ענפים אנליטיים ופונק' הלוגריתם

תזכורת:

ענף אנליטי:
תהי $F(z)$ פונק' רב-ערכית בתחום D.
$f(z)$ יקרא ענף אנליטי של F ב-D, אם לכל $z \in D$ מתקיים: $f(z) \in F(z)$ וכן f אנליטית ב-D.

פונקציית הלוגריתם:
$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$
$\arg(z)$ - הארגומנט של z יכול לקבל אינסוף ערכים בהפרשים קבועים של 2π.

הענף העיקרי של הלוגריתם:
$$Log(z) = \ln|z| + iArg(z)$$
כאשר $Arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [-\pi, \pi]$ הוא הארגומנט העיקרי של z.

פונקציית החזקה:
$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log(z)}$$

תרגיל מס' 1

א. חשבו: $Log(1-i)$.
ב. מצאו את כל הערכים האפשריים של: $\log(1-i)$.
ג. מצאו את כל הערכים האפשריים של: 1^{a+ib}.

פתרון

א. $Log(1-i) = \ln|1-i| + iArg(1-i) = \ln\sqrt{2} - i\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\ln 2 - i\dfrac{\pi}{4}$

ב. $\log(1-i) = \ln|1-i| + i\arg(1-i) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + i\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \dfrac{1}{2}\ln 2 - i\pi\left(\dfrac{1}{4} + 2k\right)$

ג. $1^{a+ib} = e^{(a+ib)\log(1)} = e^{(a+ib)(\ln|1| + i\arg(1))} = e^{(a+ib)(i\cdot 2\pi k)} = e^{-2\pi kb}\left(\cos(2\pi ka) + i\sin(2\pi ka)\right)$

תרגיל מס' 2

הוכח כי לכל z_1, z_2 שאינם ממשיים-שליליים, מתקיים:
$$Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2) + 2n\pi i, \qquad n = -1, 0, 1$$

פתרון

$$Log(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + iArg(z_1 z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\left(Arg(z_1) + Arg(z_2) + 2n\pi i\right)$$
ולכן נקבל: $Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2) + 2n\pi i$ - מש"ל.
כי $-\pi < Arg(z) < \pi$

תרגיל מס' 3

הוכח שלפונק' הרב-ערכית $\log(z)$ אין ענף אנליטי בתחום: $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

פתרון

נניח בשלילה כי יש ענף אנליטי ל- $\log(z)$ בתחום D, נסמנו ב- L.

אז מתקיים: $L(1)=\ln 1+i\arg(1)=i\arg(1)=i\cdot 2\pi k$.

כמו כן, כיוון ש-L רציפה, אז לכל $z=e^{i\theta}$ מתקיים: $L(z)=L\left(e^{i\theta}\right)=i\arg\left(e^{i\theta}\right)=i\theta+i\cdot 2\pi k$.

אבל אז נקבל:

מצד אחד: $\lim_{\theta\to 2\pi} L\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{\theta\to 2\pi} i\theta+i\cdot 2\pi k=i\cdot 2\pi(k+1)$

מצד שני: $\lim_{\theta\to 2\pi} L\left(e^{i\theta}\right)=L\left(\lim_{\theta\to 2\pi} e^{i\theta}\right)=L(1)=i\cdot 2\pi k$

וקבלנו אם כן, סתירה.

לכן לא קיימת L כזו, כלומר אין ענף אנליטי ל-log בתחום המבוקש.

תרגיל מס' 4

מצאו את תמונות כל הענפים של הפונקציה הרב-ערכית $\sqrt[3]{z}$ בחצי המישור הימני.

פתרון

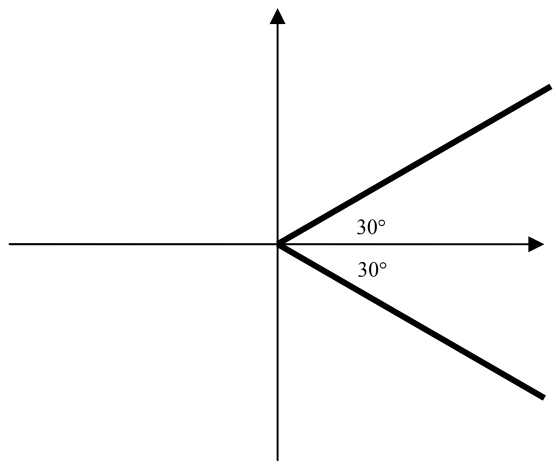
$\sqrt[3]{z}=e^{\frac{1}{3}\log z}=e^{\frac{1}{3}(\ln|z|+i\arg z)}=|z|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\arg z}{3}}$.

