פתרון לתרגיל 8.2

למדנו שקונוולוציה (בדידה) של שתי פונקציות הסתברות פואסון נותנת פונקצית הסתברות פואסון עם פרמטר שהוא סכום שני הפרמטרים המקוריים. אם כן, ובאינדוקציה, $Z \sim \mathrm{Pois}(5\lambda)$, דהיינו, $p_Z(k) = e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^k}{k!}$ עבור $k = 0, 1, 2, \ldots$.

פתרון לתרגיל 8.6

$S = \mathrm{Exp}(1)$, $A = \mathrm{Exp}(2)$

א.

$$P(A > S) = \int_0^\infty e^{-s}\left(\int_s^\infty 2\,e^{-2a}da\right)ds = \int_0^\infty e^{-3s}ds = \boxed{\frac{1}{3}}\,.$$

ב. (מניחים הפרמטרים λ ניתנו ביחידות של $\frac{1}{\text{דקה}}$).

$$\begin{aligned} P(\max(S,A)>5) &= 1 - P(S \le 5)P(A \le 5) = 1 - (1-e^{-5})(1-e^{-10}) \\ &= \boxed{e^{-5} + e^{-10} - e^{-15}}\,. \end{aligned}$$

פתרון לתרגיל 8.8

א. ראשית, S יכול לקבל ערכים ב-$[0,3]$ ולכן $f_S(s) = 0$ אם $s < 0$ או $s > 3$.
כאשר $s \in [0,3]$:

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(s-x)\, dx = \int_{\max(0,s-2)}^{\min(1,s)} \frac{1}{2}\, dx.$$

תחום האינטגרציה נקבע כך כי מחוצה לו אחת משתי הצפיפויות מתאפסת.
גבולות האינטגרציה תלויים ב-"שליש" אליו שייך s: $[0,1]$, $[1,2]$ או $[2,3]$.

$$f_S(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^s ds = \frac{s}{2} & s \in [0,1] \\ \frac{1}{2}\int_0^1 ds = \frac{1}{2} & s \in [1,2] \\ \frac{1}{2}\int_{s-2}^1 ds = \frac{3-s}{2} & s \in [2,3] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פתרון לתרגיל 8.10

רואים מיד ש- X ו- Y בלתי תלויים, $f_X(x) = e^{-x}$ ו- $f_Y(y) = ye^{-y}$. הצפיפות של אורך התיקון כולו $Z = X + Y$ נתונה אם כן ע"י הקונוולוציה

$$f_Z(z) = \int_0^z ye^{-y}\, e^{-(z-y)}\, dy = e^{-z}\int_0^z y\, dy = \frac{z^2}{2}e^{-z}$$

(זו רק דוגמה של העובדה הכללית: $\Gamma(r_1,\lambda) \star \Gamma(r_2,\lambda) = \Gamma(r_1+r_2,\lambda)$; מהם כאן r_1, r_2 ו- λ ?)

אם נסמן $V =$ אורך השלב הארוך יותר אז (תוך שומוש באי התלות)

$$F_V(v) = P(X \le v)P(\,Y \le v) = \left(1 - e^{-v}\right)P(Y \le v)\,.$$

נקבל, ע"י אינטגרציה בחלקים,

$$P(Y \le v) = \int_0^v ye^{-y}\, dy = -ye^{-y}\Big|_0^v + \int_0^v e^{-y} = 1 - (1+v)e^{-v}$$

ולכן $\boxed{F_V(v) = 1 - (2+v)e^{-v} + (1+v)e^{-2v}}$

8.2
8.3*
8.6
8.8
8.9*
8.10
8.11*
8.12
8.15
8.16
8.18
8.19
8.20
êîñîä óåñá - *

פתרון לתרגיל 8.12

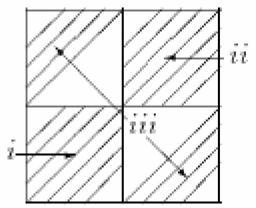
נסמן ב- X וב- Y את זמן השימוש בקו הטלפון של יניב ושל אורלי בהתאמה. אז $Z=\frac{X}{X+Y}$ הוה החלק היחסי של יניב. עבור $0\le z\le 1$

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P\left(\frac{X}{X+Y}\le z\right)=P(X\le zX+zY)=P\left(Y\ge \overbrace{\frac{1-z}{z}}^{\alpha}X\right)\\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\left(\int_{\alpha x}^\infty \lambda e^{-\lambda y}dy\right)dx=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}e^{-\lambda\alpha x}\,dx=\frac{1}{1+\alpha}=z\end{aligned}$$

זאת אומרת, Z אחיד ב- $[0,1]$.

