פתרון לתרגיל 10.2

סעיף א':

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{1-x} 6x\,dy = 6x(1-x) \qquad 0<x<1 \quad \Longrightarrow \\
f_{Y|X}(y|x) &= \begin{cases} \frac{1}{1-x} & y \in (0,1-x) \\ 0 & y \notin (0,1-x) \end{cases} \qquad 0<x<1 \quad \Longrightarrow \\
g(X) = E(Y|X) &= \boxed{\frac{1-X}{2}} \qquad \text{(תוחלת של צפיפות אחידה)}
\end{aligned}
$$

החזאי הכללי (במקרה) לינארי ולכן הוא גם החזאי הלינארי $h(X) = \boxed{\frac{1-X}{2}}$.

סעיף ד':

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{x^2} 10y\,dy = 5x^4 \qquad 0<x<1 \\
g(x) = E(Y|X=x) &= \int_0^{x^2} y\,\frac{10y}{5x^4}\,dy = \frac{2}{3}\,\frac{x^6}{x^4} \quad \Longrightarrow E(Y|X) = g(X) = \boxed{\frac{2}{3}X^2}
\end{aligned}
$$

הפעם החזאי הכללי אינו לינארי. נשתמש בנוסחה $h(x) = \mu_y + \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2}(x-\mu_X)$.

$$
\begin{aligned}
EX &= \frac{5}{6}, \quad EX^2 = \frac{5}{7}, \quad \sigma_X^2 = \frac{5}{252} \\
EY &= 10\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} y^2 dy\right) dx = \frac{10}{3}\int_0^1 x^6 dx = \frac{10}{21} \\
EXY &= 10\int_0^1 x\left(\int_0^{x^2} y^2 dy\right) dx = \frac{10}{3}\int_0^1 x^7 dx = \frac{5}{12} \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{X,Y} = \frac{5}{252} \\
h(x) &= \frac{10}{21} + 1\left(x - \frac{5}{6}\right) = x - \frac{5}{14} \\
h(X) &= \boxed{X - \frac{5}{14}}
\end{aligned}
$$

10.1*
10.2
10.3
10.6
10.8
10.9
10.10
10.11
10.12
10.13
10.14
êîñîä óåñá - *

סעיף ו': כדי לחשב את החזאי הכללי $E(Y|X)$ נמצא תחילה את הצפיפות המותנית $f_{Y|X}(y|x)$ לכל $x>0$.

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda y}}{f_x(x)} & (x-2)_+<y<x\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

כאן $(x-2)_+=\begin{cases}x-2 & x\geq 2\\ 0 & x<2\end{cases}$. הגבלה זו קיימת כי המונה מתאפס אלא אם כן א) $y>0$ וב) $y<x<y+2$ המתורגם ל- $x-2<y<x$. המכנה $f_X(x)$ מתקבל מ"נוסחת הצפיפות הכוללת", שהיא אינטגרל המונה לפי y:

$$f_X(x)=\frac{1}{2}\int_{(x-2)_+}^{x}\lambda e^{-\lambda y}\,dy=\frac{1}{2}\left(e^{-\lambda(x-2)_+}-e^{-\lambda x}\right)\ .$$

מכאן

$$\begin{aligned}E(Y|X=x) &= \frac{1}{2f_X(x)}\int_{(x-2)_+}^{x}y\lambda e^{-\lambda y}dy\overset{\text{בחלקים}}{=}\cdots\\ &= \frac{1}{2\lambda f_X(x)}\left((\lambda(x-2)_++1)e^{-\lambda(x-2)_+}-(\lambda x+1)e^{-\lambda x}\right)\end{aligned}$$

וכאשר נציב את הבטוי ל- $f_X(x)$ ונפשט, נקבל

$$\boxed{E(Y|X)=\begin{cases}\frac{e^{\lambda X}-1-\lambda X}{\lambda(e^{\lambda X}-1)} & 0<X<2\\ X+\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{2}{1-e^{-2X}}\right) & 2\leq X\end{cases}}$$

