אינטגרלים של פונקציות מרוכבות

תזכורת:

אינטגרל של פונקציה (מרוכבת) של משתנה ממשי:

$$\int f(t)\,dt=\int\left[u(t)+iv(t)\right]dt=\int u(t)\,dt+i\int v(t)\,dt$$

אינטגרל של פונקציה מרוכבת לאורך עקום כלשהו:

אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה חלקה כלשהי, אז -

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

המשפט היסודי לאינטגרלים לאורך מסילות:

אם f מרוכבת אנליטית בתחום D, ו- $\gamma:[a,b]\to D$ מסילה חלקה בתחום, אז:

$$\int_\gamma f'(z)\,dz=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

אינטגרל לאורך מסלול:

אם f רציפה, ו- γ_1,γ_2 הן שתי מסילות חלקות המתאימות לאותו קו - Γ, אז:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

ומסמנים: $\int_\Gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$.

משפט ההערכה:

אם Γ קונטור (קו חלק למקוטעין) ו-f רציפה עליו, אז:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right|\le M\cdot L$$

כאשר – L – אורך הקו, $M=\max_{z\in\Gamma}\left|f(z)\right|$

תרגיל מס' 1

חשב את האינטגרל: $\int_{\Gamma_R}(z-z_0)^n\,dz$ עבור כל $n\in\mathbb{Z}$, כאשר: $\Gamma_R=\left\{z\,|\,|z-z_0|=R\right\}$.

פתרון

$\gamma(t)=z_0+Re^{it}$ היא פרמטריזציה של המעגל Γ_R, כאשר: $0<t\le 2\pi$.

$\gamma'(t)=iR\cdot e^{it}$.

לכן נקבל:

$$I_n=\int_{\Gamma_R}\left(z-z_0\right)^n dz=\int_0^{2\pi}\left(z_0+R\cdot e^{it}-z_0\right)^n\cdot i\cdot R\cdot e^{it}dt=\int_0^{2\pi}R^n\cdot e^{n\cdot it}\cdot i\cdot R\cdot e^{it}dt=$$

$$=iR^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{it(n+1)}dt$$

כעת, עבור $n\neq -1$ נקבל:

$$I_n=iR^{n+1}\cdot\left.\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi}=iR^{n+1}\cdot\left(\frac{e^{2\pi i(n+1)}}{i(n+1)}-\frac{e^0}{i(n+1)}\right)=iR^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{i(n+1)}-\frac{1}{i(n+1)}\right)=0$$

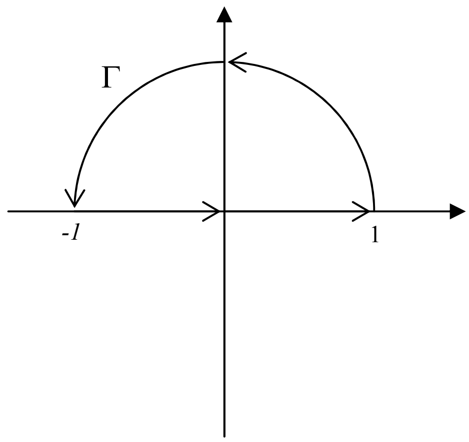
עבור $n=-1$ נקבל:

$$I_{-1}=iR^{-1+1}\int_0^{2\pi}e^0dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$$

שימו לב, שהתוצאה אינה תלויה ב- z_0 או R, ופרט ל- $n=-1$, גם לא ב-n.

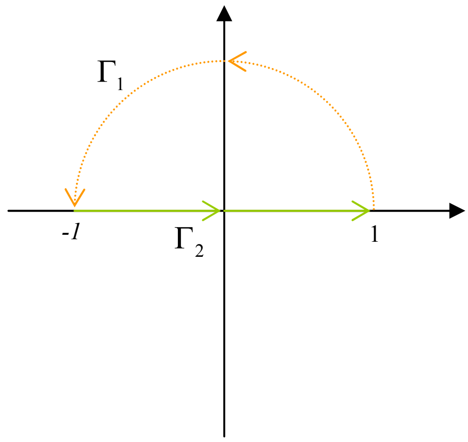
תרגיל מס' 2

חשבו את האינטגרל: $\int_\Gamma |z|\bar{z}dz$, כאשר Γ הוא המסלול הבא:



פתרון

נחלק את המסלול Γ לשני חלקים - $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$, באופן הבא:



נמצא פרמטריזציות לשני הקווים:

$$\Gamma_1 : \gamma_1(t) = e^{it},\ 0 \le t \le \pi$$
$$\Gamma_2 : \gamma_2(t) = t, -1 \le t \le 1$$

כעת, על Γ_1 מתקיים:

$$|z|\overline{z} = |\gamma_1(t)|\overline{\gamma_1(t)} = |e^{it}|\overline{e^{it}} = e^{-it}$$
$$\gamma_1'(t) = ie^{it}$$

ולכן נקבל: $\int\limits_{\Gamma_1} |z|\overline{z}dz = \int\limits_0^\pi e^{-it} \cdot ie^{it}dt = \int\limits_0^\pi itdt = i\pi$

על Γ_2 מתקיים:

$$|z|\overline{z} = |\gamma_2(t)|\overline{\gamma_2(t)} = |t|\overline{t} = |t|t$$
$$\gamma_2'(t) = 1$$

ולכן נקבל: $\int\limits_{\Gamma_2} |z|\overline{z}dz = \int\limits_{-1}^1 |t|tdt = \int\limits_{-1}^0 -t^2dt + \int\limits_0^1 t^2dt = -\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^0 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = -\left(0+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-0\right) = 0$

ולכן לסיכום נקבל: $\int\limits_{\Gamma} |z|\overline{z}dz = \int\limits_{\Gamma_1} |z|\overline{z}dz + \int\limits_{\Gamma_2} |z|\overline{z}dz = i\pi$

תרגיל מס' 3

הוכיחו: $\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}dz = 0$, כאשר $\Gamma_R = \{z \,|\, |z| = R\}$.

