העתקות אלמנטריות

תזכורת:

הרחבת פונקציית האקספוננט:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$$

הרחבת הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

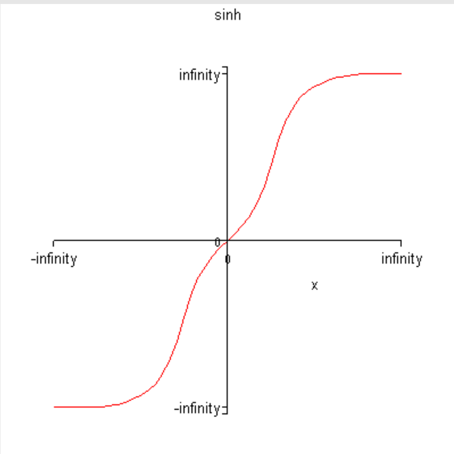
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

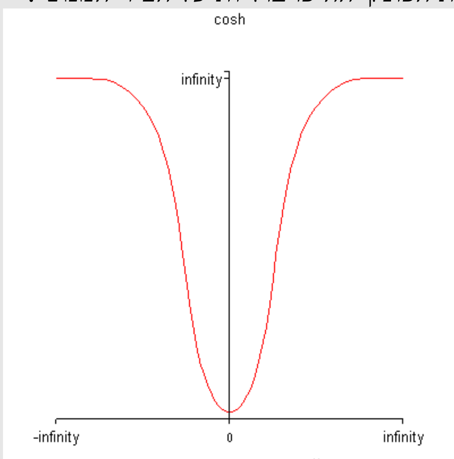
הפונקציות ההיפרבוליות:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

תמונת הפונק' ההיפרבוליות על הציר הממשי:





תרגיל מס' 1

הוכיחו כי:

א. $e^{\bar z} = \overline{e^z}$.

ב. $\sin\left(\bar z\right) = \overline{\sin z}$

פתרון

א. $e^{\bar z} = e^{x-iy} = e^x\left(\cos y - i\sin y\right) = \overline{e^x\left(\cos y - i\sin y\right)} = \overline{e^z}$.

ב. $$\sin\left(\bar z\right) = \frac{e^{i\bar z} - e^{-i\bar z}}{2i} = \frac{e^{\overline{-iz}} - e^{\overline{iz}}}{\overline{-2i}} = \frac{\overline{e^{-iz}} - \overline{e^{iz}}}{\overline{-2i}} = \overline{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)} = \overline{\sin z}$$

$i\bar z = i\left(x - iy\right) = ix + y =$

$\overline{-ix + y} = \overline{-i\left(x + iy\right)} = \overline{-iz}$

$e^{\bar z} = \overline{e^z}$

תרגיל מס' 2

הוכיחו את הזהויות הבאות (עבור הפונקציות המרוכבות, כמובן!):

א. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

ב. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

פתרון

א. נשתמש בהגדת הפונק' ההיפרבוליות:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4}\right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

(בדרך דומה ניתן להוכיח גם את השיוויון: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

ב. נתחיל מהכיוון השני של השוויון:

$$\cos z \cos w - \sin z \sin w = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right) - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right) =$$

$$\frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} - \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{-4} =$$

$$\frac{2e^{i(z+w)} + 2e^{-i(z+w)}}{4} = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w)$$

תרגיל מס' 3

חשבו את הנגזרות של הפונקציות: $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$.

פתרון

נחשב את הנגזרות עפ"י הגדרת הפונקציות, ובהסתמכך על כך ש- $\left(e^z\right)' = e^z$:

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{-2i} = -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = -\sin z$$

$$(\sinh z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$(\cosh z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$$

תרגיל מס' 4

א. פרקו את $\sin(x+iy),\cos(x+iy)$ לחלק ממשי וחלק מדומה.

ב. פרקו את $\sinh(x+iy),\cosh(x+iy)$ באותה צורה.

