פתרון לתרגיל 9.1

א.

$$f_X(x) = a\int_0^1 (2+xy)\,dy = a\left(2+\frac{x}{2}\right) = \boxed{\tfrac{a}{2}(4+x) \quad 0<x<1 \qquad \left(a=\tfrac{4}{9}\right)}$$

$$f_Y(y) = \boxed{\tfrac{2}{9}(4+y)} \quad 0<y<1 \qquad (\text{סימטריה ב- } x \text{ ו- } y)$$

$$f_Z(z) = az\int_z^2 w\,dw = \boxed{\tfrac{az}{2}(4-z^2) \quad 0<z<2 \qquad \left(a=\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$f_W(w) = \frac{w}{2}\int_0^w z\,dz = \boxed{\tfrac{w^3}{4} \quad 0<w<2}$$

ב.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \boxed{\tfrac{2(2+xy)}{4+y} \quad 0<x<1}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \boxed{\tfrac{2(2+xy)}{4+x} \quad 0<y<1}$$

$$f_{W|Z}(w|z) = \frac{f_{Z,W}(z,w)}{f_Z(z)} = \boxed{\tfrac{2w}{4-z^2} \quad w\in(z,2)}$$

$$f_{Z|W}(z|w) = \frac{f_{Z,W}(z,w)}{f_W(w)} = \boxed{\tfrac{2z}{w^2} \quad z\in(0,w)}$$

ג. ראוים מיד ש- $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ וש- $f_{Z,W}(z,w) \neq f_Z(z)f_W(w)$ ולכן שני זוגות אלה אינם בלתי תלויים. לגבי הזוג (Y,Z), אין לשאלה משמ-עות שהרי Y ו- Z אינם מוגדרים על אותו מרחב הסתברות, או במילים אחרות, אין נתונים המאפשרים לדעת את פילוגם המשותף.

9.3

א.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & x^2+y^2\le 1, |y|\ne 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

הערה : את התוצאות ניתן לקבל מידית ממשפט על פונקצית צפיפות מותנית של התפלגות אחידה.

ב.

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi}, & x^2+y^2+z^2\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{3}{4\pi}\,dz = \begin{cases} \dfrac{3}{2\pi}\sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{2\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{3}{4}\left(1-y^2\right), & -1\le y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

כי זה שטח של חצי עיגול בעל רדיוס $\sqrt{1-y^2}$

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{2\left(1-y^2\right)}, & x^2+y^2\le 1, |y|\ne 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

פתרון לתרגיל 9.4

נרשום תחילה $f_Y(y) = \int_y^1 \frac{2y}{x^2}\,1\,dx = 2(1-y)$, $0<y<1$.

א.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{2y}{2x^2(1-y)} = \boxed{\frac{y}{1-y}\frac{1}{x^2} \quad x\in(y,1)}$$

ב.

$$\begin{aligned}
P(Y>0.3) &= 2\int_{0.3}^{1}(1-y)\,dy = \boxed{0.49} \\
P(X<0.5, Y\le 0.4) &= \int_0^{0.5}\left(\int_0^{0.4}\overbrace{f_X(x)f_{Y|X}(y|x)}^{f_{X,Y}(x,y)}\,dy\right)dx \\
&= 2\int_0^{0.4}\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x y\,dy\right)dx + 2\int_{0.4}^{0.5}\frac{1}{x^2}\left(\int_0^{0.4} y\,dy\right)dx \\
&= 0.4 + 0.16\left(\frac{1}{x}\Big|_{0.5}^{0.4}\right) = \boxed{0.48}
\end{aligned}$$

פתרון לתרגיל מספר 9.6

נתון $D = \mathbb{R}\left[(0,0),(1,1)\right] \cup \mathbb{R}\left[(1,1),(2,2)\right]$

אזי:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x,y)\in D \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א. $P(X>Y^2 \mid Y<1) = P(-\sqrt{X}<Y<\sqrt{X} \mid Y<1) = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$

ב. לפי משפט שנלמד בהרצאה כאשר וקטור אקראי הוא אחיד כל ההתפלגויות המותנות הן אחידות בתחומים המתאימים. במקרה שלנו עבור $Y\in(0,1)$ התחום המתאים עבור X גם הוא $(0,1)$ ועבור $Y\in(1,2)$ התחום המתאים עבור X הוא $(1,2)$. בשני המקרים אורך הקטע הוא 1 ולכן גם הצפיפות חייבת להיות 1 כדי שתקיים תכונות של פונקצית צפיפות.

