תכונות של פונקציות אנליטיות

תזכורת:

פונקציה הרמונית:
$u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ נקראת הרמונית אמ"מ $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

הרמונית צמודה:
$v:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ תקרא הרמונית צמודה ל-u אמ"מ v הרמונית, ומקיימת ביחד עם u את תנאי קושי-רימן.

משפט:
$f = u + iv$ אנליטית $\Leftrightarrow$ u,v הן פונקציות הרמונית צמודות.

משפט נוסף:
בתחום **פשוט-קשר**, לכל פונק' הרמונית u קיימת פונק' הרמונית צמודה.

תרגיל מס' 1 (מבוחן אמצע)

תהי $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$. מצא פונק' הרמונית צמודה ל-u.

פתרון

ראשית, נבדוק באיזה תחום הפונק' u היא הרמונית.

$$u_x = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x(\cos y) = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)$$
$$u_{xx} = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) + e^x(\cos y) = e^x(x\cos y - y\sin y + 2\cos y)$$
$$u_y = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)$$
$$u_{yy} = e^x(-x\cos y - \cos y - \cos y + y\sin y) = -e^x(x\cos y - y\sin y + 2\cos y)$$
$$\Downarrow$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ לכל } x,y$$

כעת נמצא פונק' הרמונית צמודה ל-u, ע"י שימוש בתנאי קושי-רימן:

$$v_y = u_x = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)$$
$$\Downarrow$$
$$v = \int e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)dy + c(x) =$$
$$= e^x\left[x\int\cos y dy - \int y\sin y dy + \int \cos y dy\right] + c(x) =$$
$$= e^x\left[x\sin y - (-y\cos y + \sin y) + \sin y\right] + c(x) =$$
$$= e^x\left[x\sin y + y\cos y\right] + c(x)$$
$$\Downarrow$$
$$v_x = e^x(x\sin y + y\cos y) + e^x(\sin y) + c'(x) =$$
$$= e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y) + c'(x)$$

כמו כן, $u_y=-e^x\left(x\sin y-\sin y-y\cos y\right)$, ושוב מתנאי קושי-רימן, נסיק כי בהכרח מתקיים - $c'(x)=0$.

ולכן נסיק כי הפונק' $v(x,y)=e^x\left(x\sin y+y\cos y\right)$ היא הרמונית צמודה ל-v.

תרגיל מס' 2

בתרגיל זה ננסה לראות האם בתחום שאינו פשוט-קשר, לכל פונק' הרמונית קיימת בהכרח הרמונית צמודה.

תהי $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$, $u:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$.

א. נסמן: $D_1=\{(x,y)\mid x>0, y\in\mathbb{R}\}, D_2=\{(x,y)\mid x<0, y\in R\}$ (חצאי המישור הימני והשמאלי). מצא פונק' הרמונית צמודה ל-u בתחומים D_1,D_2.

ב. האם קיימת ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ פונק' v שהיא הרמונית צמודה ל-u?

פתרון

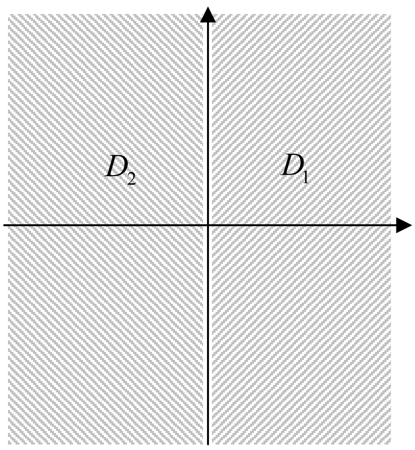
ראשית, נוודא ש-u הרמונית בתחומים D_1,D_2:

לכל $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים:

$$u_x=\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow u_{xx}=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$u_y=\frac{y}{x^2+y^2}\Rightarrow u_{yy}=\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

ונקבל אם כן $u_{xx}+u_{yy}=0$ לכל $(x,y)\neq(0,0)$ ולכן u הרמונית בתחום $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ובפרט ב- D_1,D_2.



כעת, ננסה למצוא פונק' v הרמונית צמודה ל-u ב- D_1:

עפ"י קושי-רימן, צריך להתקיים: $u_x = \frac{x}{x^2+y^2} = v_y$

$$\Downarrow$$

$$v = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)$$

(כיוון שב- D_1 $x > 0$, נקבל כי *arctan* מוגדרת היטב).

