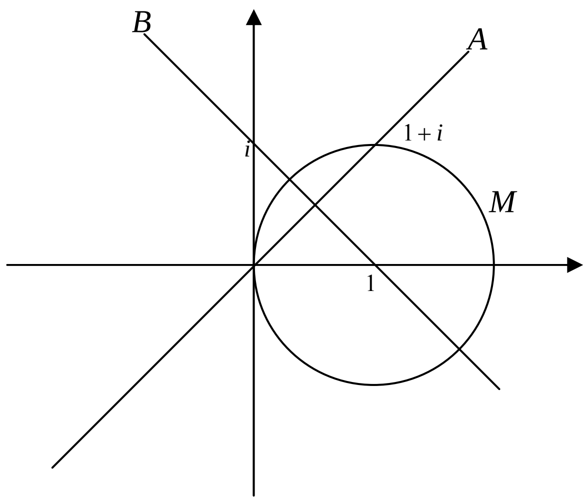
אביב תשנ"ט, מועד א', שאלה 2

נתונים הישרים: $A=\{(x,y)\,|\,y=x\}$ ו- $B=\{(x,y)\,|\,x+y=1\}$, והמעגל $M=\{z\,|\,|z-1|=1\}$.

נתונות הפונקציות:

$$f(z)=\frac{z-1-i}{z}$$

$$g(z)=\left(f(z)\right)^2$$



א. ציין ב-X את התשובות הנכונות:

	ישר	מעגל	קרן	עקום אחר
$f(A)$				
$f(B)$				
$f(M)$				
$g(A)$				
$g(B)$				
$g(M)$				

ב. מצא את הזווית α שבין $f(A)$ ל-$f(B)$.

ג. מצא את הזווית β שבין $g(A)$ ל-$g(B)$.

פתרון

נבדוק מה f עושה:

f היא העתקת מביוס ומעבירה מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים אחרים.
קודם כל, אנחנו יכולים לראות ישר ש-A ו-M יועתקו לקווים ישרים, כיוון שהם עוברים דרך $z=0$, ואילו B יועתק על מעגל, כיוון שאינו עובר דרך הראשית ולכן תמונתו חסומה.
כמו כן, כיוון ש-A ו-B הם קווים ישרים ועוברים דרך נקודת האינסוף, אז תמונותיהן תעבורנה דרך $f(\infty)=1$.

(תזכרו בכללי האצבע מתרגול 4, זה עוזר פה קצת...)

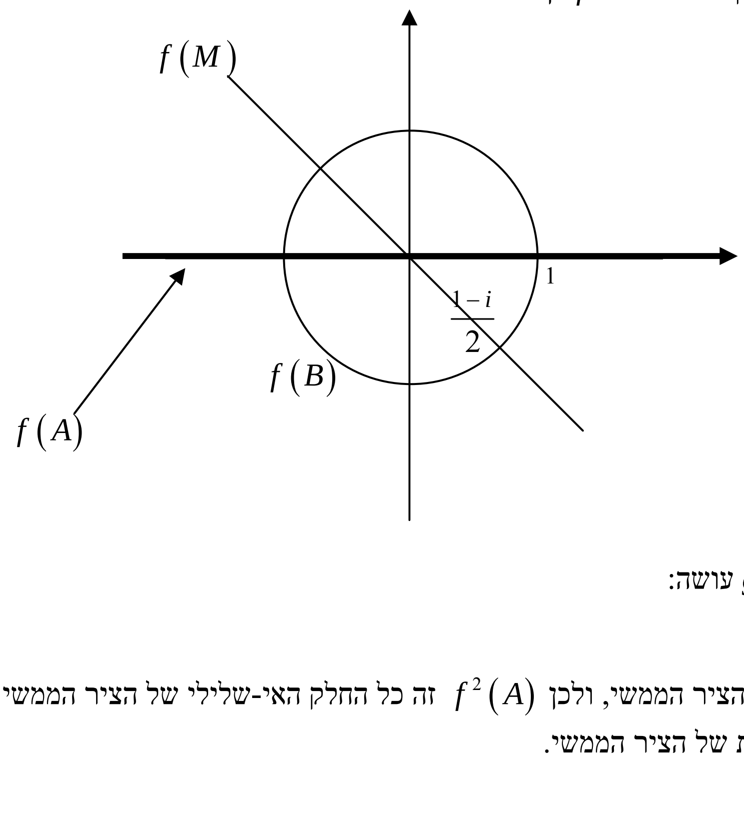
לכן מה שנשאר לנו בשביל למצוא את התמונות של f זה רק עוד כמה נקודות.