פתרון

א. נפתח את נוסחת ה-*sin*:

$$\sin(x+iy)=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos(-x)+i\sin(-x))}{2i}=$$

$$=\frac{\cos x\left(e^{-y}-e^{y}\right)}{2i}+i\cdot\frac{\sin x\left(e^{-y}+e^{y}\right)}{2i}=\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+i\cos x\cdot\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=$$

$$=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

באופן דומה נקבל כי: $\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$.

ב. נפתח את נוסחת ה-*sinh*:

$$\sinh(x+iy)=\frac{e^{x+iy}-e^{-(x+iy)}}{2}=\frac{e^{x}(\cos y+i\sin y)-e^{-x}(\cos(-y)+i\sin(-y))}{2}=$$

$$=\cos y\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+i\sin y\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cos y\sinh x+i\sin y\cosh x$$

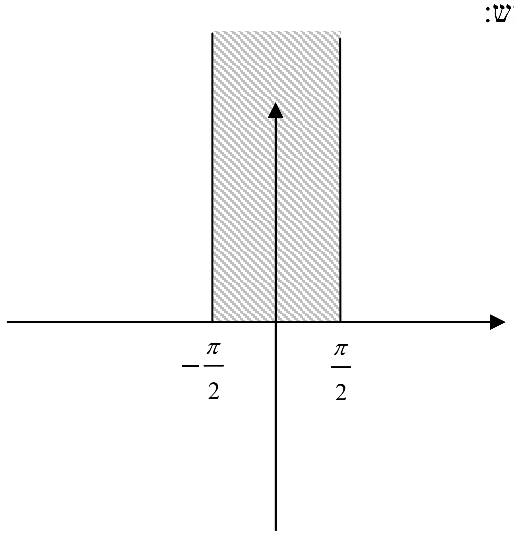
באופן דומה נקבל כי: $\cosh(x+iy)=\cos y\cosh x+i\sin y\sinh x$.

תרגיל מס' 5

מצא את תמונת התחום $D=\left\{z\mid-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\operatorname{Im}z>0\right\}$ תחת ההעתקה $\sin z$.

פתרון

נצייר את התחום המבוקש:



נבדוק לאן עוברת שפת התחום:
ראשית, נזכר כי: $\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$. כעת נעבור על 3 חלקי השפה:

I. הקרן: $\left\{\operatorname{Re} z=\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} Z\geq 0\right\}$ = Γ_1 - מועתקת ל-

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cosh y+i\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sinh y=\cosh y$, $0\leq y<\infty$ ולכן הקרן מועתקת לקטע $[1,\infty)$ (עבור כל y ממשי אי שלילי הפונק' *cosh* מקבלת כל ערך ממשי שהוא גדול או שווה ל-1, תזכרו בגרף של הפונק' *cosh* הממשית).

II. הקרן: $\left\{\operatorname{Re} z=-\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} Z\geq 0\right\}$ = Γ_2 - מועתקת ל-

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cosh y+i\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sinh y=-\cosh y$, $0\leq y<\infty$ ולכן הקרן מועתקת לקטע $(-\infty,-1]$.

III. הקטע: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ מועתק ל- $\sin x\cosh 0+i\cos x\sinh 0=\sin x$,

$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ ולכן הקטע מועתק על הקטע הממשי - $[-1,1]$.

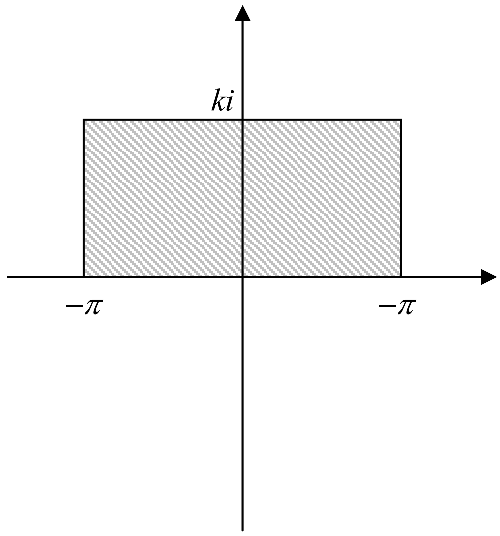
סה"כ קיבלנו אם כן כי שפת התחום D מועתקת על $[1,\infty)\cup(-\infty,-1]\cup[-1,1]=(-\infty,\infty)$, כלומר שפת התחום היא כל הציר הממשי.
לכן נסיק כי תמונת התחום היא החצי העליון או החצי התחתון של המישור המרוכב.
נשים לב כי הנק' i נמצאת בתחום D, וכן: $\sin(i)=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=-\frac{i}{2}\left(e^{-1}-e\right)=\frac{i}{2}\left(e-e^{-1}\right)$
כלומר, תמונת i נמצאת בחצי המישור העליון ולכן נסיק כי תמונת התחום D היא חצי המישור העליון.