נגזור לפי x ונקבל: $v_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} + c'(x)$.

נשתמש שוב בקושי רימן, ונסיק כי:

$v_x = -u_y \Rightarrow -\frac{y}{x^2+y^2} + c'(x) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow c'(x) = 0$.

כלומר נקבל כי $c(x) = const$, ולכן: $v(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c_1$.

בדרך זהה לחלוטין, נקבל כי בתחום D_2 מתקיים: $v(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c_2$.

ב. נניח כי קיימת פונק' v הרמונית צמודה ל-u בתחום $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. כיוון שפונק' הרמוניות נבדלות אך ורק בקבוע, נסיק מסעיף א' כי מתקיים:

$$v(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c_1 & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c_2 & x < 0 \\ ? & x = 0 \end{cases}$$

ניתן להניח כי $c_1 = 0$ (כי אם נחסר קבוע מהפונק' היא עדיין הרמונית צמודה) ואז נקבל:

$$v(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c & x < 0 \\ ? & x = 0 \end{cases}$$

v הרמונית ובפרט, רציפה בכל התחום.

נסתכל כעת על הנק' $y_1 > 0$,$(0, y_1)$ ונחשב את הגבול של v בנק' זו.

אם נתקרב לנק' מהכיוון החיובי של ציר x נקבל:

$$\lim_{x\to 0^+} v(x,y_1) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{y_1}{x}\right) = \lim_{t\to\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$$

ואם נתקרב מהכיוון השלילי של ציר ה-x נקבל:

$$\lim_{x\to 0^-} v(x,y_1) = \lim_{x\to 0^-} \left(\arctan\left(\frac{y_1}{x}\right) + c\right) = \lim_{t\to-\infty} \arctan(t) + c = -\frac{\pi}{2} + c$$

כיוון שהפונק' רציפה, בהכרח הגבול קיים בנק', ולכן חייב להתקיים: $\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+c$, ונקבל כי $c=\pi$.

כעת נסתכל על הנק' $(0,y_2),\, y_2<0$.

שוב, נחשב גבול מהכיוון החיובי של ציר x:

$$\lim_{x\to 0^+} v(x,y_1)=\lim_{x\to 0^+}\arctan\left(\frac{y_1}{x}\right)=\lim_{t\to -\infty}\arctan(t)=-\frac{\pi}{2}$$

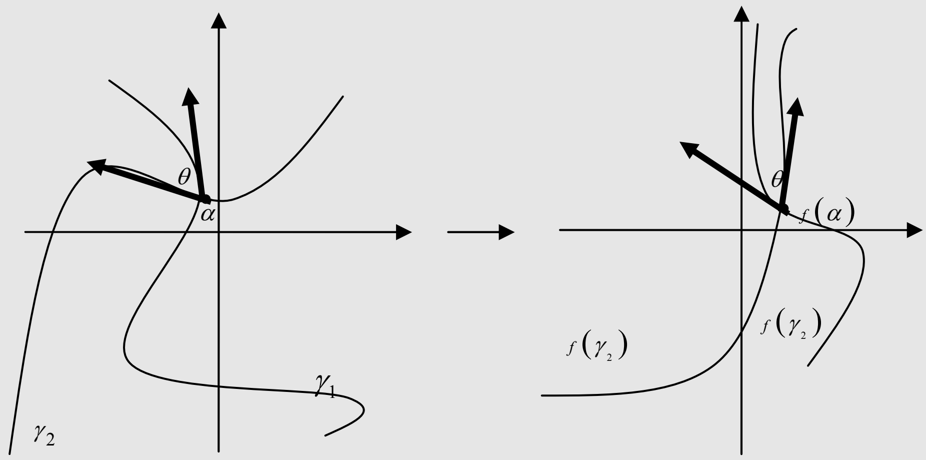
ומהכיוון החיובי:

$$\lim_{x\to 0^-} v(x,y_1)=\lim_{x\to 0^-}\arctan\left(\frac{y_1}{x}\right)+\pi=\lim_{t\to \infty}\arctan(t)+\pi=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$$