לגבי החזאי הלינארי $\widehat{Y}_L=\mu_y+\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$:

$$\mu_X=\frac{1}{\lambda}+1=\frac{\lambda+1}{\lambda}\qquad\qquad \mu_Y=\frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_X^2=\sigma_Y^2+\sigma_Z^2=\frac{\lambda^2+3}{3\lambda^2}\qquad\qquad \sigma_{XY}=\text{cov}(Y+Z,Y)=\sigma_Y^2+0=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\Longrightarrow\boxed{\widehat{Y}_L=\frac{1}{\lambda}+\frac{1/\lambda^2}{(\lambda^2+3)/3\lambda^2}\left(X-\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)=\cdots=\frac{1}{\lambda^2+3}(3X+(\lambda-3))}\,.$$

סעיף ז':

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y)}{f_X(x)}=-\frac{1}{y\ln x}\qquad 0<x<y<1$$

$$\left(f_X(x)=\int_x^1\frac{1}{y}1\,dy=-\ln x\right)$$

$$E(Y|X=x)=-\int_x^1 y\frac{1}{y\ln x}dy=\frac{x-1}{\ln x}\quad\Longrightarrow\quad g(X)=E(Y|X)=\boxed{\frac{X-1}{\ln X}}\,.$$

כהכנה למציאת החזאי הלינארי, נחשב לכל $j,k\geq 0$

$$EX^kY^j=E\left(Y^jE(X^k|Y)\right)=E\left(Y^jE\left(\frac{Y^k}{k+1}\right)\right)=\frac{1}{(k+1)(k+j+1)}$$

$$EX=\frac{1}{4}\qquad EX^2=\frac{1}{9}\qquad \sigma_X^2=\frac{7}{144}\qquad EY=\frac{1}{2}\qquad EXY=\frac{1}{6}\qquad \sigma_{X,Y}=\frac{1}{24}$$

$$\Longrightarrow h(X)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{24}}{\frac{7}{144}}\left(X-\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{6}{7}X+\frac{2}{7}}$$

פתרון לתרגיל 10.3

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^x 8xy\,dy = 4x^3 \quad (0<x<1)\\
f_Y(y) &= \int_y^1 8xy\,dx = 4y(1-y^2) \quad (0<y<1)\\
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{2y}{x^2} \quad (0<y<x)\\
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{2x}{1-y^2} \quad (y<x<1)\\
E(Y|X=x) &= \frac{1}{x^2}\int_0^x 2y^2\,dy = \frac{2x}{3} \qquad \boxed{E(Y|X)=\tfrac{2}{3}X}\\
E(X|Y=y) &= \frac{2}{1-y^2}\int_y^1 x^2\,dx = \frac{2(1-y^3)}{3(1-y^2)} \qquad \boxed{E(X|Y)=\tfrac{2}{3}\,\tfrac{1+Y+Y^2}{1+Y}}
\end{aligned}
$$

כמו כן

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_0^1 4x^4\,dx = \frac{4}{5} \qquad & EX^2 = \int_0^1 4x^5\,dx = \frac{2}{3}\\
EY &= \int_0^1 4y^2(1-y^2)\,dy = \frac{8}{15} \qquad & EY^2 = \int_0^1 4y^3(1-y^2)\,dy = \frac{1}{3}\\
\sigma_X^2 &= \frac{2}{3}-\frac{16}{25} = \frac{2}{75} \qquad & \sigma_Y^2 = \frac{1}{3}-\frac{64}{225} = \frac{11}{225}\\
EXY &= 8\int_0^1 x^2\left(\int_0^x y^2\,dy\right)\,dx = \frac{4}{9}\\
&\Longrightarrow \rho_{X,Y} = \frac{\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\,\frac{8}{15}}{\sqrt{\frac{2}{75}}\sqrt{\frac{11}{225}}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{66}}}
\end{aligned}
$$

פתרון לתרגיל 10.6

עבור $i=1,2$ נסמן:

$n_i=$מספר הכדורים שהוצאו מהקופסה ה- i־ית

$W_i=$מספר הכדורים הלבנים שהוצאו מהקופסה ה- i־ית

$B_i=$מספר הכדורים הכחולים שהוצאו מהקופסה ה- i־ית

(ברור ש- $W_i+B_i=n_i$. שימו לב ש- W_i ו- B_i אקראיים, אבל n_i לא).