ניתן לסכם את שני המקרים כדלקמן:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in D \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

9.7

נתון:

$$f_Y(y) = 2y,\ \ 0<y<1$$
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{y},\ \ 0<x<y$$

א. הצפיפות המשותפת:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = \frac{1}{y}2y = 2,\ \ 0<x<y<1$$

והצפיפות השולית של X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 2\,dy = 2(1-x),\ \ 0<x<1$$

ב.

$$E(X|Y=y)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx=\int_0^y x\frac{1}{y}dx=\frac{1}{y}\frac{x^2}{2}\Big|_0^y=\frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow E(X|Y)=\frac{Y}{2}$$

$$E(Y|X=x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}yf_{Y|X}(y|x)dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy=\int_x^1 y\frac{2}{2(1-x)}dy=\frac{1}{1-x}\frac{y^2}{2}\Big|_x^1=\frac{1-x^2}{2(1-x)}=\frac{x+1}{2}$$

$$\Rightarrow E(Y|X)=\frac{X+1}{2}$$

<u>פתרון לתרגיל 9.9</u>

א. בהינתן ש- $N=n$ אנחנו יודעים ש- $EY=EX_1+\cdots+EX_n=na$, או במילים אחרות, $\boxed{E(Y|N)=aN}$.
כמו כן, בהינתן ש- $N=n$ גם יודעים (בגלל אי תלות) ש- $\mathrm{var}Y=\mathrm{var}X_1+\cdots+\mathrm{var}X_n=nb^2$, ולכן $EY^2=nb^2+(na)^2$. נוכל אם כן לרשום $\boxed{E(Y^2|N)=b^2N+a^2N^2}$.

ב.

$$\begin{aligned} EY &= E\,E(Y|N)=EaN=\boxed{ac} \\ EY^2 &= E\,E(Y^2|N)=E(b^2N+a^2N^2)=b^2c+a^2(d^2+c^2)\Longrightarrow \\ \mathrm{var}Y &= b^2c+a^2(d^2+c^2)-(ac)^2=\boxed{b^2c+a^2d^2}\ . \end{aligned}$$

א.

$$\begin{aligned}
f_{X_0,X_1}(x_0,x_1) &= f_{X_0}(x_0) f_{X_1|X_0}(x_1|x_0) = 1\,\frac{1}{x_0} = \boxed{\tfrac{1}{x_0} \quad 0<x_1<x_0<1} \\
f_{X_1}(x_1) &= \int_{x_1}^{1} 1\,\frac{1}{x_0}\,dx_0 = \boxed{-\ln x_1 \quad 0<x_1<1} \\
f_{X_2}(x_2) &= \int_{x_2}^{1} (-\ln x_1)\,\frac{1}{x_1}\,dx_1 \overset{(u=\ln x_1)}{=} \int_0^{\ln x_2} u\,du \\
&= \boxed{\tfrac{1}{2}(\ln x_2)^2 \quad 0<x_2<1} \\
f_{X_3}(x_3) &= \int_{x_3}^{1} \frac{(\ln x_2)^2}{2}\,\frac{1}{x_2}\,dx_2 \overset{(u=\ln x_2)}{=} -\int_0^{\ln x_3} \frac{u^2}{2}\,du \\
&= \boxed{-\tfrac{1}{3!}(\ln x_3)^3 \quad 0<x_3<1}
\end{aligned}$$

ב. רואים ש- $f_{X_n}(x_n) = \frac{(-1)^n}{n!}(\ln x_n)^n$, $0<x_n<1$, ואכן אפשר להוכיח זאת באינדוקציה, כמו בסעיף א'.

