

מעגלים מסדר ראשון

כללי:

- ע"י משוואות KVL, KCL נגיע למד"ר.
- פתרון ZIR (Zero Input Response):**
 - אין מקור (מקצרים מקור מתח, מנתקים מקור זרם) = פתרון הומוגני בלבד.
 - יש רק תנאי התחלה.

$$\dot{y} + s \cdot y = 0 \left\{ \begin{array}{l} y(t) = Ke^{-st} \\ y(0^-) = K \end{array} \right.$$

הערה: תהי-ב- 0^- שווים לתהי-ב- 0^+ כי 0 היא פונקציה קבועה – חסומה ורציפה.

פתרון ZSR (Zero State Response):

- יש מקור.
- תנאי התחלה שווים לאפס.
- קיים פתרון הומוגני + פרטי.

$$\dot{y} + s \cdot y = f(t) \left\{ \begin{array}{l} y^{ZSR}(t) = (y_p + y_H) \cdot U(t) \\ y(0^-) = 0 \end{array} \right.$$

ד. הפתרון הומוגני דומה בצורתו ל-ZIR:
 $y_H = Ne^{-st}$

ה. הפתרון הפרטי:
 - מקור מסוג $\sin(\omega_0 t)$ או $\cos(\omega_0 t)$ יגרו תגובה מסוג:

$$y_p = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

- מקור מסוג $a \cdot t^2$ יגרו תגובה מסוג:
 $y_p = b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

מציאת קבועים - ע"י הצבת הפתרון הפרטי + הומוגני במד"ר והשוואת המקדמים בהתאמה לפונקציה המתאימה באגף ימין, או וגם ע"י שימוש בת.ה.

פתרון כללי:

$$y = y_{ZSR} + y_{ZIR}$$

מעגל מסדר ראשון עם ערוך הלם:

לגבי פתרון ה-ZSR קיימות 3 דרכים:
 1. פתרון כערוך מדרגה וגזירת פתרון ה-ZSR.
 2. המרה לבעיית ZIR עם ת.ה חדשים:

$$p \cdot \dot{y} + q \cdot y = 0 \quad (t > 0)$$

$y(0^+) = ?$

נבצע אינטגרל $\int_{0^+}^{0^-} (\dots) dt$ על המד"ר המקורית ונקבל:

$$y(0^+) = \frac{h}{p}$$

3. פתרון ישיר של בעיית ה-ZSR.

הערות:

- ZSR בלבד מקיים את תכונת הליניאריות:
 - אם נתון ש- $f(t)$ בכניסה גורר $g(t)$ ביציאה אז:
 - סופרפוזיציה: \sum על ערוכים גורר \sum על המוצא. **ניתן לעשות סופרפוזיציה למקורות אך לא לתה.**
 - הזזה בזמן: $f(t-t_0)$ גורר $g(t-t_0)$.
 - גזירה: $\frac{df(t)}{dt}$ גורר $\frac{dg(t)}{dt}$.
 - אינטגרציה: $\int_0^t f(t') dt'$ גורר $\int_0^t g(t') dt'$.

ה. לכל אופרטור ליניארי:
 $G(af_1(t) + bf_2(t)) = aG(f_1) + bG(f_2)$

2. **פרט לערוך הלם ונגזרותיו מתיקים:**
 רציפות מתח על קבל - $V_C(0^-) = V_C(0^+)$
 רציפות זרם על סליל - $I_L(0^-) = I_L(0^+)$

3. יש לכפול את ה-ZSR ב- $u_C(t)$ לפני חיבור ל-ZIR.
 4. היחידות של RC ; $\frac{L}{R}$; \sqrt{LC} [sec].

- ב-ZSR: אם הפתרון הפרטי זהה בצורתו להומוגני - יש למצוא פתרון פרטי אחר (בד"כ יש לכפול את הפתרון הפרטי ב- t).
- הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר במד"ר תקבל תמיד את אי הרציפות מהאגף השני במשוואה.