תרגיל מס' 6

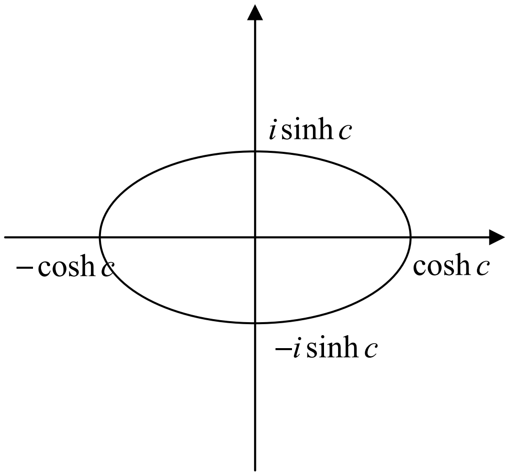
מצא את תמונת התחום: $D=\{-\pi\leq\operatorname{Re} z\leq\pi, 0\leq\operatorname{Im} z\leq k\}$ תחת ההעתקה: $\sin z$.

פתרון

נצייר את התחום:



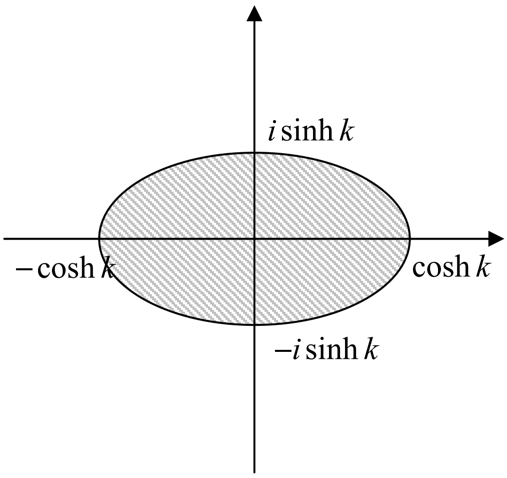
נשים לב כי התחום מורכב מאוסף של אינסוף קטעים - $l_c=\left\{x+iy\,|\,-\pi\le x\le\pi, y=c\right\}$,
כאשר $0\le c\le k$.
נמצא מהי התמונה של כל קטע כזה. נתחיל במקרה ש- $c>0$.
נסמן: $u+iv=\sin z$.
נזכר כי: $\sin\left(x+iy\right)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$.
ולכן נקבל: $u=\sin x\cosh c, v=\cos xh\sinh c$, כאשר: $-\pi\le x\le\pi$.
נשים לב כי: $\frac{u^2}{\cosh^2 c}+\frac{v^2}{\sinh^2 c}=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, תמונת הקטע היא האליפסה:



במקרה ש- $c=0$ אז נקבל: $\sin z=\sin x$ כאשר $-\pi\le x\le\pi$, ולכן תמונת הקטע, תהיה הקטע: $\left[-1,1\right]$.

לכן, לסיכום, תמונת התחום, היא אוסף כל האליפסות: $\frac{u^2}{\cosh^2 c}+\frac{v^2}{\sinh^2 c}=1$, $0\le c\le k$,

ולכן זוהי בעצם האליפסה: $\frac{u^2}{\cosh^2 k}+\frac{v^2}{\sinh^2 k}=1$ ביחד עם הפנים שלה.