ג. אם נשתמש בצפיפות של הסעיף הקודם,

$$\begin{aligned}
EX_n &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x\,(\ln x)^n\,dx \overset{\text{בחלקים}}{=} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\overbrace{\frac{x^2}{2}(\ln x)^n\Big|_0^1}^{=0} - \frac{n}{2}\int_0^1 x^2\,\frac{(\ln x)^{n-1}}{x}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 x\,(\ln x)^{(n-1)}\,dx = \frac{1}{2}EX_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow EX_0 = \frac{1}{2}, \quad EX_1 = \frac{1}{4} \quad \cdots \quad \boxed{EX_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

או אחרת (משפט ההחלקה): $EX_n = EE(X_n|X_{n-1}) = E\frac{X_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}EX_{n-1}$, וזאת אותה רקורסיה שקיבלנו קודם. ברור שהדרך הזאת קצרה הרבה יותר.

ד.

$$\begin{aligned}
f_{X_{n-1}|X_n}(x|y) &\overset{\text{בייס}}{=} \frac{f_{X_n|X_{n-1}}(y|x) f_{X_{n-1}}(x)}{f_{X_n}(y)} = \frac{1}{x}\,\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(\ln x)^{n-1}}{\frac{(-1)^n}{n!}(\ln y)^n} \\
&= \boxed{-\frac{n}{(\ln y)^n}\,\frac{(\ln x)^{n-1}}{x} \quad x\in(y,1)}
\end{aligned}$$

א. נציג את הנקי בקוי פולאריות: $(x,y)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ $\quad R\ge\rho\ge0,\ 0\le\theta<2\pi,$

שטח המלבן הנוצר הוא: $S=|xy|=\rho^2|\cos\theta\sin\theta|=\rho^2\frac{|\sin2\theta|}{2}$

מכיוון ש $\rho\perp\theta$ (קרי: המשתנים ב"ת) נוכל לחשב

$$E(S)=E\left(\rho^2\frac{|\sin2\theta|}{2}\right)=\frac{1}{2}E(\rho^2)E(|\sin2\theta|)$$

מכיוון ש $\theta\sim U[0,2\pi]$ נקבל ש:

$$E(|\sin2\theta|)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin2\theta|d\theta=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin2\theta d\theta-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin2\theta d\theta+\int_{\pi}^{3\pi/2}\sin2\theta d\theta-\int_{3\pi/2}^{2\pi}\sin2\theta d\theta\right)=\ldots=\frac{2}{\pi}$$

כמו כן $R=V^2,\ V\sim N(0,\sigma^2)$ ולכן:

$$E(\rho^2)=E(E(\rho^2\mid R))=E\left(\frac{R^2}{2}\right)=\frac{1}{2}E(V^4)$$

למציאת השונות נחשב את

$$E(S^2)=E\left(\rho^4\frac{\sin^2 2\theta}{4}\right)=\frac{1}{4}E(\rho^4)E(\sin^2 2\theta)$$

$$E(\sin^2 2\theta)=\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\sin^2\tau d\tau=\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}-\frac{\sin\tau}{4}\right)\Bigg|_0^{4\pi}=\pi$$

$$E(\rho^4)=E(E(\rho^4\mid R))=E\left(\frac{R^4}{2}\right)=\frac{1}{2}E(V^8)$$

ב. סעיף זה הוא יותר קל ואנו חוזרים על אותם החישובים של סעיף א' למעט השינוי הבא:

$$E(\rho^2)=E\left(E\left(\rho^2\middle|R\right)\right)=E(R^2)=E(V^4)$$
$$E(\rho^4)=E\left(E\left(\rho^4\middle|R\right)\right)=E(R^4)=E(V^8)$$

כאשר $V\sim N(0,\sigma^2)$ והמומנטים מסדרים גבוהים ניתנים לחישוב ע"י הנוסחאות הידועות.