מעגלים מסדר שני

כללי:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = f(t)$$

$$y(0^-) = y_0$$

$$\dot{y}(0^-) = \dot{y}_0$$

$$\alpha = \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \text{ - קבוע הריסון של המעגל.}$$

$$\omega_0 = \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \text{ - תדר התהודה של המעגל.}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \text{ - גורם האיכות של מד"ר מסדר 2.}$$

הערה: Q מלמד עד כמה פתרון המשוואה אוסילטורי ולא דועך.

מד"ר לפתרון:

- מציאת ת.ה מתאימים ב- 0^- וחישוב - ω_0, α, Q .
- מציאת מד"ר:
 - ע"י KCL וקבל מד"ר כפונקציה של v.
 - ע"י KVL וקבל מד"ר כפונקציה של i.
- ZIR:
 - פולינום / משוואה אופיינית:

$$P(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

ג. מציאת פתרון הומוגני:
 1. ריסון יתר: $S_{1,2}$ ממשיים ושליילים ושונים:

$$Q < 1/2; \alpha > \omega_0 \quad y = e^{-\alpha t} \left(\frac{S_1 - B}{S_1 - A} e^{S_1 t} + \frac{B - S_2}{S_2 - A} e^{S_2 t} \right)$$

2. ריסון קריטי: $S_{1,2}$ ממשיים ושליילים וזהים:

$$Q = 1/2; \alpha = \omega_0; S_1 = S_2 = -\alpha \quad y = A e^{-\alpha t} + B t e^{-\alpha t}$$

3. תת ריסון: $S_{1,2}$ מרוכבים:

$$Q > 1/2; \alpha < \omega_0 \quad y = e^{-\alpha t} \left(A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t) \right)$$

מעטפת $ke^{-\alpha t}$
 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}; S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$

$$y_H = e^{-\alpha t} (A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)) = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \rho)$$

4. אין ריסון: $S_{1,2}$ דמיוניים טהורים:

$$Q \rightarrow \infty; \alpha \rightarrow 0; S_{1,2} = \pm j\omega_0 \quad y_H = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) = K \cos(\omega_0 t + \rho)$$

ד. הצבת ת.ה בפתרון למציאת המקדמים + הגזירה של הפתרון.

ZSR:

- פתרון הומוגני בצורת פתרון ה-ZIR.
- מציאת פתרון פרטי.
- הצבת הפ. הפרטי במד"ר למציאת המקדמים שלו.
- הצבת ת.ה בפיתרון ZSR ובנגזרתו למציאת המקדמים של הפ. ההומוגני.
- אם הערוך תלוי בפונק' הלם יש להפוך את הבעיה לבעיית ZIR עם ת.ה חדשים - ראה "מעגל מסדר ראשון עם ערוך הלם" בעמ' 1, עמודה ראשונה משמאל.
- פתרון כללי: $y = y_{ZSR} + y_{ZIR}$

הערה: את הפולינום / משוואה אופיינית פיתחו ע"י הצבת פתרון הומוגני מסוג $y_H = e^{st}$ במד"ר ההומוגני.

תגובה לערוך אקספוננציאלי

$$S \triangleq \frac{d}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{S} \triangleq \int_{-\infty}^t \dots$$

$$V(t) = R \cdot I(t) = RI_0 e^{st} \quad \text{נגד:}$$

$$\frac{1}{sc} = \text{קבל: עכבה / אימפדנס}$$

$$SL = \text{משרן: עכבה / אימפדנס}$$

מציאת מד"ר ע"י אופרטור גזירה S:

- נפעיל שיטת מתיחי צמתים / זרמי חוגים, כאשר מתייחסים לקבלים ולסלילים כנגדים ע"פ ההגדרות הנ"ל.
- ע"י כלל קריימר נמצא ביטוי למשנתה הרצוי.
- מגיעים לפונקציה מתסורת:
- המכנה הוא למעשה הפולינום האופייני.
- כופלים במכנה, עוברים למישור t (איפה שמופיע S גוזרים) ומקבלים את המד"ר.