תרגיל מס' 7

א. יהי $w\in\mathbb{C}$ כלשהו, הוכיחו כי למשוואה: $\sin z = w$, יש אינסוף פתרונות.
ב. הוכיחו כי לכל $c\in\mathbb{R},|c|\le 1$, הפתרונות של המשוואות: $\sin z = c$ הם ממשיים בלבד.

פתרון

א. נפתור את המשוואה: $\sin z = w$:
המשוואה הנ"ל שקולה למשוואה: $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=w$.
נכפיל ב- $2ie^{iz}$ ונקבל: $e^{2iz}-1=2iwe^{iz}$.
נסמן: $t=e^{iz}$, ונקבל את המשוואה הריבועית: $t^2-2iwt-1=0$.
בשדה המרוכבים, <u>לכל</u> משוואה ריבועית יש לפחות פתרון אחד, נסמנו כ- $z_1=r_1e^{i\theta_1}$.
כלומר נקבל: $e^{iz}=r_1e^{i\theta_1} \;\Leftarrow\; e^{i(x+iy)}=e^{-y}e^{ix}=r_1e^{i\theta_1}$

$$\Downarrow$$

$$e^{-y}=r_1 \Rightarrow y=-\ln r_1=\ln\frac{1}{r_1}$$

$$x=\theta_1+2\pi k \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

ואם כן קיבלנו כי כל מספר מרוכב מהצורה: $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ $\quad z=\theta_1+2\pi k+i\ln\dfrac{1}{r_1}$ פותר את המשוואה, ויש כמובן אינסוף כאלו. בדרך דומה ניתן להוכיח אותה טענה כלפי הפונקציה: $\cos z$.

שימו לב להבדל חשוב בין $\sin,\cos$ הממשיות לגראותיהן המרוכבות –
הפונקציות הממשיות הינן חסומות ($|\sin x|,|\cos x|\le 1$), ואילו במישור המרוכב פונקציות אלו יכולות לקבל כל ערך שהוא, ובפרט **אינן חסומות!**

ב. יהי $c\in\mathbb{R},|c|\le 1$. ונניח כי $\sin z = c$ (לפי סעיף א' בהכרח קיים z כזה).
נסמן: $z=x+iy$ ונוכיח כי $y=0$.
נזכר כי: $\sin\left(x+iy\right)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=c\in\mathbb{R}$.

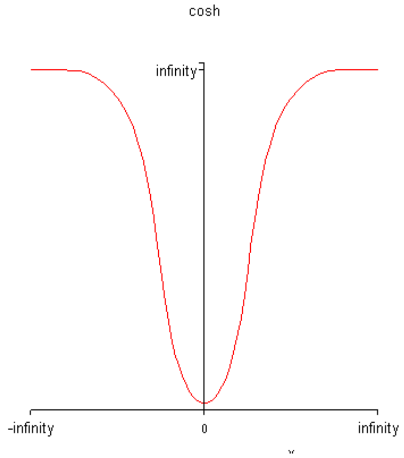
$$\Downarrow$$
$$\sin x \cosh y = c$$
$$\cos x \sinh y = 0$$

(השוואת חלקים ממשיים ומדומים).

כעת מהשיוויון השני נובע כי בהכרח מתקיים אחד מהשנים: $\cos x = 0$ או $\sinh y = 0$.

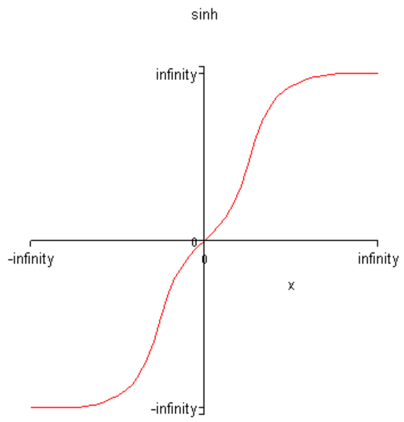
I. אם $\cos x = 0$, אז בהכרח $|\sin x| = 1$ ולכן מהשיוויון הראשון נסיק כי חייב להתקיים: $|\cosh y| \le 1$.

נזכר שוב, בגרף של הפונק' cosh הממשית:



מכאן ניתן להסיק כי הנק' היחידה בה מתקיים $|\cosh y| \le 1$ היא $y = 0$.