פתרון לתרגיל 9.15

נסמן X = זמן פליטת החלקיק הראשון.

$$EX=E\,E(X|M)=E\,\frac{1}{\alpha M}=\int_1^\infty\frac{1}{\alpha m}\overbrace{\frac{1}{m^2}}^{f_M(m)}dm=\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{m^2}\Bigg|_\infty^1\right)=\boxed{\frac{1}{2\alpha}}$$

פתרון לתרגיל 9.16

א. אורך חיי המערכת גדולה מ- t אם ורק אם אורכי חייהם של כל הרכיבים גדולים מ- t:

$$1-F_T(t)=P(T>t)=\prod_{k=1}^{n}P(T_k>t)=\prod_{k=1}^{n}e^{-\lambda_k t}=e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}$$

ולכן, אם נסמן $\bar{\lambda}=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k$ נקבל $f_T(t)=\bar{\lambda}e^{-\bar{\lambda}t}$, דהיינו $T\sim \mathrm{Exp}(\bar{\lambda})$.

ב. כעת, באמצעות נוסחת ההסתברות השלמה,

$$\begin{aligned}1-F_T(t)&=P(T>t)=\sum_{n=1}^{\infty}P(T>t|N=n)P(N=n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\lambda t}pq^{n-1}=pe^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(qe^{-\lambda t}\right)^{n-1}=p\frac{e^{-\lambda t}}{1-qe^{-\lambda t}}=\frac{p}{e^{\lambda t}-q}\Longrightarrow\end{aligned}$$

$$f_T(t)=\boxed{\tfrac{\lambda p\ e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t}-q)^2}\quad t>0}$$

$$ET=E\,E(T|N)=E\frac{1}{N\lambda}=\frac{p}{\lambda q}\overbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}}^{-\ln(1-q)}=\boxed{-\tfrac{p\ln p}{\lambda q}}.$$

את ET ניתן גם לחשב ישירות :

$$\begin{aligned}ET&=\int_0^{\infty}(1-F_T(t))\,dt=p\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{\lambda t}-q}\overset{u=e^{\lambda t}}{=}\frac{p}{\lambda}\int_1^{\infty}\frac{1}{(u-q)}\frac{du}{u}\\&=\frac{p}{\lambda q}\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{u-q}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{p}{\lambda q}(\ln(u-q)-\ln\ u)\Big|_1^{\infty}=\boxed{-\tfrac{p\ln p}{\lambda q}}.\end{aligned}$$

9.18

לשם פשטות נניח כי $L=1$. נגדיר מ"מ הבאים:

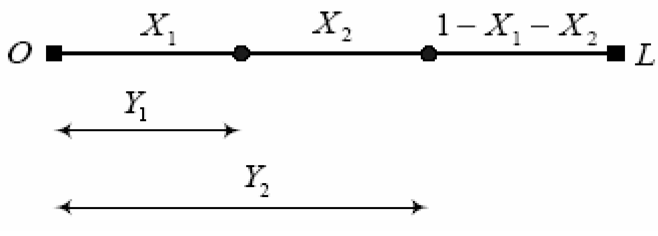
Z_1 - מיקום נקודת שבירה הראשונה, $Z_1\sim U[0,1]$.

Z_2 - מיקום נקודת שבירה השניה, $Z_2\sim U[0,1]$.

Y_1 - מרחק מהראשית O עד לנקודת השבירה הקרובה ל- O, כלומר $Y_1=\min(Z_1,Z_2)$

Y_2 - מרחק מהראשית O עד לנקודת השבירה הרחוקה ל- O, כלומר $Y_2=\max(Z_1,Z_2)$

X_1 - אורך של הקטע השמאלי, X_2 - אורך של הקטע האמצעי.



