משפט השארית

משפט השארית:

יהי Γ קונטור סגור-פשוט, ו-f אנליטית על ובתוך Γ, פרט לנקודות הסינגולריות $a_1,...,a_n$ שנמצאות בפנים הקונטור, אז: $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f,a_k)$.

חישוב שאריות:

1. **עבור נקודות סינגולריות סליקות** –
השארית שווה ל-0 (תזכרו שהשארית היא המקדם של z^{-1} בטור לורן, אבל בטור לורן של פונקציה אנליטית אין כלל חזקות שליליות).

2. **בקטבים** -
אם α היא קוטב פשוט של f, אז: $\mathrm{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$.
(דרך נוספת אפשר לראות בתרגיל מס' 1)

אם α היא קוטב מסדר m של f אז:

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big(f(z)(z-\alpha)^m\Big)\right].$$

(נוסחאות אלו נובעות מתוך פיתוח לורן של f סביב קוטב)

3. **בנקודת סינגולריות עיקרית** –
בד"כ אין ברירה אלא לחשב לפי טור לורן.

תרגיל מס' 1

תהי $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ כאשר h,g אנליטית ב- α, $h(\alpha)=0, h'(\alpha)\neq 0$.

הוכיחו כי: $\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$.

פתרון

נניח כי $g(\alpha)\neq 0$:

כיוון ש-$h(\alpha)=0, h'(\alpha)\neq 0$ נסיק כי α היא אפס פשוט של המכנה, ולכן לפי משפט שראינו בתרגול הקודם, α היא קוטב פשוט של f. לכן עפ"י הנוסחא שראינו בתזכורת, נקבל:

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to\alpha}\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(\alpha)}{z-a}} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$$

כעת, נניח כי α היא אפס מסדר m של g, אז את g,h ניתן לרשום כך:

$$g(z)=(z-\alpha)^m\tilde{g}(z)$$

$$h(z)=(z-\alpha)\tilde{h}(z)$$

כאשר $\tilde{g},\tilde{h}$ אלניטיות ולא מתאפסות בסביבה של α.

ולכן נקבל לכל $z\neq\alpha$:

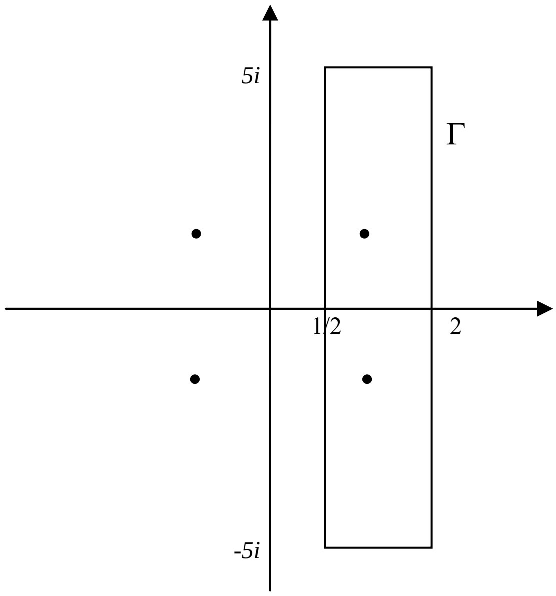
$$f(z)=\frac{(z-\alpha)^m\tilde{g}(z)}{(z-\alpha)\tilde{h}(z)}=(z-\alpha)^{m-1}\frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}$$

כלומר, קיבלנו שבסביבת הנקודה α, f מתלכדת עם פונקציה שהיא אנליטית ב- α, ולכן בהכרח α היא נקודת סינגולריות סליקה של f.

כיוון שכך, נסיק כי $\frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}=0=\operatorname{Res}(f,\alpha)$.

תרגיל מס' 2

חשבו את: $\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^4}$, כאשר Γ הוא הקונטור הבא:



פתרון

נקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$ הן: $e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}i}$.

מתוכן, רק הנקודות: $z_1=e^{\frac{\pi}{4}},z_2=e^{-\frac{\pi}{4}}$ נמצאות בתוך Γ. ולכן עפ"י משפט השארית:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(f,e^{\frac{\pi}{4}}\right)+\operatorname{Res}\left(f,e^{-\frac{\pi}{4}}\right)\right)$$

כעת:

$$\operatorname{Res}\left(f,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)=\left.\frac{1}{\left(1+z^4\right)'}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}}=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}}=\frac{1}{4}e^{\frac{-3\pi}{4}i}$$

לפי תרגיל מס' 1

$$\operatorname{Res}\left(f,e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{-\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

ולכן נקבל:

$$\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^4}=2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}+\frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)=\frac{\pi i}{2}\cdot 2\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$$

תרגיל מס' 3

חשבו את האינטגרל: $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{(1-z)^2}dz$.