II. אם $\sinh y = 0$, אז מהסתכלות שוב בגרף הפונק' sinh הממשית:



נסיק כי בהכרח $y = 0$.

כלומר בשני המקרים הגענו למסקנה כי $y = 0$ ולכן נסיק כי z הוא מספר ממשי טהור – **מש"ל**.

תרגיל מס' 8

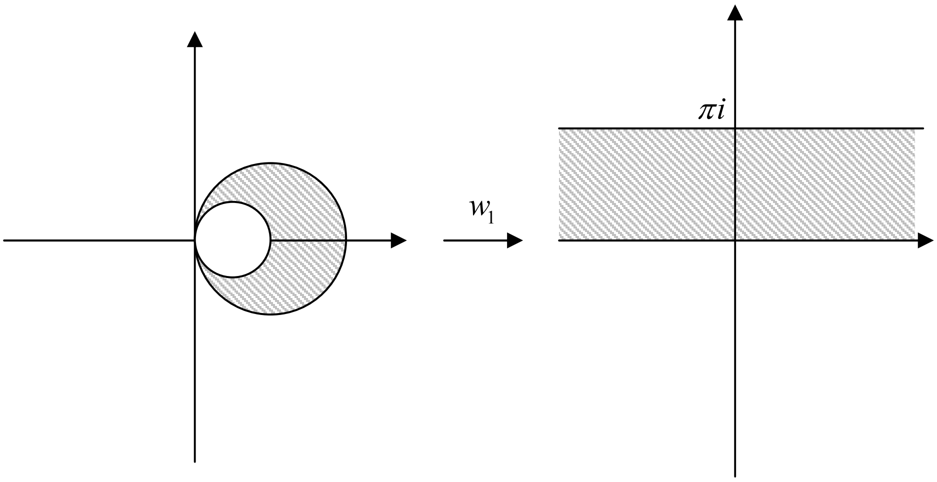
נסמן: $D = \{z \mid |z-1| > 1, |z-2| < 2\}$.

מצא העתקה קונפורמית המעתיקה את D על חצי המישור העליון.

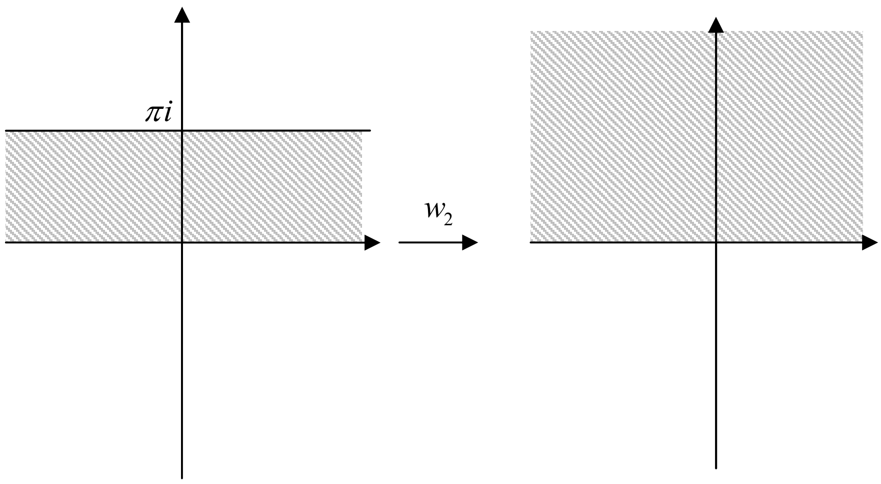
פתרון:

נחלק את מציאת ההעתקה לשני שלבים:

I. נמצא העתקה w_1 המעתיקה את הסהרון על הרצועה: $D_2=\{z \mid 0<\operatorname{Im} z<\pi\}$



II. נמצא העתקה w_2 המעתיקה את D_2 על חצי המישור העליון.



אז ככה:

I. נשים לב, ששפת התחום מורכבת משני מעגלים, ומועתקת לשפת D_2 המורכבת משני ישרים. העתקה שאנחנו מכירים שמעתיקה מעגלים על ישרים היא כמובן העתקת מביוס. לכן נחפש העתקת מביוס מתאימה.