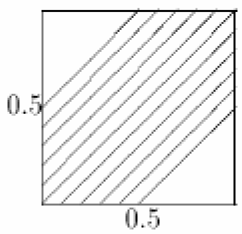
פתרון לתרגיל 8.15

א. בחירה בלתי תלויה של שני מספרים P ו- Q בקטע $[0,1]$ שקולה לבחירה של נקודה (P,Q) באופן אחיד בריבוע $[0,1]^2$.



א1. ניתן יהיה למקם כך את המקלון אם נשאר "חור" בגודל 0.5 לפחות, דהיינו אם $P,Q<0.5$ (i או $P,Q>0.5$ (ii או $|P-Q|>0.5$ (iii. על הריבוע, המאורע מסומן בשרטוט והסתברותו $\boxed{\frac{3}{4}}$.

א2. ההסתברות כאן היא 1 כי אי אפשר יהיה לתפוס בדיוק נקודה אחת עם המקלון רק אם $P=Q$ (זאת אומרת (P,Q) באלכסון של הריבוע), וזה יקרה בהסתברות 0.



א3. ניתן יהיה למקם כך את המקלון אם $|P-Q|<0.5$, ומאורע זה מסומן על הרבוע בשרטוט. היות והמשלים מורכב משני משולשים בעלי שטח $\frac{1}{8}$ כל אחד, הסתברות המאורע היא $\boxed{\frac{3}{4}}$.

א4. מדובר בחיתוך של שלושת המאורעות הקודמים, שהוא שני הריבועים הפינתיים, (פחות האלכסון הזניח), והסתברותו היא $\boxed{\frac{1}{2}}$.

ב. נסמן ב- L את הקצה השמאלי (האקראי) של I. מותנה בכך ש- $L=l$ ההסתברות p שהמקל יכסה נקודה מוגרלת כלשהי היא

$$\int_l^{l+\frac{1}{2}}6x(1-x)\,dx=3[(l+\frac{1}{2})^2-l^2]-2[(l+\frac{1}{2})^3-l^3]=\cdots=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}l-3l^2\ .$$

מספר הנקודות X שיכוסו ע"י I (מותנה בכך ש- $L=l$) מפולג $\mathrm{Bin}(6,p)$, ולכן

$$E(X|L=l)=6\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}l-3l^2\right)\qquad\qquad E(X|L)=3+9L-18L^2$$

ולכן $$EX=E\,E(X|L)=3+\tfrac{9}{4}-18\textstyle\int_0^{\frac{1}{2}}2l^2\,dl=\boxed{3.75}$$

ג.

$$\begin{aligned}M_X(s) &= Ee^{s|Q-P|}=2\int_0^1 e^{sq}\,dq\int_0^q e^{-sp}\,dp=\frac{2}{s}\int_0^1 e^{sq}\left(1-e^{-sq}\right)dq\\ &= \frac{2}{s^2}(e^s-s-1)=1+\frac{s}{3}+\frac{s^2}{4\cdot 3}+\frac{s^3}{5\cdot 4\cdot 3}+\cdots\end{aligned}$$

$\Leftarrow\quad \mathrm{var}|Q-P|=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\boxed{\frac{1}{18}},\qquad E|Q-P|^2=2\,\frac{1}{4\cdot 3},\qquad E|Q-P|=\boxed{\frac{1}{3}}.$

פתרון לתרגיל 8.16

נסמן ב- X וב- Y את מספר הזריקות של ענת ושל פנינה בהתאמה. אלה משתנים מקרים בלתי תלויים, כל אחד גיאומטרי עם פרמטר $p = \frac{1}{6}$. מספר השקלים שמחליפים ידיים הוא $Z = |X-Y|$, ואנו מעוניינים לחשב את EZ. נמצא תחילה את פונקצית ההסתברות של Z: עבור $k \geq 1$

$$\begin{aligned} p_Z(k) &= P(|X-Y|=k) = 2\sum_{i=1}^{\infty} P(X=i)P(Y=i+k) = 2p^2 \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1}q^{i+k-1} \\ &= 2p^2q^k \sum_{i=1}^{\infty} (q^2)^{i=1} = \frac{2p^2q^k}{1-q^2} = \frac{2p}{1+q}\, q^k \end{aligned}$$