סד"פ למציאת פתרון פרטי ע"י S:

- מתייחסים לקבלים ולסלילים כנגדים.
- מחשבים את העכבה של המעגל (Z) כאשר S הוא המערך של e.
- מוצאים פתרון פרטי ע"י הנוסחה:

$$V(t) = I(t)Z = I_0 e^{st} \cdot Z$$

הערה: רק אם כל המקורות אקספוננציאליים אז ניתן למצוא פתרון פרטי ע"י שימוש באופרטור גזירה S.

קונבולוציה

שימוש: מציאת התגובה לעירור כלשהו, בעזרת התגובה להלם של המערכת הנתונה.

- נתונה מערכת ליניארית ב"ת בזמן - LTI. כניסת המערכת: ערוך - מקור מתח / זרם: $x(t)$. מוצא המערכת: תגובה - מתח / זרם על רכיב: $y(t)$. תגובת הלם (התגובה לערוך הלם): $h(t)$.

$$y(t)_{Total} = y_{(t)}^{ZIR} + y_{(t)}^{ZSR} = y_{(t)}^{ZIR} + convolution$$

פתרון ZIR יימצא באופן רגיל.

פתרון ZSR יימצא ע"י קונבולוציה:

$$y_{(t)}^{ZSR} = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^\infty x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau$$

מערכת סיבתית:

מערכת בה התגובה לא תתחיל לפני הערוך. במציאות - כל מעגל חשמלי הוא מערכת סיבתית.

הערות:

- פתרון הקונבולוציה יהיה כפונקציה של t.
- נשתמש בשיטה גרפית לפיתרון - כאשר נבדוק איך מתנהג האינטגרל לערכים שונים של t.

סד"פ למציאת פתרון ZSR בעזרת קונבולוציה:

- בוחרים את h או x לפי נוחות - והופכים את הפונקציה על ציר τ (בגלל $(t - \tau)$).
- מזיזים את הפונקציה שהפכנו לפי t, ורצים על כל הערכים האפשריים של t.
- כאשר בתחום מסוים של t, יש חפיפה בין הפונקציות, מחשבים את אינטגרל הקונבולוציה (תחומי אינטגרציה - ע"פ התחום של t).
- מחברים את כל תוצאות האינטגרלים וזהו הפיתרון.

תכונות הקונבולוציה:

- $x * h = h * x$
- $(g + h) * x = g * x + h * x$
- $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- $(h * x)' = h' * x = h * x'$
- אם: $y(t) = x(t) * h(t)$ אז: $x(t) * h(t - t_0) = y(t - t_0)$

עבור דובלט:

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t) * \delta(t) = x'(t)$$

$$x(t) * u(t) = x(t) * \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) * \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$x(t) * \sum h(t) = \sum [x(t) * h(t)]$$

$$h(t)_{eq} = h_1(t) * h_2(t)$$

מצב סינוסי עמיד

זהו המצב לאחר אינסוף זמן, כאשר התגובה הדועכת כבר לא משפיעה. (ערוך - z)

שיקוף:

הפיכת מעגל עם שנאי אידיאלי למעגל אחד. מעבירים אלמנטים ומקורות מהמעגל המשוני למעגל הראשוני באופן הבא, כאשר **2 הזרמים נכנסים לנק'**:

ערך חדש בראשוני	ערך במשני
$Z_L \cdot (n_1/n_2)^2$	Z_L
$R \cdot (n_1/n_2)^2$	R
$L \cdot (n_1/n_2)^2$	L
$C \cdot (n_2/n_1)^2$	C
$v_2 \cdot (n_1/n_2)$	v_2
$-I_2 \cdot (n_1/n_2)$	I_2

הערות:

- כאשר זרם אחד יוצא מהנק' והשני נכנס - אז $I_2 = I_1$ יעבור ב- "+".
- בהעברת אלמנטים מהראשוני למשוני (n_1/n_2) יוחלף ב- (n_2/n_1) .

מקורות מבוקרים

למקור מבוקר מתייחסים כרכיב / אלמנט (מבחינת מוסכמות) ולא כמקור רגיל.