כעת, נבדוק לאן עוברת שפת התחום – כלומר, הציר המדומה.

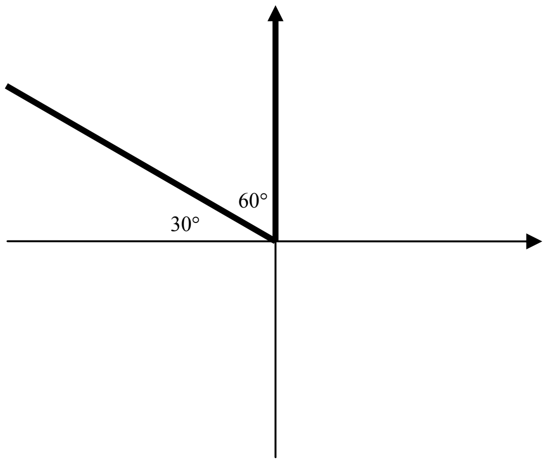
הנקודות על הציר המדומה ניתנות לרישום בצורה - $z=re^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ ($r\ge 0$).

לכן נקבל, על הציר המדומה - $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}e^{\frac{i}{3}\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$.

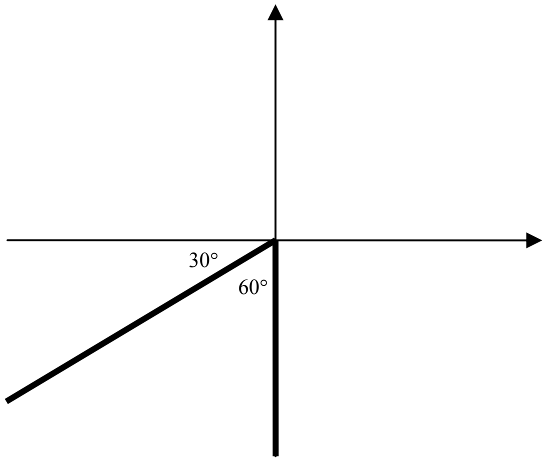
I. עבור $k=0$ נקבל את התמונה - $\sqrt[3]{r}e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$ -



II. עבור $k=1$ נקבל את התמונה - $\sqrt[3]{r}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ שאלו בעצם שתי הקרניים - $\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\pi}{2}},\sqrt[3]{r}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

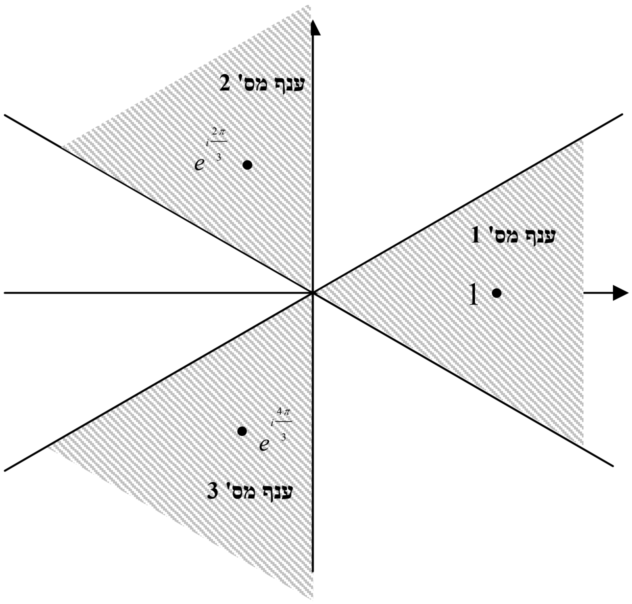


III. עבור $k=2$ נקבל את התמונה - $\sqrt[3]{r}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}$ שאלו שתי הקרניים - $\sqrt[3]{r}e^{i\frac{7\pi}{6}}, \sqrt[3]{r}e^{i\frac{3\pi}{2}}$



עבור כל k שלם אחר, נקבל בהכרח אחת מהתמונות האלה (כי נקבל תוספת של כפולה של 2π לארגומנט, מה שלא משפיע על התמונה). ולכן אלו כל התמונות האפשרויות של השפה.