עבור A :
אמרנו ש-A מועתק על קו ישר שעובר דרך $z=1$ לכן נשאר לנו למצוא רק עוד נקודה נוספת.
$f(1+i)=\frac{1+i-1-i}{1+i}=0$, ולכן נסיק כי $f(A)$ הוא קו ישר שעובר דרך $z=0, z=1$, כלומר הציר הממשי.

עבור B:
אמרנו ש-B מועתק על מעגל שעובר דרך $z=1$, נשאר לנו למצוא עוד 2 נקודות.
$f(i)=\frac{i-1-i}{i}=\frac{-1}{i}=i,\ f(1)=\frac{1-1-i}{1}=-i$, כלומר קיבלנו ש-$f(B)$ הוא מעגל שעובר דרך $1,i,-i$ וזה יכול להיות רק מעגל היחידה.

עבור M:
אמרנו ש- M מועתק על קו ישר, לכן צריך שתי נקודות בשביל לקבוע אותו.
$f(1+i)=0,\ f(2)=\frac{2-1-i}{2}=\frac{1-i}{2}$.

לסיכום ביניים נקבל כי תמונות f הן:



כעת נבדוק מה g עושה:

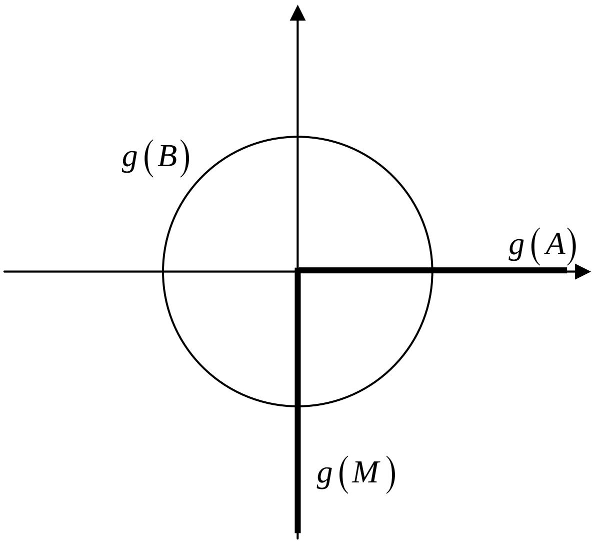
עבור A:
$f(A)$ היא כל הציר הממשי, ולכן $f^2(A)$ זה כל החלק האי-שלילי של הציר הממשי. כלומר $g(A)$ הוא הקרן הימנית של הציר הממשי.

עבור B:
$f(B)$ הוא מעגל היחידה, העלאה בריבוע לא משנה את מעגל היחידה, ולכן $g(B)$ הוא גם מעגל היחידה.

עבור M:

קיבלנו קודם ש- $f\left(M\right)=\left\{\pm re^{i\frac{3\pi}{4}}\mid r\geq 0\right\}$. לכן $f^2\left(M\right)=\left\{r^2e^{i\frac{3\pi}{2}}\mid r\geq 0\right\}$, כלומר זוהי קרן היוצאת מהראשית בזווית $\frac{3\pi}{2}$ שזה בעצם החצי התחתון של הציר המדומה.

נצייר את זה גם:



נסכם את מה שקיבלנו בטבלה:

	ישר	מעגל	קרן	עקום אחר
$f\left(A\right)$	X			
$f\left(B\right)$		X		
$f\left(M\right)$	X			
$g\left(A\right)$			X	
$g\left(B\right)$		X		
$g\left(M\right)$			X	

ב. הזווית בין A ל-B היא $\frac{\pi}{2}$, העתקת מביוס היא קונפורמית ולכן נסיק כי גם הזווית בין $f\left(A\right)$ ל- $f\left(B\right)$ צריכה להשאר $\frac{\pi}{2}$ (אפשר גם לראות את זה מהציור).

ג. גם ההעתקה $\varphi\left(z\right)=z^2$ היא קונפורמית בכל נקודה פרט לראשית. כיוון שהחיתוך בין $f\left(A\right)$ ל- $f\left(B\right)$ אינו בראשית, אז הזווית בין $g\left(A\right)$ ל- $g\left(B\right)$ צריכה גם היא להשאר $\frac{\pi}{2}$ (וגם את זה אפשר לראות מהציור).

That's all folks

בהצלחה במבחן

עומר