ראשית, נשים לב כי חיתוך המעגלים הוא בנק' $z=0$ וחיתוך הישרים הוא בנק' $w=\infty$, לכן נדרוש: $w(0)=\infty$.

כמו כן, נשים לב כי הציר הממשי מאונך ל-2 המעגלים ולכן הוא מועתק על מעגל מוכלל המאונך לשני הישרים. אין מעגל שמאונך לשני הישרים (כי אם הוא מאונך לישר, זה אומר שהקוטר שלו מונח על הישר וברור שלא יכול להיות שהקוטר מונח על שני הישרים...). לכן תמונת הציר הממשי היא קו ישר המאונך לציר הממשי, ולכן מקביל לציר המדומה. נבחר נק' כך שהציר הממשי יועתק על הציר המדומה -

$w(2)=0, w(4)=\pi i$ (בחרנו נקודות חיתוך של המעגלים עם הציר הממשי, כך שתמונותיהן יהיו נקודות החיתוך של הציר המדומה עם הישרים בתמונה).

ואם כן קיבלנו 3 נקודות להציב בנוסחת היחס הכפול: $z_1 = 0 \quad w_1 = \infty$, $z_2 = 2 \quad w_2 = 0$, $z_3 = 4 \quad w_3 = \pi i$.

נציב ובסוף נקבל את ההעתקה: $w_1(z) = 2\pi i \dfrac{z-2}{z}$.

II. נסמן: $w_2(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ ונקבל:

$$w_2(D_2) = \left\{ e^x(\cos y + i\sin y) \mid -\infty < x < \infty, 0 < y < \pi \right\} = \left\{ re^{i\theta} \mid 0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi \right\}$$

כלומר תמונת D_2 תחת w_2 היא אכן חצי המישור העליון.

ולכן ההעתקה המבוקשת היא: $w_2 \circ w_1 = e^{2\pi i \cdot \frac{z-2}{z}}$.

תרגיל מס' 9

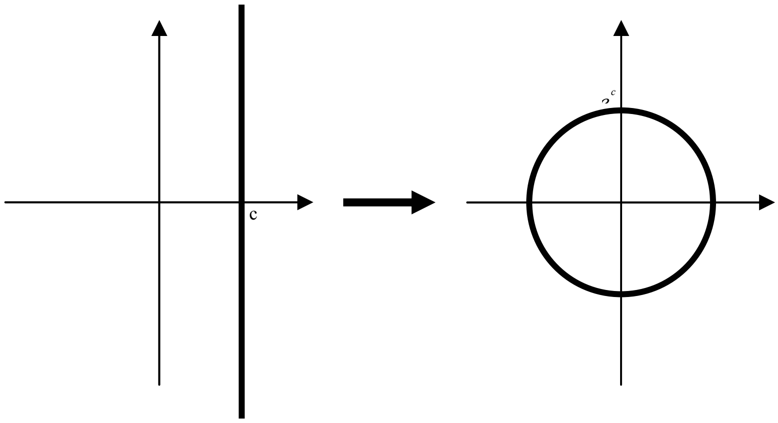
א. מצא את התמונה של הישר: $l_c = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = c, c \in \mathbb{R} \right\}$ תחת ההעתקה: $w = e^z$.

ב. מצא את התמונה של הישר: $t_c = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = c, c \in \mathbb{R} \right\}$ תחת ההעתקה: $w = e^z$.

ג. מצא את התמונה של התחום: $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid x_1 < \mathrm{Re}\, z < x_2, y_1 < \mathrm{Im}\, z < y_2 \right\}$ תחת ההעתקה $w = e^z$.