(במקרה $k=0$ הגורם 2 איננו, אבל ממילא $p_Z(0)$ לא משפיע בטור הבא).

$$EZ = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_Z(k) = \frac{2p}{1+q}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{2q}{1+q}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1}}_{\frac{1}{p}} = \frac{2q}{p(1+q)} = \boxed{\tfrac{60}{11} \approx 5.45}$$

פתרון לתרגיל 8.18

למרות הניסוח המפוטל, מה שיש לחשב הן התוחלת והשונות של $|XY|$, כאשר (X,Y) וקטור אחיד בעיגול (ובמעגל בהתאמה) שרדיוסו R.

א. עיגול

$$\begin{aligned} E|XY| &= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{x^2+y^2<R^2} |xy|\, dx\, dy = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R (r\cos\theta)\,(r\sin\theta)\, r dr \\ &= \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\, d(2\theta) \int_0^R r^3 dr = \boxed{\frac{R^2}{2\pi}} \\ E|XY|^2 &= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{x^2+y^2<R^2} x^2y^2\, dx\, dy = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (r\cos\theta)^2\,(r\sin\theta)^2\, r dr \\ &= \frac{1}{8\pi R^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta\, d(2\theta)}_{2\pi} \int_0^R r^5 dr = \boxed{\frac{R^4}{24}} \quad \Longrightarrow \\ \mathrm{Var}(|XY|) &= \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4\pi^2}\right) R^4 = \boxed{\left(\frac{\pi^2-6}{24\pi^2}\right) R^4} \end{aligned}$$

ב. כאן המודל המתמטי הטבעי לבעיה הוא $X = R\cos\Theta, \quad Y = R\sin\Theta$ כאשר $\Theta \sim \mathrm{U}[0,2\pi]$.

$$\begin{aligned} E|XY| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |R\cos\theta|\,|R\sin\theta|\, d\theta = \frac{2R^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{4}\, d(2\theta) = \boxed{\frac{R^2}{\pi}} \\ E|XY|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2\cos^2\theta\, R^2\sin^2\theta\, d\theta = \frac{R^4}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{8}\, d(2\theta)}_{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{R^4}{8}} \\ \mathrm{Var}(|XY|) &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}\right) R^4 = \boxed{\left(\frac{\pi^2-8}{8\pi^2}\right) R^4} \end{aligned}$$

פתרון לתרגיל 8.19

התוחלת של $X+Y$ היא סכום התוחלות של X ו- Y, וכך גם עם השונויות (וזאת כי X ו- Y בלתי תלויים). מייד רואים ש- $EY=\frac{1}{2}$ וש- $\operatorname{Var} Y=\frac{1}{4}$, כך שכל מה שנותר הוא לחשב את EX ו- $\operatorname{Var} X$.

נרשום $M_X(s)=\frac{2}{3u-1}$ כאשר $u=u(s)=e^{-s}$, ומתקיים $\forall k \quad u^{(k)}(0)=(-1)^k$.

$$
\begin{aligned}
M_X'(s) &= -6\,\frac{u'}{(3u-1)^2} \implies EX=M_X'(0)=\frac{3}{2} \\
M_X''(s) &= -6\,\frac{(3u-1)^2u''-6(3u-1){u'}^2}{(3u-1)^4} \implies EX^2=M_X''(0)=3
\end{aligned}
$$

מכאן $\operatorname{Var} X=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ ולכן

$$
E(X+Y)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{2} \qquad \operatorname{Var}(X+Y)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\boxed{1}\,.
$$

(הערה: אולי הצלחתם לזהות ישירות את $M_X(s)$ כפונקציה יוצרת המומנטים של משתנב מקרי $\operatorname{Geom}(\frac{2}{3})$ וכך היה אפשר לדעת מיד את התוחלת והשונות של X).