פתרון

לפי משפט ההערכה: $\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\right| \le 2\pi R \cdot max_{z\in\Gamma_R}\left|f(z)\right|$ (אורך המסלול Γ_R הוא היקף של מעגל ברדיוס R, כלומר $2\pi R$).

לכן, נחפש הערכה כלשהי לחסם על הערך המוחלט של f לאורך המעגל Γ_R.

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{z^2+2z-5}{\left(z^2+4\right)\left(z^2+2z+2\right)}\right| = \frac{\left|z^2\right|\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right|}{\left|z^4\right|\left|1+\frac{4}{z^2}\right|\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|}$$

שימוש באי-שיוויון המשולש, יתן לנו: $\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right| \le |1|+\left|\frac{2}{z}\right|+\left|\frac{5}{z^2}\right| = 1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2} = 1+\frac{2}{R}+\frac{5}{R^2}$

ולכן עבור R גדול מספיק נקבל: $\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right| \le 2$

z נמצאת על המעגל $\{|z|=R\}$

כמו כן, $\left|1+\frac{4}{z^2}\right| \ge \left|1-\left|\frac{4}{z^2}\right|\right| = \left|1-\frac{4}{|z|^2}\right| = \left|1-\frac{4}{R^2}\right|$, ולכן עבור R מספיק גדול נקבל: $\left|1+\frac{4}{z^2}\right| \ge \frac{1}{2}$.

ואחרון - $\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \ge \left|1-\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|\right|$. וכן - $\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \le \frac{2}{|z|}+\frac{2}{|z|^2} = \frac{2}{R}+\frac{2}{R^2}$. עבור R מספיק גדול נקבל $\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \le \frac{1}{2}$, ולכן: $\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \ge \frac{1}{2}$.

ונקבל:

$$\left|f(z)\right| \le \frac{\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right|}{|z|^2\left|1+\frac{4}{z^2}\right|\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|} \le \frac{2}{R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{8}{R^2}$$ (עבור R מספיק גדול).

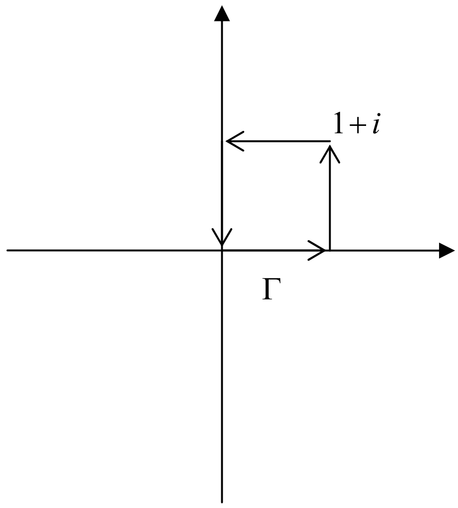
ולכן, עבור R מספיק גדול - $\max_{z\in\Gamma_R}\left|f(z)\right| \le \frac{8}{R^2}$.

ונקבל: $\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \le 2\pi R\cdot\frac{8}{R^2} = \frac{16\pi}{R} \to_{R\to\infty} 0$

ולכן נסיק כי: $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$ (כלל הסנדוויץ' מחדו"א עובד גם כאן) - **מש"ל.**

תרגיל מס' 4

הוכיחו: $\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \le 1$, כאשר: $f(z) = \frac{1}{\bar{z}-5}$, ו- Γ הוא הקונטור הבא:



פתרון

נשים לב כי לכל z מתקיים: $\left|\overline{z}-5\right|=\left|z-5\right|$ (סימטריה ביחס לציר הממשי).

כמו כן, $\left|z-5\right|$ מציין את המרחק של z מ-5, ולכן עבור הנקודות שעל הקו Γ, $\left|z-5\right|$ יקבל ערך מינימלי בנק' $z=1$ שהיא הנק' הקרובה ביותר ל-5 על Γ. ולכן:

$$\min_{z\in\Gamma}\left|\overline{z}-5\right|=\min_{z\in\Gamma}\left|z-5\right|=\left|1-5\right|=4$$

מזה נסיק כי:

$$\max_{z\in\Gamma}\left|f\left(z\right)\right|=\max_{z\in\Gamma}\frac{1}{\left|\overline{z}-5\right|}=\frac{1}{4}$$

בנוסף, די פשוט לראות כי האורך של Γ הוא 4 (מורכב מ-4 קטעים באורך 1).
ולכן עפ"י משפט ההערכה נקבל:

$$\left|\int_{\Gamma}f\left(z\right)dz\right|\leq 4\cdot\frac{1}{4}=1$$ - **מש"ל**.