כעת נבדוק לאן מועתקת הנקודה הפנימית – 1. $\sqrt[3]{1}=e^{i\frac{2\pi k}{3}}$.
עבור $k=0$ נקבל: $\sqrt[3]{1}=e^{0}=1$.
עבור $k=1$ נקבל: $\sqrt[3]{1}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
ועבור $k=2$ נקבל: $\sqrt[3]{1}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
ולכן נקבל כי תמונות שלושת הענפים הן:



תרגיל מס' 5

כמה ענפים אנליטיים יש לפונק': $f(z)=\sqrt[3]{\sqrt{z}+1}$ בתחום D שהוא חצי המישור הימני?

פתרון

נסמן: $g(z)=\sqrt{z}+1, h(z)=\sqrt[3]{z}, f=h\circ g$

אז: $g(z)=e^{\frac{1}{2}(\ln|z|+i\arg(z))}+1=e^{\frac{1}{2}\ln|z|}\cdot e^{i\cdot\frac{\arg(z)}{2}}+1$

כעת, $\arg(z)=\left\{Arg(z)+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, ולכן ל- $e^{i\cdot\frac{\arg(z)}{2}}$ יש שני ערכים שונים:

$e^{i\cdot\frac{Arg(z)}{2}}$ ו- $e^{i\cdot\frac{Arg(z)+2\pi}{2}}=e^{i\left(\frac{Arg(z)}{2}+\pi\right)}$.

לכן נסיק כי לפונק' g שני ענפים אנליטיים שונים.

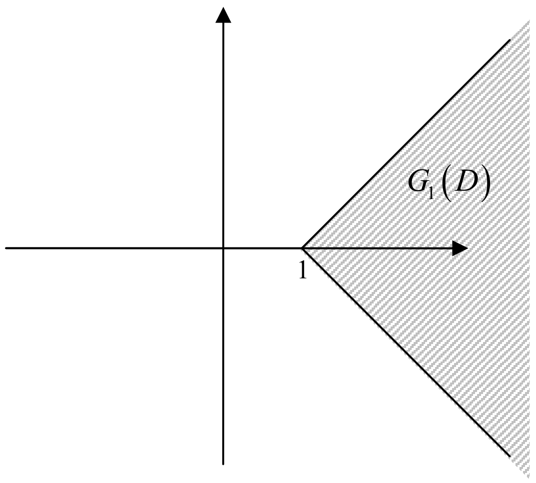
(אין לנו בעיות של רציפות\אנליטיות כיוון שהתחום D אינו מקיף את הראשית).

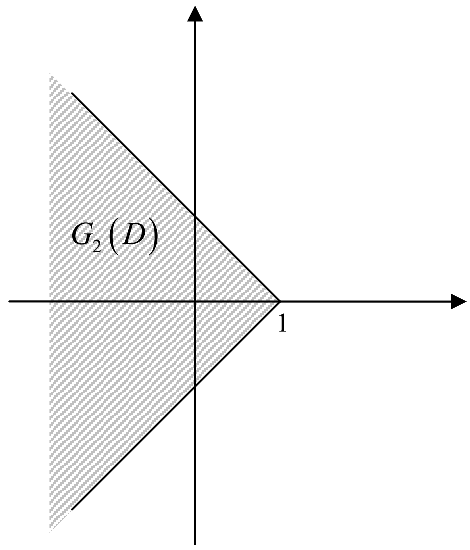
ואם כן נסמנן את שני הענפים ב- G_1,G_2 כך ש-

$$G_1(z)=e^{\frac{1}{2}\ln|z|}\cdot e^{i\frac{Arg(z)}{2}}+1=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\cdot\frac{Arg(z)}{2}}+1$$

$$G_2(z)=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{Arg(z)}{2}+\pi\right)}=-\sqrt{|z|}\cdot e^{i\cdot\frac{Arg(z)}{2}}+1$$

ואם נצייר את תמונות התחום D ע"י הענפים, נקבל:





כעת, נבדוק כמה ענפים אנליטיים יש לפונק' $h(z)=\sqrt[3]{z}$ בשני התחומים.

בתחום $G_1(D)$ יש ל-h 3 ענפים אנליטיים שונים –

$$H_1(z)=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\cdot\frac{Arg(z)}{3}}$$

$$H_2(z)=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{Arg(z)}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$H_3(z)=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{Arg(z)}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

אבל בתחום $G_2(D)$ אין ל-h אף ענף אנליטי, כיוון שתחום זה מקיף את הראשית, ואז לפונק' log אין בו ענף אנליטי.

ולכן לסיכום נקבל כי ל-f יש 3 ענפים אנליטיים שונים.