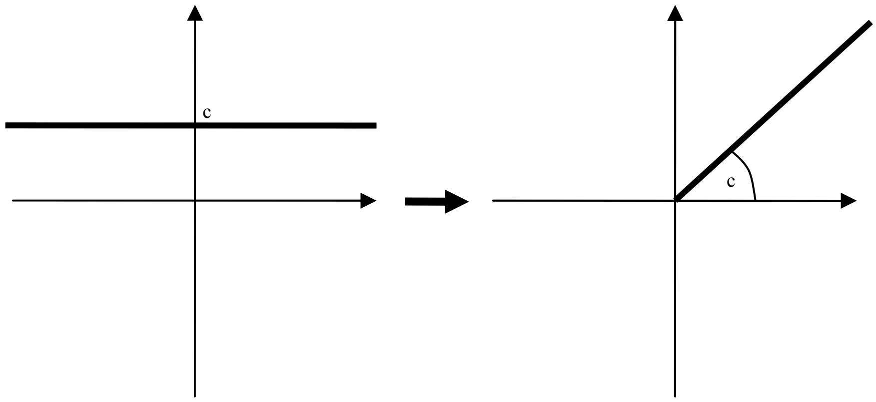
פתרון:

א. לכל $z \in l_c$ מתקיים: $z = c + iy$ ולכן: $w(z) = e^{c+iy} = e^c(\cos y + i\sin y)$. כלומר, התמונה היא מספר מרוכב שערכו המוחלט הוא e^c והארגומנט שלו הוא y. כיוון ש-y יכול לקבל כל ערך ממשי שהוא, נסיק כי תמונת הישר ע"י w היא קבוצת כל הנק' שערכם המוחלט הוא e^c, כלומר זהו המעגל: $C_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = e^c \right\}$:

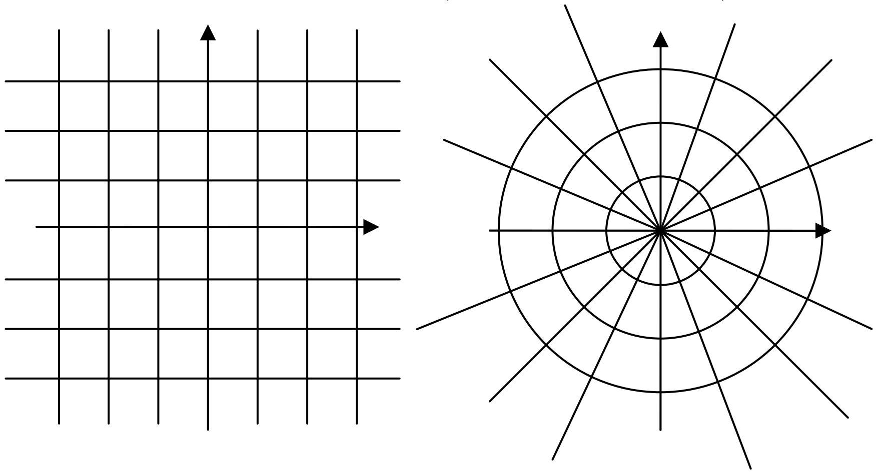


ב. לכל $z \in t_c$ מתקיים: $z = x + ic$ ולכן: $w(z) = e^{x+ic} = e^x(\cos c + i\sin c)$. כלומר, התמונה היא מספר מרוכב שהארגומנט שלו הוא קבוע- c והערך המוחלט שלו תלוי ב-x. כיוון ש-x יכול לקבל כל ערך ממשי שהוא, נסיק כי התמונה של הישר היא כל המספרים המרוכבים בעלי ארגומנט c, כלומר הקרן היוצאת מהראשית בזווית c (ביחס לציר הממשי),

כלומר:



ג. נשים לב כי מהסעיפים הקודמים נובע כי רשת הקווים המאונכים לצירים מועתקת לרשת של מעגלים וקרניים היוצאות מהראשית, כלומר:



מכאן ניתן לראות כי תמונת התחום המבוקש היא: $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid x_1 < |z| < x_2 ,\, y_1 < \arg z < y_2 \right\}$.

שימו לב כי ההעתקה קונפורמית, ואכן רשת הקווים המאונכים מועתקת על מעגלים וקרניים המאונכים זה לזה (הקרניים יוצאות ממרכז המעגל, כלומר מתלכדות עם רדיוס המעגל ולכן מאונכות למשיק).