א. $\rho_{W_1,W_2}=\rho_{n_1-B_1,n_2-B_2}\overset{(*)}{=}\rho_{B_1,B_2}\overset{\text{נתון}}{=}0.2$.

$$\rho_{aX+b,cY+d}=\operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(c)\rho_{X,Y} \qquad (*)$$

ב. $\rho_{B_1,W_2}=\rho_{B_1,n_2-B_2}=-0.2$ גם כאן על פי $(*)$.

ג. נוסיף את הסימון:

$m_i=$ המספר ההתחלתי של כדורים כחולים בקופסה ה- i־ית (לא אקראי), ולצורך העניין נניח שהכדורים הכחולים חוזרים לקופסה מס' 1 והלבנים לקופסה מס' 2. פרוש הדבר הוא ש- B_2 כדורים כחולים עברו מהקופסה 2 לקופסה 1, כך שבסופו של דבר יהיו, בהתאמה, m_1+B_2 ו- m_2-B_2 כדורים כחולים בשתי הקופסאות. שוב על פי $(*)$ נקבל $\underline{\rho_{m_1+B_2,m_2-B_2}=-1}$.

פתרון לתרגיל 10.8

א.

$$\begin{aligned} EX &= E\,E(X|N) = ENp = p\mu_N \\ EX^2 &= E\,E(X^2|N) = E(Npq + N^2p^2) = pq\mu_N + p^2(\sigma_N^2 + \mu_N^2) \\ &\Longrightarrow \sigma_X^2 = (pq\mu_N + p^2\sigma_N^2 + p^2\mu_N^2) - (p\mu_N)^2 = pq\mu_N + p^2\sigma_N^2 \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} ENX &= E[NE(X|N)] = EN(Np) = pEN^2 = p(\sigma_N^2 + \mu_N^2) \\ &\Longrightarrow \rho_{N,X} = \frac{p(\sigma_N^2 + \mu_N^2) - \mu_N\, p\mu_N}{\sigma_N\sqrt{pq\mu_N + p^2\sigma_N^2}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q\frac{\mu_N}{\sigma_N^2} + p}}\ . \end{aligned}$$

ג. אם N פואסוני, $\mu_N = \sigma_N^2 = \lambda$ ולכן $\rho_{N,X} = \sqrt{p}$.

ד. אם נסתכל על כשלון כהצלחה (של היריב!!), אז נקבל אותה בעיה כמו בסעיף ב', כאשר p ו- q מחליפים תפקידים, ולכן $\rho_{N,Y} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p\frac{\mu_N}{\sigma_N^2}+q}}$.

ה. אם $N \sim \text{Pois}(\lambda)$: $EX = p\lambda$, $EX^2 = p\lambda + p^2\lambda^2$, $ENX = p(\lambda + \lambda^2)$ ולכן

$$\begin{aligned} EXY &= EX(N - EX) = p(\lambda + \lambda^2) - (p\lambda + p^2\lambda^2) = pq\lambda^2 \\ &\Longrightarrow \text{cov}(X,Y) = EXY - EX\,EY = pq\lambda^2 - (p\lambda)(q\lambda) = 0 \\ &\Longrightarrow \rho_{X,Y} = 0\ . \end{aligned}$$

פתרון לתרגיל 10.9

נסמן ב-X וב-Y את מספרי הכדורים המוכנסים לשני התאים הנתונים, בהתאמה, וב-Z את מספר הכדורים המוכנסים לשאר התאים: $Z = n - X - Y$.

נשים לב ש- $Z \sim \text{Bin}(n, \frac{k-2}{k})$, $Y \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{k})$, $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{k})$. כמו כן

$$\text{var}\,Z = \text{var}(n - X - Y) = \text{var}(X + Y) = \text{var}\,X + \text{var}\,Y + 2\text{cov}(X,Y)$$

ולכן

$$\begin{aligned} \text{covar}(X,Y) &= \frac{1}{2}(\text{var}\,Z - \text{var}\,X - \text{var}\,Y) \\ &= \frac{n}{2k^2}((k-2)2 - 1(k-1) - 1(k-1)) = -\frac{n}{k^2} \\ \Longrightarrow \rho_{X,Y} &= \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = -\frac{\frac{n}{k^2}}{\left(\sqrt{n\frac{1}{k}\frac{k-1}{k}}\right)^2} = \boxed{-\frac{1}{k-1}}\ . \end{aligned}$$