(א) בסימונים האלה, מבקשים מאיתנו למצוא: $P(\{X_2 \le X_1\} \cap \{X_2 \le 1 - X_1 - X_2\})$?

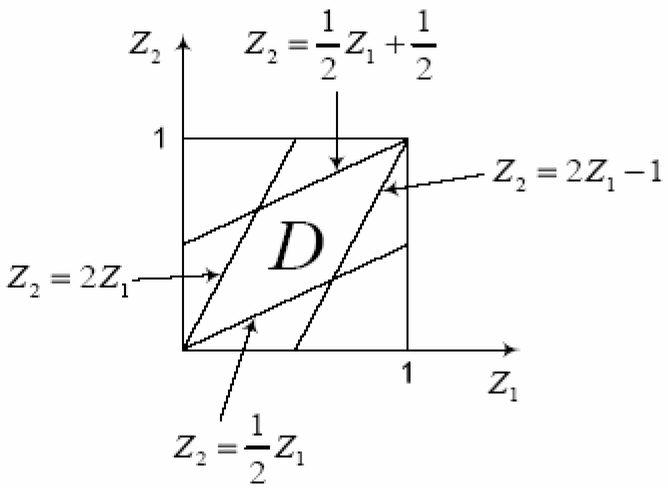
$$P(\{X_2 \le X_1\} \cap \{X_2 \le 1 - X_1 - X_2\}) =$$

$$= P(\{Y_2 - Y_1 \le Y_1\} \cap \{Y_2 - Y_1 \le 1 - Y_1 - (Y_2 - Y_1)\}) =$$

$$= P(\{Y_2 \le 2Y_1\} \cap \{2Y_2 \le 1 + Y_1\}) =$$

$$P(\{\max(Z_1, Z_2) \le 2\min(Z_1, Z_2)\} \cap \{2\max(Z_1, Z_2) \le 1 + \min(Z_1, Z_2)\}) =$$
$$= Area(D) = \frac{1}{3}$$

כאשר D זהו תחום הבא:



(ב) נסמן ב- Z מ"מ המציין אורכו של הקטע הקצר ביותר.

A_1 מאורע שהקטע השמאלי הוא הקצר ביותר,

A_2 מאורע שהקטע האמצעי הוא הקצר ביותר,

A_3 מאורע שהקטע הימני הוא הקצר ביותר.

בסעיף קודם חישבנו ש- $P(A_2) = \frac{1}{3}$, לפי טעמי סימטריה מתקיים: $P(A_1) = P(A_3) = \frac{1}{3}$.

בסימונים האלה מתקיים:

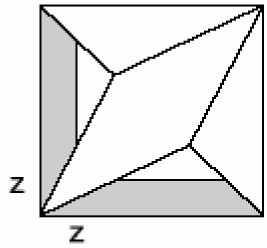
$$F_Z(z) = P(Z \le z) =$$

$$= P(Z \le z \mid A_1)P(A_1) + P(Z \le z \mid A_2)P(A_2) + P(Z \le z \mid A_3)P(A_3)$$

נחשב כל מחובר בנפרד:

$$P(Z \le z \mid A_1) = P(\min(Z_1, Z_2) \le z \mid A_1) = Area(D_1) = 2z - 3z^2$$

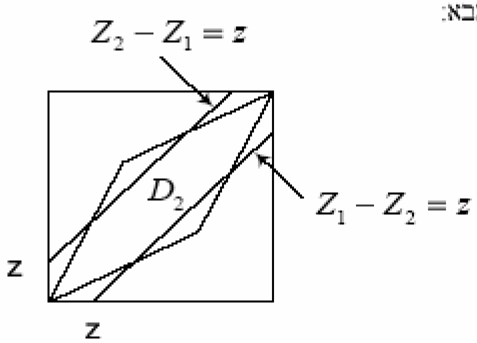
כאשר D_1 זהו תחום מודגש הבא:



$$P(Z \le z \mid A_2) = P(X_2 \le z \mid A_2) = P(Y_2 - Y_1 \mid A_2) =$$

$$P(Z \le z \mid A_2) = P(\max(Z_1, Z_2) - \min(Z_1, Z_2) \le z \mid A_1) = Area(D_2) = 3z^2$$

כאשר D_2 זהו תחום הבא:



$$P(Z \le z \mid A_3) = P(1 - \max(Z_1, Z_2) \le z \mid A_3) = 2z - 3z^2$$

השוויון אחרון נובע מטעמי סימטריה.

