11.3
11.7
11.8
11.9
11.11

פתרון לתרגיל 11.3

למצוא את $\phi^{(k)}(0)$ ע"י גזירה יהיה קשה. מוצע להגיע למומנטים דרך זיהוי המקד-
מים בפתוח טיילור של $\phi(t)$ סביב $t=0$:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{2}{t^2}(1+it-\overbrace{(\cos t + i\sin t)}^{e^{it}}) \\
&= \frac{2}{t^2}(1+it-(1+it+\frac{(it)^2}{2!}+\cdots+\frac{(it)^k}{k!}+\cdots)) \\
&= -i^2(1+\frac{2(it)}{3!}+\frac{2(it)^2}{4!}+\cdots+\frac{2(it)^k}{(k+2)!}+\cdots)
\end{aligned}$$

ז.א., המקדם של t^k הוא $a_k = \frac{2i^k}{(k+2)!}$ $\Longleftarrow$ $\boxed{EX^k = \frac{k!a_k}{i^k} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}}$

.

פתרון לתרגיל 11.7

נרשום תחילה עבור אורך החיים X : $F_X(x) = 1-\frac{27}{x^3}$, $x \geq 3$ (ו- 0 אחרת).

א. $P(X<5|X>4) = \frac{F_X(5)-F_X(4)}{1-F_X(4)} = \frac{\frac{27}{64}-\frac{27}{125}}{\frac{27}{64}} = \boxed{0.488}$.

ב. יש כאן 100 נסויי ברנולי (כל רכיב הוא נסוי), כאשר הסתברות הצלחתו
של כל אחד מהם היא $p = 1-F_X(5) = \frac{27}{125} = 0.216$.
אם נסמן את מספר הרכיבים שיהיו עדיין תקינים כעבור 5 שעות, אז

$$X \sim \text{Bin}(100, 0.216) \approx N(100\times 0.216, 100\times 0.216\times 0.784) = N(21.6, 16.93)$$

$$\Longrightarrow P(X \geq 85) \approx 1-\Phi\left(\frac{85-21.6}{\sqrt{16.93}}\right) = 1-\Phi(15.4) \approx \boxed{0} \ .$$

(היתה פה טעות דפוס בחוברת. המספר 85 היה צריך להיות 15 ואז

$$\Longrightarrow P(X \geq 15) \approx 1-\Phi\left(\frac{15-21.6}{\sqrt{16.93}}\right) = \Phi(1.6) = \boxed{0.945} \ ).$$

ג. עבור אורך החיים X_k של הרכיב מספר k:

$$EX_k = 81\int_3^\infty \frac{x}{x^4} = \frac{81}{2}x^{-2}\Big|_3^\infty = 4.5$$

$$EX_k^2 = 81\int_3^\infty \frac{x^2}{x^4} = 81x^{-1}\Big|_3^\infty = 27 \quad \Longrightarrow \quad \text{var}\, X = 27-4.5^2 = \frac{27}{4}$$

לכן, ושוב על פי משפט הגבול המרכזי,

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{k=1}^{100} X_k > 500)\right) &\approx 1-\Phi\left(\frac{500-100\times 4.5}{\sqrt{100\times\frac{27}{4}}}\right) \\
&= 1-\Phi(1.92) = \boxed{0.027} \ .
\end{aligned}$$

ד. אם נדגום n רכיבים, המספר Y_n של פגומים מהווה משתנה מקרי $\text{Bin}(n,p)$
עם $p=0.04$. עבור ההסתברות ש- $0.03 < \frac{Y_n}{n} < 0.05$ נרשום

$$\begin{aligned}
P\left(0.03 < \frac{Y_n}{n} < 0.05\right) &= P\left(-0.01 < \frac{Y_n - 0.04n}{n} < 0.01\right) \\
&= P\left(-0.01\sqrt{n} < \underbrace{\frac{Y_n-0.04n}{\sqrt{n}}}_{Z_n} < 0.01\sqrt{n}\right) \quad .
\end{aligned}$$

בהנחה ש-n גדול (הנחה שתתאמת בדיעבד), ושוב על פי משפט הגבול המרכזי, $Z_n \sim N(0,pq) = N(0, 0.04 \times 0.96) = N(0, 0.0384)$.
הדרישה היא, אם כן,

$$\begin{aligned} 0.99 &\le P(-0.01\sqrt{n} < Z_n < 0.01\sqrt{n}) \\ &= \Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{0.0384}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{0.0384}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{0.0384}}\right) - 1 \\ &\Rightarrow 0.995 \le \Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{0.0384}}\right) \overset{\text{טבלה}}{\Longrightarrow} \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{0.0384}} \ge 2.575 \Rightarrow n \ge 2546.16 \end{aligned}$$

ונסיק מכך שהדרישה תתקיים אם $\boxed{n \ge 2547}$.

פתרון לתרגיל 11.8

המשקל X של קרטון נתון ע"י $\sum_{k=1}^{75} X_k$, כאשר X_k הוא משקלה (בק"ג) של השקית מספר k. נתון $X_k \sim U[0.45, 0.55]$, כך ש- $EX_k = 0.5$ ו- $\sigma^2_{X_k} = (0.1)^2 \frac{1}{12}$, וכולם בלתי תלויים. על פי משפט הגבול המרכזי,

$$X \approx N\left(75 \times 0.5, \frac{75 \times 0.01}{12}\right) = N\left(35.5, \frac{1}{16}\right) \qquad \Longrightarrow$$

$$P(37.25 < X < 38) \approx \Phi\left(\frac{38 - 37.5}{0.25}\right) - \Phi\left(\frac{37.25 - 37.5}{0.25}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) \approx \boxed{0.819}$$

פתרון לתרגיל 11.9

X = מספר התוצאות 6 ב- 300 זריקות קוביה הוא משתנה מקרי $\mathrm{Bin}(300, \frac{1}{6})$.
ל-X יש תוחלת 50 ושונות $300 \frac{1}{6} \frac{5}{6} \approx 41.67$.

מאי שניון צ'בישב $P(X > 100) \le \frac{41.67}{2500} \approx 0.0167$ אבל חסם זה רחוק מהאמת.
אם נשתמש בעובדה ב- $X \approx N(50, 41.67)$ נקבל

$$P(X > 100) \approx 1 - \Phi\left(\frac{50}{6.45}\right) \approx 1 - \Phi(7.75)$$

וזהו מספר הרבה יותר קטן.

פתרון לתרגיל 11.11

היות ו- $\mathrm{Pois}(\lambda_1) \star \mathrm{Pois}(\lambda_2) = \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$, נוכל לרשום $X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ כאשר $Y_k \sim \mathrm{Pois}(1)$ בלתי תלויים. אם כן, על פי משפט הגבול המרכזי

$$\begin{aligned} P(X_n > n + n^\alpha) &= P\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} > n^{\alpha - \frac{1}{2}}\right) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 - \Phi(0) & \alpha < 0.5 \\ 1 - \Phi(1) & \alpha = 0.5 \\ 1 - \Phi(\infty) & \alpha > 0.5 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 0.5 & \alpha < 0.5 \\ 0.16 & \alpha = 0.5 \\ 0 & \alpha > 0.5 \end{cases}}\ . \end{aligned}$$