פתרון לתרגיל 10.10

$$\text{cov}(X+Y, Y+Z) = \text{cov}(X,Y) + \text{cov}(X,Z) + \text{cov}(Y,Y) + \text{cov}(Y,Z) = 0+0+144+0$$

$$\text{var}(X+Y) = \text{var}X + \text{var}Y + 2\text{cov}(X,Y) = 25 + 144 + 0 = 169$$

$$\text{var}(Y+Z) = \text{var}Y + \text{var}Z + 2\text{cov}(Y,Z) = 144 + 81 + 0 = 225$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{144}{13 \times 15} = \boxed{\frac{48}{65}}$$

פתרון לתרגיל 10.11

א. לכל $1 \le k \le n$ מתקיים ש- $ES_k = k\mu$ ו- $\operatorname{var} S_k \overset{\text{אי תלות}}{=} k\sigma^2$. כמו כן

$$\begin{aligned}
ES_lS_m &= ES_l(S_l + (S_m - S_l)) = ES_l^2 + ES_lE(S_m - S_l) \\
&= (l\sigma^2 + (l\mu)^2 + (l\mu)((m-l)\mu) = l\sigma^2 + lm\mu^2 \\
\Longrightarrow \rho_{S_l,S_m} &= \frac{(l\sigma^2 + lm\mu^2) - (l\mu)(m\mu)}{\sqrt{l\sigma^2}\sqrt{m\sigma^2}} = \sqrt{\frac{l}{m}}
\end{aligned}$$

ב. אם נסמן $X_k = \begin{cases} 1 & \text{בת בלידה ה-}\ k \\ 0 & \text{בן בלידה ה-}\ k \end{cases}$ אז אלה משתנים מקריים בלתי תלויים מפולגים זהה, ושני המשתנים המקריים בשאלה הם S_4 ו- S_9. מסעיף א' נובע אם כן, מקדם המתאם בינהם הוא $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

פתרון לתרגיל 10.12

א. החזאי האופטימלי הוא $E(T_3|T_1)$, ונרשום

$$\begin{aligned}
E(T_3|T_1) &= E(T_1 + (T_3 - T_1)|T_1) = T_1 + E(T_3 - T_1|T_1) \\
&= T_1 + E(T_3 - T_1) = \boxed{T_1 + \frac{2}{\lambda}}\,.
\end{aligned}$$

השויון לפני האחרון נובע מכך ש- $T_3 - T_1$ בלתי תלוי ב- T_1, והשויון האחרון מכך ש- $T_3 - T_1$ הוא סכום של שני משתנים $\text{Exp}(\lambda)$.

לקראת הסעיפים הבאים נזכיר של- T_n צפיפות גאמא $\Gamma(n,\lambda)$ ($f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}$,ז.א.), וזאת כי T_n הוא סכום של n משתנים אקספונציאליים. מאותה סיבה, הצפיפות המותנית של T_n מותנית ב- "$T_m = s$" ($m < n$) היא $\Gamma(n-m,\lambda)$ מוזזת ימינה ב- s יחידות.

ב. נחשב תחילה את $f_{T_1|T_3}(t_1|t_3)$ עבור $0 < t_1 < t_3$.

$$\begin{aligned}
f_{T_1|T_3}(t_1|t_3) &= \frac{f_{T_3|T_1}(t_3|t_1)f_{T_1}(t_1)}{f_{T_3}(t_3)} = \frac{\lambda^2\,(t_3 - t_1)\,e^{-\lambda\,(t_3 - t_1)}\,\lambda\,e^{-\lambda\,t_1}}{\frac{\lambda^3\,t_3^2\,e^{-\lambda\,t_3}}{2}} \\
&= \frac{2}{t_3^2}(t_3 - t_1) \\
\Longrightarrow E(T_1|T_3 = t_3) &= \frac{2}{t_3^2}\int_0^{t_3} t_1(t_3 - t_1)dt_1 = \frac{t_3}{3} \Longrightarrow E(T_1|T_3) = \frac{T_3}{3}
\end{aligned}$$