סה"כ אנחנו מקבלים:

$$z \in [0, \frac{1}{3}] \ , F_Z(z) = P(Z \le z) = \frac{4z - 3z^2}{3}$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{4 - 6z}{3}$$

ולבסוף:

$$EZ = \int_0^{1/3} \frac{4 - 6z}{3} dz = \frac{4}{3}z - z^2 \Big|_0^{1/3} = \frac{1}{3}$$

ג. בסעיף זה נסמן ב-X את מרחק נקודת השבירה הראשונה מהראשית וב-Y את מרחק נקודת השבירה השנייה. אם הערך של X נתון נוכל לדעת את פונקצית הצפיפות של Y:

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}, & x\le y\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{L-x}, & y<x\end{cases}$$

לפי כך פונקצית הצפיפות המשותפת נתונה ע"י:

$$f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X}(y\mid x)\cdot f_X(x)=f_{Y|X}(y\mid x)\cdot\frac{1}{L}$$

נוכל כעת לחשב את $f_Y(y)$ ע"י אינטגרציה של הצפיפות המשותפת לפי X:

$$f_Y(y)=\int_0^L f_{Y|X}(y\mid x)\cdot\frac{1}{L}dx=\frac{1}{2L}\int_0^y\frac{1}{L-x}dx+\frac{1}{2L}\int_y^L\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{1}{2L}\left(-\ln(L-y)+\ln L+\ln L-\ln y\right)=\frac{1}{2L}\left(2\ln L-\ln y-\ln(L-y)\right),\ y\in(0,L)$$

שימו לב שבגלל הסימטריות של ההגדרה נראה לכאורה שההתפלגות של Y צריכה להיות אחידה בקטע. אולם למעשה זה לא נכון. הסיבה לכך היא שלאחר השבירה הראשונה יכול להיבחר קטע קצר או קטע ארוך באותה הסתברות. אבל עבור נקודות בקטע קצר יש סיכוי גבוה בהרבה להיבחר כנקודת שבירה שנייה. לכן ככל שנקודה יכולה להשתייך לקטעים קצרים יותר כך יש לה סיכוי גבוה יותר להיבחר. הקצוות של המקל יכולים להשתייך לקטעים קצרים כרצוננו אך אמצע המקל יכול להשתייך רק לקטע שאורכו חצי המקל לפחות. לכן יש ירידה בצפיפות ההסתברות של-Y ככל שמתקרבים למרכז. אם היינו בוחרים את הקטע לשבירה השנייה בהסתברות השווה לאורך הקטע חלקי L ולא בהסתברות חצי אז היינו מקבלים התפלגות אחידה של-Y.