וקיבלנו שני ערכים אפשריים שונים לגבול, לכן נסיק כי הגבול בנק' זו אינו קיים!
כלומר קיבלנו כי קיימות נק' בתחום בהן v אינה רציפה, וזו אם כן סתירה (כיוון ש-v הרמונית היא בהכרח רציפה).
לכן נסיק כי לא קיימת v כזו.
נשים לב כי התחום $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ אכן אינו פשוט-קשר ולכן המשפט אינו תקף בתחום זה.
בהמשך הקורס נכיר את הפונק' $Log(z)=\ln|z|+iarg(z)$ שהיא בדיוק הפונק' האנליטית אותה ניסינו למצוא בתרגיל זה ($\ln|z|=\ln\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$), ונראה כי היא אכן אינה אנליטית בתחום $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

תזכורת:

העתקה קונפורמית – העתקה שומרת זוית.
הסבר: אם שתי מסילות נחתכות בנק' α בזווית θ, אז תמונותיהן תחת ההעתקה הן שתי מסילות הנחתכות ב-$f(\alpha)$ בזווית θ.



משפט:
אם f אנליטית בסביבת הנק' α ומתקיים: $f'(\alpha)\neq 0$, אז f קונפורמית בנק' α.

תרגיל מס' 3 (מבוחן אמצע)

תהי $\alpha \in [0,2\pi]$ הזווית בה נחתכות בנק' i תמונות המעגלים $\{|z|=1\}$ ו- $\{|z-\sqrt{2}|=1\}$ ע"י ההעתקה $f(z)=z^2$. אז α שווה ל:

א. 0 ב. $\frac{\pi}{6}$ ג. $\frac{\pi}{4}$ ד. $\frac{\pi}{3}$ ה. $\frac{\pi}{2}$

פתרון

ראשית, נמצא את נק' החיתוך של המעגלים.
נסמן ב- $e^{i\theta}$ את נק' החיתוך של המעגלים (מתוך הנחה שנק' החיתוך נמצאת על מעגל היחידה), נציב במשוואה: $|z-\sqrt{2}|=1$ ונקבל: $|e^{i\theta}-\sqrt{2}|=1$

$$\Downarrow$$

$$|\cos\theta + i\sin\theta - \sqrt{2}| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\cos\theta - \sqrt{2}\right)^2 + \sin^2\theta = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 + \sin^2\theta = 1$$

$$\Downarrow$$

$$-2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

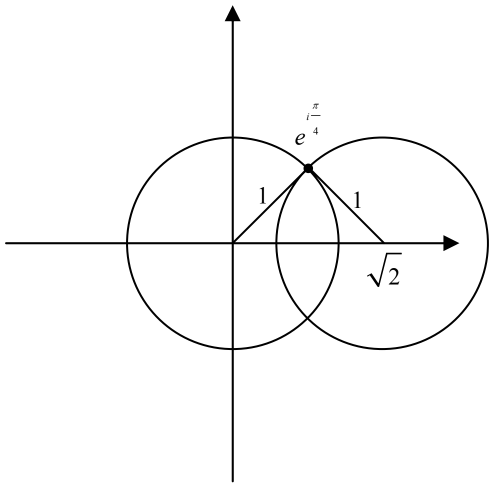
$$\Downarrow$$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{4}$$

כלומר נק' החיתוך של המעגלים הן: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

כעת, נשים לב כי $z_1^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, וכן כי z^2 היא קונפורמית ב- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (ולכן גם בסביבה של z_1), ונסיק כי תמונות המעגלים עוברות דרך הנקודה i והזווית ביניהן בנק' זו שווה לזווית שבין המעגלים בנק' z_1.

נסתכל כעת על המעגלים עצמם, כדי לקבוע את הזווית ביניהם בנק' z_1:



קיבלנו למעשה, משולש שצלעותיו הן: $1,1,\sqrt{2}$, ולכן זהו בהכרח משולש ישר זווית. לכן הזווית בין המעגלים היא $\frac{\pi}{2}$ (הרדיוסים מאונכים זה לזה ולכן גם המשיקים מאונכים זה לזה).

לסיכום נסיק כי הזווית בין תמונות המעגלים בנק' i היא $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

תזכורת:

האופרטורים: $\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

תהי $f\left(x+iy\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$, כאשר u,v גזירות ברציפות בתחום D.