ג. מאותם השקולים כמו קודם $E(T_n|T_k) = T_k + \frac{n-k}{\lambda}$. עבור $0 < s < t$

$$\begin{aligned}
f_{T_k|T_n}(s|t) &= \frac{f_{T_n|T_k}(t|s)f_{T_k}(s)}{f_{T_n}(t)} \\
&= \frac{\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k-1)!}\,(t-s)^{n-k-1}\,e^{-\lambda\,(t-s)}\,\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\,s^{k-1}\,e^{-\lambda\,s}}{\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\,t^{n-1}\,e^{-\lambda\,t}} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!\,t^{n-1}}s^{k-1}(t-s)^{n-k-1} \\
\Longrightarrow E(T_k|T_n = t) &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!\,t^{n-1}}\overbrace{\int_0^t s^k(t-s)^{n-k-1}\,ds}^{I_k}
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rcl} I_k &=& \overbrace{-\left.\frac{s^k(t-s)^{n-k}}{n-k}\right|_0^t}^{0} + \frac{k}{n-k}\overbrace{\int_0^t s^{k-1}(t-s)^{n-k}\,ds}^{I_{k-1}} \overset{k-1 \text{ צעדים}}{=} \cdots\cdots \\ &=& \frac{k!}{(n-1)\cdots(n-k)}\int_0^t (t-s)^{n-1}\,ds = \frac{k!(n-k-1)!}{n!}t^n \end{array} \right)$$

$$= \frac{k}{n}t \implies \boxed{E(T_k|T_n) = \tfrac{k}{n}T_n}$$

<u>דיון:</u> התוצאה הזאת היתה צפויה משיקולי סימטריה. אכן, אם, עבור $i < n$, נרשום $E(X_i|T_n) = h_i(T_n)$ כאשר $h_i(\cdot)$ פונקציות מתאימות, אז ברור שכל ה- h_i־ים שווים בינהם (נסמן $h_i = h$) כי כל ה- X_i־ים בלתי תלוים ומפולגים זהה, ולכן משחקים אותו תפקיד. אם כן

$$\begin{aligned} T_n = E(T_n|T_n) &= E(X_1 + \cdots + X_n|T_n) = nh(T_n) \\ &\implies E(X_i|T_n) = \frac{1}{n}T_n \implies E(T_k|T_n) = \frac{k}{n}T_n\ . \end{aligned}$$

שימו לב שתוצאה זו נכונה בלי קשר להתפלגות של ה- X_i־ים, רק הנחנו שהם בלתי תלויים ומפולגים זהה (גם את ההנחה הזו ניתן קצת להחליש) .

ד. למעשה, כל החזאים שחושבו בסעיפים הקודמים לינאריים, ולכן הם עצמם גם החזאים <u>הלינארים</u> האופטימליים.

<u>פתרון לתרגיל 10.13</u>

נסמן ב- D את התחום שבין ציר x לעקום הנתון. שחחו $\sqrt{2\pi}$.

א. לכל k

$$\begin{aligned} m_k := EY^k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint_D y^k\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{e^{-\frac{x^2}{2}}} y^k dy\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+1)}\int_{-\infty}^{\infty} \left. y^{k+1}\right|_0^{e^{-\frac{x^2}{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+1)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k+1}{2}x^2}dx \\ &= \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad\qquad \implies \\ EY &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \qquad\qquad \mathrm{Var}Y = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{8\sqrt{3}-9}{72}} \end{aligned}$$

ב. כמו בחשבון למעלה, לכל k ו- j

$$m_{k,j} := EX^jY^k \;=\; \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+1)}\int_{-\infty}^{\infty} x^j e^{-\frac{k+1}{2}x^2}dx$$

$$= \;\ldots = \begin{cases} 0 & \text{אי זוגי } j \\ \frac{(j-1)(j-3)\ldots 3\cdot 1}{(k+1)^{\frac{j+3}{2}}} & \text{זוגי } j \end{cases}$$

מכאן $\rho_{X,Y}=0$ (כי $EXY=EX=0$) ו- (שימו לב ש- $X\sim \mathrm{N}(0,1)$)

$$\rho_{X^2,Y} = \frac{EX^2Y - EX^2EY}{\sigma_{X^2}\sigma_Y} = \frac{\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} - 1\,\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{8\sqrt{3}-9}{72}}} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{8\sqrt{3}-9}}}$$

ג. X ו- Y <u>אינם</u> בלתי תלויים כי D איננו מלבן שצלעותיו מקבילים לצירים.
באופן מפורש, לכל (x,y) המקיים $e^{-\frac{x^2}{2}} < y < 1$ מתקיים $f_{X,Y}(x,y)=0$
אבל $f_X(x)\neq 0$ ו- $f_Y(y)\neq 0$.