סימון:

קיימים 4 סוגי מקורות מבוקרים:

1. מקור זרם מבוקר מקור זרם: $v_1 = 0$, $I_2 = \alpha \cdot I_1$ } **Current Ratio**: $\alpha = \frac{I_2}{I_1}$
2. מקור זרם מבוקר מתח: $I_1 = 0$, $I_2 = g_m \cdot v_1$ } **Transfer Conductance**: $g_m = \frac{I_2}{v_1}$
3. מקור מתח מבוקר מתח: $I_1 = 0$, $v_2 = \mu \cdot v_1$ } **Voltage Ratio**: $\mu = \frac{v_2}{v_1}$
4. מקור מתח מבוקר זרם: $v_1 = 0$, $v_2 = r_m \cdot I_1$ } **Transfer Resistance**: $r_m = \frac{v_2}{I_1}$

הערה: אסור לנתק / לקצר מקור מבוקר ביוזמתנו.

מקור מבוקר שלילי:

יתכן שיווצר מצב שבו Z_{in} שכולל בין היתר מקור מבוקר, יקבל ערך התנגדות שלילי ($-Z_{in}$) נותן הספק למעגל).

תוספות:

מד"ר ל RLC טורי:

$$V_c + \frac{R}{L}V_c + \frac{1}{LC}V_c = \frac{1}{LC}V_s$$

$$I + \frac{R}{L}I + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}V_s$$

מד"ר ל RLC מקבילי:

$$V + \frac{1}{RC}V + \frac{1}{LC}V = \frac{1}{C}I_s$$

$$I_L + \frac{1}{RC}I_L + \frac{1}{LC}I_L = \frac{1}{LC}I_s$$

נאי להספק מקסימלי:

$$Z_L = Z_{TH}^* \text{ or } Z \in \mathbb{R}$$

$$R_L = R_S$$

תנאי לבליעת הספק:

$$\text{Re}\{v/I\} > 0$$

הספק ממוצע:

$$P_{av} = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle V - \angle I) = \frac{1}{2}\text{Re}\{\hat{V} \cdot \hat{I}^*\}$$

$$= \frac{1}{2}|\hat{I}|^2 \text{Re}\{Z\} = \frac{1}{2}|\hat{V}|^2 \text{Re}\{Y\} \text{ מקור } - Y^*$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$P_{av} = I_{eff} \cdot V_{eff} \cdot \cos(\angle V - \angle I)$$

הספק מרוכב:

$$S = \frac{1}{2}\hat{V} \cdot \hat{I}^*$$

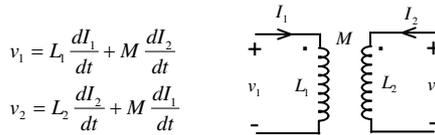
Power Factor:

$$P.F = \cos \theta = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\frac{1}{2}\hat{V} \cdot \hat{I}^*}$$

אלמנטים מצומדים

הכוונה לסלילים שינוי בזרם באחד גורר מתח מושרה בסליל השני.

M - השראה הדדית.



דוגמא:

מצב סינוסי עמיד, וזרמים בכיוונים הפוכים:

$$\hat{v}_1 = -j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2$$

$$\hat{v}_2 = +j\omega L_2 \hat{I}_2 - j\omega M \hat{I}_1$$

הערה: הנקודה ליד הסליל קובעת את סימנו של האיבר עם M ביחס לאיבר עם L.

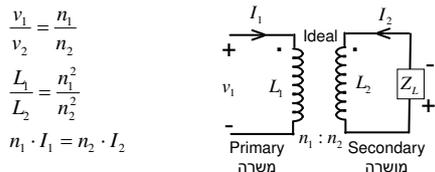
מקדם צימוד - K:

$$K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \Rightarrow 0 \leq K \leq 1$$

K = 1 - צימוד מלא.
K = 0 - אין צימוד.