פתרון לתרגיל 8.20

פונקצית ההתפלגות של המקסימום Z היא $P(X\le z,\ Y\le z)=z^2, \quad z\in[0,1]$

$$
\overset{s\neq 0}{\implies} M_Z(s)=\int_0^1 2z\,e^{sz}\,dz=\frac{2}{s}\left(ze^{sz}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{sz}\,dz\right)=\boxed{\frac{2e^s}{s^2}(e^{-s}-1+s)}
$$

הערה: $M_Z(s)\xrightarrow{s\to 0}1$ ו- $M_Z(s)$ גזירה ב- 0 (פתוח טיילור של e^{-s} סביב 0).

<u>שאלה 8.3</u> : נגדיר את המ"א הבאים:

A - אורך החיים של מכשיר A,

B - אורך החיים של מכשיר B,

C - אורך החיים של מכשיר C,

L- אורך החיים של המערכת L,

M- אורך החיים של המערכת M.

א. $L = A + B$.

בהסתמך על תרגיל 4 מגליון כיתה 11,

$$f_L(l) = \frac{1}{64}\begin{cases} l, & 0 \le l \le 8 \\ 16 - l, & 8 \le l \le 16 \end{cases}.$$

ב. $M = max\{L, C\}$, צריך לחשב $P(M < 10|M > 5)$.

$$P(M < 10|M > 5) = \frac{P(5 < M < 10)}{P(M > 5)}.$$

$$\begin{aligned} P(M > 5) &= 1 - P(M \le 5) = 1 - P(C \le 5, L \le 5) = 1 - P(C \le 5)P(L \le 5) \\ &= 1 - \int_0^5 \frac{1}{64} l dl \cdot \int_0^5 \frac{1}{8} dc = 1 - \frac{5^3}{2^{10}} = \frac{899}{1024}. \\ P(5 < M < 10) &= P(M < 10) - P(M \le 5) = P(L < 10)P(C < 10) - \frac{5^3}{2^{10}} \\ &= \left(1 - \int_{10}^{16} \frac{16 - l}{64} dl\right) \cdot 1 - \frac{5^3}{2^{10}} = \frac{611}{1024}. \end{aligned}$$

מכאן

$$P(M < 10|M > 5) = \frac{611}{899}.$$

<u>שאלה 8.9</u> :

$$f_x(z) = f_y(z) = \frac{d}{dz}\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \begin{cases} \frac{1}{z^2}, & z \ge 1 \\ 0, & else \end{cases}.$$

X, Y ב"ת, לכן

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2} & x \ge 1, \ y \ge 1 \\ 0, & else \end{cases}.$$

נגדיר $U = \dfrac{Y}{X}$, $V = XY$, ולכן $Y = V^{1/2}U^{1/2}$, $X = V^{1/2}U^{-1/2}$.

$$J = \begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}V^{1/2}U^{-3/2} & \frac{1}{2}V^{-1/2}U^{-1/2} \\ \frac{1}{2}V^{1/2}U^{-1/2} & \frac{1}{2}V^{-1/2}U^{1/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2U}.$$

ע"פ נוסחת הטרנספורמציה

$$f_{u,v}(u,v) = |J| f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) = \frac{1}{2u} \cdot \frac{1}{vu^{-1}uv} = \begin{cases} \frac{1}{2uv^2}, & (u,v) \in D^* \\ 0, & else \end{cases}.$$

נמצא את D^*:

הקו $x = 1$ עובר ל-$v = u$,

הקו $y = 1$ עובר ל-$v = \dfrac{1}{u}$,

הנקודה הפנימית $(2,4)$ עוברת לנקודה $(2,8)$.

לכן

$$D^* = \left\{ (u,v) | 0 \le u \le v, \ \frac{1}{u} \le v \right\}.$$

<u>שאלה 8.11</u> : נתון: $Q = (X, Y)$. $X \sim N(0,1), \ Y \sim N(0,1)$ בלתי תלויים.

נגדיר $S = \pi(X^2 + Y^2)$, צריך לחשב $F_S(s)$.

מתקיים $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

נגדיר מ"א חדשים:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad \Theta = \arctan \frac{Y}{X}.$$

לפי נוסחת הטרנספורמציה,

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}}, & r \ge 0, \ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0, & else \end{cases}.$$

אזי, בהתחשב ש-$S = \pi R^2$, נקבל:

$$F_S(s) = P(\pi R^2 \le s) = P\left(0 \le R \le \sqrt{\frac{s}{\pi}}\right) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{s/\pi}} \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{s}{2\pi}}, & s \ge 0 \\ 0, & else \end{cases}.$$