אז האופרטרים $\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ מוגדרים כך:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

תרגיל מס' 4

א. צ"ל: f מקיימת את תנאי קושי-רימן ב-D אמ"מ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ ב-D, וכי במקרה זה מתקיים: $f'=\frac{\partial f}{\partial z}$.

ב. צ"ל: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}f=\frac{1}{4}\Delta f$ (בהנחה ש-u,v גזירות פעמיים ברציפות).

פתרון

א. נחשב את $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u+iv)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=\frac{1}{2}\left(u_x+iv_x+iu_y-v_y\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_x-v_y\right)+\frac{i}{2}\left(u_y+v_x\right)$$

ולכן נסיק: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0\Leftrightarrow u_x=v_y,u_y=-v_x$

$\Downarrow$

f מקיימת קושי-רימן אמ"מ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ - **מש"ל *I***.

נחשב את $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(u+iv)=\frac{1}{2}\left(u_x+iv_x-iu_y+v_y\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_x+v_y\right)+\frac{i}{2}\left(-u_y+v_x\right)=\frac{1}{2}\left(u_x+u_x\right)+\frac{i}{2}\left(v_x+v_x\right)=u_x+iv_x=f'$$

קושי-רימן

$\Leftarrow$ **מש"ל *II***.

ב. נחשב את $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}f$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)f=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}-i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+i\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)f=\frac{1}{4}\Delta f$$

תרגיל מס' 5

נתון: $u(x,y)$ הרמונית.

א. צ"ל: $f(x+iy)=\frac{\partial}{\partial z}u(x,y)=\frac{1}{2}u_x-\frac{i}{2}u_y$ אנליטית.

ב. צ"ל: u_x הרמונית. מצאו פונקציה הרמונית צמודה.

פתרון

א. u הרמונית ולכן גזירה פעמיים ברציפות, לכן u_x,u_y גזירות ברציפות, ולכן כדי להוכיח ש-f אנליטית מספיק להראות ש- $\frac{u_x}{2},-\frac{u_y}{2}$ מקיימות את תנאי קושי-רימן.

לפי התרגיל הקודם, $\frac{u_x}{2},-\frac{u_y}{2}$ מקיימות קושי-רימן אמ"מ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

אבל - $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}u$, ושוב לפי התרגיל הקודם נקבל: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{4}\Delta u=0$.

u הרמונית

ונקבל כי $\frac{u_x}{2},-\frac{u_y}{2}$ מקיימות קושי-רימן, ולכן f אנליטית – **מש"ל**.

ב. f אנליטית, לכן גם $g=2f=u_x+iu_y$ אנליטית.
לכן, נסיק כי u_x הרמונית, ו- $-u_y$ היא הרמונית צמודה לה.

תרגיל מס' 6 (מבוחן אמצע 2002-ב')

נניח שפונק' ממשית $f\left(z\right)$ (כלומר פונק' מרוכבת שערכיה ממשיים), $z=x+iy$, היא C^2 והרמונית בתחום $U\subseteq\mathbb{C}$. הוכיחו שהפונק' המרוכבת $F\left(z\right)=\frac{\partial f}{\partial z}$ היא אנליטית בתחום U.

פתרון

לפי ההגדרה - $F\left(z\right)=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
כעת, כיוון ש-f ממשית, אז גם נגזרותיה החלקיות ממשיות. לכן, אם נסמן: $F=u+iv$, אז מתקיים בהכרח - $u=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x},v=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$.
נתון כי f גזירה פעמיים ברציפות, לכן נסיק כי u,v גזירות ברציפות. לכן כדי ש-F תהיה אנליטית, כל מה שנשאר לבדוק הוא ש-u,v מקיימות את תנאי קושי-רימן.
נבדוק זאת:

$$u_x=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=$$

$$v_y=\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)_y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

נשתמש בעובדה ש-f הרמונית, ונסיק כי $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, ולכן: $u_x=v_y$.

$$u_y=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$v_x=\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

ומקבלים: $u_y=-v_x$.
קבלנו אם כן תנאי קושי-רימן מתקיימים, ו-u,v גזירות ברציפות, ולכן עפ"י המשפט, נסיק כ-F אנליטית ב-U- **מש"ל**.