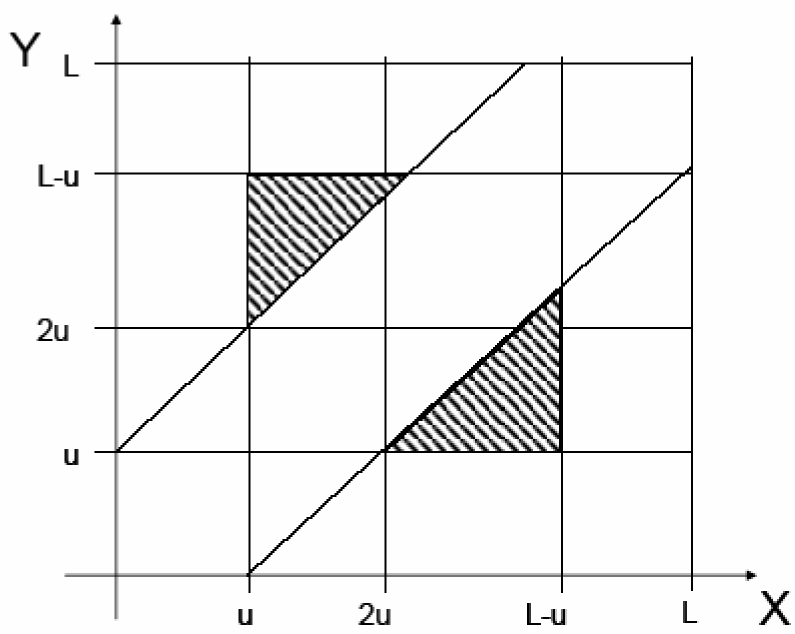
ד. לאחר שתי השבירות נוצרים שלושה קטעים שניתן להציג את אורכיהם באופן הבא:

$$Z_1=\min\{X,Y\},\quad Z_2=|X-Y|,\quad Z_3=L-\max\{X,Y\}$$

נסמן ב-U את אורך הקטע הקצר ביותר שאת תוחלתו עלינו לחשב: $U=\min\{Z_1,Z_2,Z_3\}$

$$P(U\ge u)=P\left(X\ge u,Y\ge u,|X-Y|\ge u,\max\{X,Y\}\le L-u\right)=$$
$$=P\left(X\ge u,Y\ge u,|X-Y|\ge u,X\le L-u,Y\le L-u\right)$$

כל התנאים הנ"ל מתקיימים בשני המשולשים המקווקווים שבציור. כעת כל מה שנותר הוא לחשב את ההסתברות לקבלת זוג (X,Y) שייפול בתוך אחד המשולשים. יש לזכור גם ש- $0\le U\le\frac{L}{2}$ (תחשבו למה).



$$P(U \ge u) = \frac{1}{2L}\left(\int_{2u}^{L-u}\int_{u}^{y-u}\frac{1}{x}dxdy + \int_{2u}^{L-u}\int_{u}^{x-u}\frac{1}{L-x}dydx\right) = \frac{1}{2L}\left(\int_{2u}^{L-u}\left(\ln(y-u)-\ln u\right)dy + \int_{2u}^{L-u}\frac{x-2u}{L-x}dx\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2L}(L\ln(L-2u) - 2u\ln(L-2u) - L\ln u + 2u\ln u - 2L + 6u + 2u\ln\left|-u\right| - L\ln\left|-u\right| +$$

$$+L\ln\left|2u-L\right| - 2u\ln\left|2u-L\right|) = \frac{\left((L-2u)\log\frac{L-2u}{u} - L + 3u\right)}{L} = 1 - F_U(u)$$

נחשב כעת את התוחלת לפי הנוסחה שלמדתם :

$$EU = \int_0^{L/2}\left[1-F_U\right]du = \frac{1}{4}(\ln 2 + \frac{1}{2})L \cong 0.298 \cdot L$$

אומנם הדרך לא קלה ובלי קצת עזרה ממחשב קשה לצאת מהסבך אבל בסוף מגיעים לתשובה די פשוטה - פונקציה ליניארית של L.

פתרון לתרגיל 9.20

א. יהי X משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים N ו- β, כאשר N בעצמו משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים n ו- α. אז פונקצית ההסתברות (הבלתי מותנית) של X היא בינומית עם פרמטרים n ו- $\alpha\beta$.