<u>פתרון לתרגיל 10.14</u>

כדי לשמור על אחידות, נסמן ב-$\widehat{Y}_L$ את החזאי הלינארי (ולא $\widehat{Y}$ כבשאלה).

א. $E(Y-E(Y|X))^2$ היא תוחלת השגיאה הריבועית של החזאי <u>האופטימלי</u> אשר על פי ההגדרה אינה גדולה מ- $E(Y-\widehat{Y}_L)^2$, שהיא תוחלת השגיאה הריבועית רק של החזאי הלינארי.
מצד שני $\mathrm{var}\,Y = E(Y-\mu_Y)^2$. היות וזו תוחלת השגיאה הריבועית ע"י המועמד הלינארי $g(x)\equiv\mu_y$ שגיאה זו אינה קטנה מהשגיאה של החזאי הלינארי האופטימלי. הראנו ש-

$$\boxed{E(Y-E(Y|X))^2 \le E(Y-\widehat{Y}_L)^2 \le \mathrm{var}\,Y}\,.$$

ב. אם $\widehat{Y}_L = aX+b$ החזאי הלינארי האופטימלי, אז $-\widehat{Y}_L = -aX-b$ גם הוא "מועמד" לינארי, אבל תוחלת שגיאתו הריבועית לא תהיה קטנה מזו של $\widehat{Y}_L$ עצמו, ולכן $\boxed{E(Y-\widehat{Y}_L)^2 \le E(Y-(-\widehat{Y}_L))^2 = E(Y+\widehat{Y}_L)^2}$.

ג. כדי לפשט את הכתיב, נשתמש בסימון $\widehat{Y}=E(Y|X)$. יש לנו

$$E(Y-\widehat{Y})^2 = EY^2 - 2E\widehat{Y}Y + E\widehat{Y}^2$$

אם נזכור שאת התוחלת המותנית $\widehat{Y}$ ניתן לבטא כפונקציה $h(X)$ של X, נוכל לפתח את האיבר השני למעלה

$$2E\widehat{Y}Y = 2E\left[E\left(\widehat{Y}Y|X\right)\right] = 2E\left[\widehat{Y}\,E\left(Y|X\right)\right] = 2E\widehat{Y}^2$$

כדי לקבל $E(Y-\widehat{Y})^2 = EY^2 - E\widehat{Y}^2$ או, בכתיב מלא,

$$.\;\boxed{E(Y-E(Y|X))^2 = EY^2 - EE(Y|X)^2}$$

במילים אחרות, בסעיף זה יש שוויון בין שני הביטויים.

שאלה 10.1 :

א. יהי ו"א (X,Y) - קואורדינטות קרטזיות של נקודה Q. אזי

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & 0<x^2+y^2<1\\ 0, & else\end{cases}.$$

מנוסחת הטרנספורמציה של ו"א נובע

$$f_{R,\Theta}(r,\theta)=\begin{cases}\frac{r}{\pi}, & 0<r<1,\ 0<\theta<2\pi\\ 0, & else\end{cases}.$$

הצפיפויות השוליות הן

$$f_R(r)=\begin{cases}2r, & 0<r<1\\ 0, & else\end{cases},\qquad f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0<\theta<2\pi\\ 0, & else\end{cases}.$$

מתקיים $f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_R(r)\cdot f_\Theta(\theta)$, מכאן $R,\ Q$ ב"ת, ולכן גם בלתי מתואמים.

ב. $R,\ Q$ ב"ת, לכן

$$E(R|\Theta)=ER=\int_0^1 r\int_0^{2\pi}\frac{r}{\pi}\ d\theta\ dr=\int_0^1 2r^2\ dr=\frac{2}{3}.$$