שנאי אידיאלי:

1. אין בזבז אנרגיה.
 2. צימוד מלא: אין זליגת שטף מגנטי - כל השפעת השדה המגנטי עוברת לסליל השני.
 3. $L_1, L_2 \rightarrow \infty$
 4. בכל רגע סכום ההספקים הוא אפס: $v_1(t) \cdot I_1(t) + v_2(t) \cdot I_2(t) = 0$
- א. אין אגירת אנרגיה ואין בזבז אנרגיה.
ב. כל הספק שנכנס לשנאי דרך זוג הדקים אחד יזרום החוצה דרך הזוג השני.



- בעיות עם שנאי אידיאלי ניתן לפתור ב- 2 דרכים:
1. ע"י משוואות אלמנטים מצומדים והשאפת L לאינסוף.
 2. ע"י שיקוף.

$$z = A_m \cdot \cos(\omega t + \theta) = \text{Re}\{\hat{A} \cdot e^{j\omega t}\}$$

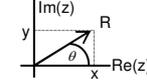
הצגה פולרית $\hat{A} = A_m \cdot e^{j\theta}$

הצגה קרטזית $\hat{A} = x + jy$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{|\text{Im}(\hat{A})| = |y|}{|\text{Re}(\hat{A})| = |x|}\right)$$

$$A_m = \sqrt{x^2 + y^2}$$

הערה: בקביעת θ יש לשייב לב לרביע בו נמצאים x ו-y.



אימפדנסים:

מרגע שמציגים את כל הרכיבים במעגל בפאזורים ואימפדנסים (עכבות), מתייחסים לאימפדנסים כהתנגדות רגילה.

Z - שקול התנגדות, Y - שקול למוליכות.

בקבל:

$$Z_c = \frac{1}{j\omega c} = \frac{-j}{\omega c}, Y_c = j\omega c$$

בסליל:

$$Z_L = j\omega L, Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$$

מצב תהודה (רזוננס):

המתח שמספק מקור סינוסי למעגל השקול והזרם שנכנס למעגל יהיו באותה פאזה. לכן:

$$\text{Im}(Z_m) = \text{Im}(Y_m) = 0$$

הערה: במעגל כללי אין חפיפה בין תדר התהודה ω_0 לבין הערך של ω_0 המופיע בנוסחאות מד"ר מסדר שני. אבל במעגלי RLC טורי ומקבילי פשוטים - יש זהות.

מקדם טיב - Q בתהודה:

זהו היחס בין גודל הזרם בסליל או קבל, לגודל זרם המקור. **במצב תהודה:**

$$Q = \frac{|\hat{I}_c|}{|\hat{I}_s|} = \frac{|\hat{I}_L|}{|\hat{I}_s|}$$

לגבי מעגל RLC מקבילי וטורי בתהודה:

1. Y_m - ממשי ומינימלי (Z_m - ממשי ומקסימלי).
2. בתהודה הזרם שמשופק ע"י המקור עובר דרך הנגד, והזרמים בסליל ובקבל מבטלים זה את זה.
3. $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

מעגל RLC מקבילי - Band Pass:

1. בתדר נמוך רוב הזרם זורם בסליל (ב-DC הסליל הוא קצר).
2. בתדר גבוה רוב הזרם זורם בקבל (הקבל שואף לקצר).
3. בתהודה הזרם דרך הנגד יהיה מקסימלי.
4. **3dB Pass Band**: הנקודות בהן הערך המוחלט של תגובת התדר H הוא $1/\sqrt{2}$ מערכו המירבי.

תגובת תדר:

$$H(j\omega) = \frac{\text{פאזור מוצא}}{\text{פאזור כניסה}}$$

הערה: בתהודה תגובת התדר מקסימלית. ניתן לחלק פאזור מתח בפאזור זרם או ההפך.

הספק רגעי:

$$P_{(t)} = v_{(t)} \cdot i_{(t)} = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle V - \angle I) + \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(2\omega t + \angle V + \angle I)$$

הספק משתנה בזמן, בתדר כפול הספק קבוע

הערה: הספק רגעי תמיד יהיה רק במישור הזמן.