פתרון

בתוך המעגל $\{z\,|\,|z|=2\}$ נקודת הסינגולריות היחידה של האינטגרנד $f(z)=\dfrac{ze^{\frac{1}{1-z}}}{(1-z)^2}$ היא $z=1$.

ולכן לפי משפט השארית: $\displaystyle\int_{|z|=2}f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,1)$.

במקרה זה נקודת הסינגולריות היא עיקרית, ולכן נאלץ להשתמש בטור לורן על מנת לחשב את השארית:

נזכר כי: $e^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, ולכן: $e^{\frac{1}{z-1}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n}}{n!}=\left(1+(z-1)^{-1}+\frac{(z-1)^{-2}}{2!}+\frac{(z-1)^{-3}}{3!}+\ldots\right)$.

כמו כן: $z=(z-1)+1$, ולכן נקבל:

$$f(z)=\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{(1-z)^2}=\frac{(z-1)}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n}}{n!}+\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n}}{n!}=$$

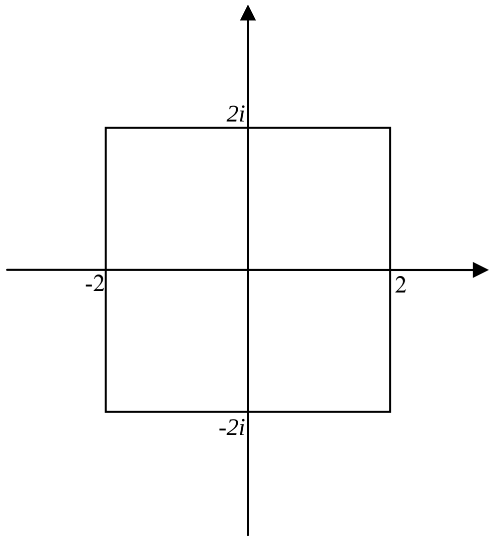
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n-1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n-2}}{n!}=\left((z-1)^{-1}+\frac{(z-1)^{-2}}{2!}+\ldots\right)+\left((z-1)^{-2}+\ldots\right)$$

השארית היא המקדם של $\dfrac{1}{z-1}=(z-1)^{-1}$, ולכן נסיק כי: $\operatorname{Res}(f,1)=1$.

ולסיכום: $\displaystyle\int_{|z|=2}f(z)\,dz=2\pi i$.

תרגיל מס' 4

חשבו את האינטגרל: $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz$, כאשר Γ היא הריבוע:



פתרון

נקודת הסינגולריות היחידה של האינטגרנד היא $z=-1$ והיא נמצא בפנים של Γ, לכן:

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(-1)$$

כעת נשים לב כי בנקודה $z=-1$ המונה אינו מתאפס, בעוד שלמכנה יש אפס מסדר 3.
לכן נסיק כי $z=-1$ היא קוטב מסדר 3 של האינטגרנד, ולכן לחישוב השארית נשתמש בנוסחא ה"מסובכת" $\operatorname{Res}(f,\alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to\alpha} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(f(z)(z-\alpha)^m \right) \right]$ ונקבל:

$$\operatorname{Res}(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to -1} \left[\frac{d^2}{dz^2} \sin z \right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to -1} (\sin z)'' = -\frac{1}{2} \lim_{z\to -1} \sin z = -\frac{1}{2} \sin(-1) = \frac{\sin 1}{2}$$

ולסיכום: $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{\sin 1}{2} = \pi i \sin 1$

תרגיל מס' 5

חשבו את האינטגרל: $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz$

פתרון

נקודות הסינגולריות של האינטגרנד הן: $z_1=0, z_2=\frac{\pi}{2}$, ושתיהן בתוך המעגל $\{z \mid |z|=2\}$.

כעת:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}=1\cdot\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

כלומר הגבול בנקודה $z_1=0$ קיים ולכן זוהי נקודת סינגולריות <u>סליקה</u>, ובהתאם: $\mathrm{Res}(0)=0$.

בנקודה $z_2=\frac{\pi}{2}$ המונה לא מתאפס ואילו למכנה יש אפס מסדר שני. לכן נסיק כי $z_2=\frac{\pi}{2}$ היא קוטב מסדר שני של האינטגרנד, נשתמש בנוסחא ונקבל:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin z}{z}\right)'=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}=\frac{-1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{-4}{\pi^2}$$

ולסיכום נקבל: $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz=2\pi i\left(\mathrm{Res}(0)+\mathrm{Res}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\pi i\cdot\frac{-4}{\pi^2}=-\frac{8i}{\pi}$