ב. X יכול לקבל ערכים $k = 0, 1, \dots, n$. נשתמש בנוסחת ההסתברות הכוללת:

$$\begin{aligned}
p_X(k) &= \sum_{j=0}^{n} p_N(j)\, \overbrace{p_{X|N}(k|j)}^{0 \text{ כאשר } j<k} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \beta^j (1-\beta)^{n-j} \binom{j}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{j-k} \\
&= \alpha^k\beta^k \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{j!}{k!(j-k)!} (\beta(1-\alpha))^{j-k}(1-\beta)^{n-j} \\
&\overset{i=j-k}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}(\alpha\beta)^k \underbrace{\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{(n-k-i)!i!}(\beta(1-\alpha))^i(1-\beta)^{n-k-i}}_{[\beta(1-\alpha)+(1-\beta)]^{n-k}} \\
&= \binom{n}{k} (\alpha\beta)^k (1-\alpha\beta)^{n-k}
\end{aligned}$$

ג. באגף שמאל X מתאר את מספר המתחרים מתוך n המצליחים במבחן בן שני שלבים, כאשר בשלב הראשון מצליחים בהסתברות α (באופן בלתי תלוי), בעוד שבשלב השני משתתפים רק אלה שהצליחו בשלב הראשון, ומ-צליחים בו בהסתברות β (שוב באופן בלתי תלוי).

לחליפין אם מאפשרים לכל n המתחרים להשתתף בשני השלבים, וסופרים כמצליחים רק את אלה המצליחים פעמיים (זה יקרה לכל מתחרה בהסתב-רות $\alpha\beta$), מקבלים כמובן את אותו מספר. כך בדיוק מתואר X באגף ימין.

א. אחרי שהמשתתף הראשון קובע את תוצאתו X, המתחרים הבאים עורכים סידרת ניסויי ברנולי עם הסתברות הצלחה

במקרה (i) $\int_X^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda X}$

במקרה (ii) $\int_0^X \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda X}$

בה ההצלחה הראשונה תתקבל בפעם ה-$(N-1)$. לכן

$$EN = 1 + E\,E(N-1|X)$$

$$= \begin{cases} 1 + E\frac{1}{e^{-\lambda X}} = 1 + \int_0^\infty e^{\lambda x}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \infty & \text{במקרה } (i) \\ 1 + E\frac{1}{1-e^{-\lambda X}} = 1 + \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}\,dx = \infty & \text{במקרה } (ii) \end{cases}$$

ב. אם הצפיפות האקספוננציאלית מוחלפת עתה בצפיפות כללית $f(x)$ (עם פונקצית התפלגות $F(x)$ מתאימה) נקבל באופן דומה

$$EN = 1 + E\,E(N-1|X)$$

$$= \begin{cases} 1 + E\,\frac{1}{1-F(X)} = 1 + \int_0^\infty \frac{1}{1-F(x)}\,f(x)\,dx \overset{u=F(x)}{=} \int_0^1 \frac{1}{1-u}\,du = \infty & \text{במקרה } (i) \\ 1 + E\,\frac{1}{F(X)} = 1 + \int_0^\infty \frac{1}{F(x)}\,f(x)\,dx \overset{u=F(x)}{=} \int_0^1 \frac{1}{u}\,du = \infty & \text{במקרה } (ii) \end{cases}$$

ג. בגלל הסימטריה מספיק לדון במקרה (i) למשל. נסמן את שלושלת התוצאות האפשריות ב- $a < b < c$. אם X שוב מסמן את תוצאת המתחרה הראשון, החוק המותנה של $N-1$ המותנה ב-X יהיה $\mathrm{Geom}(1)$ כאשר $X = a$, $\mathrm{Geom}(2/3)$ כאשר $X = b$ ו- $\mathrm{Geom}(1/3)$ כאשר $X = c$. לכן

$$EN = 1 + E\,E(N-1|X) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{1}\right) = \boxed{\frac{17}{6}}$$

ד. אם נחליף את 3 במספר טבעי כללי m, נקבל באותו אופן

$$EN = 1 + E\,E(N-1|X) = 1 + \frac{1}{m}\left(\frac{m}{m} + \frac{m}{m-1} + \ldots + \frac{m}{1}\right)$$

ואפשר לבדוק (למשל ע"י מבחן האינטגרל) שאכן

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\ln m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = 1.$$