## פתרון לתרגיל 7.2

א.

| | | | $Y$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| $X$ | 0 | $\frac{44}{52}\frac{43}{51}$ | $2\frac{4}{52}\frac{44}{51}$ | $\frac{4}{52}\frac{3}{51}$ |
| | 1 | $2\frac{4}{52}\frac{44}{51}$ | $2\frac{4}{52}\frac{4}{51}$ | 0 |
| | 2 | $\frac{4}{52}\frac{3}{51}$ | 0 | 0 |

ב. $P(X > Y) = P(\ \{(1,0),\ (2,0),\ (2,1)\}\ ) = \frac{2\times4\times44+4\times3}{52\times51} \approx \boxed{0.137}$ .

## פתרון לתרגיל 7.4

$$\begin{aligned} p_{X_1,X_2}(j,k) &= P(X_1=j, X_2=k) = P(\overbrace{- - \cdots -}^{j-1} + \overbrace{- - \cdots -}^{k-j-1} +) \\ &= q^{j-1}\,p\,q^{k-j-1}\,p = p^2\,q^{k-2} \end{aligned}$$

כאשר $1 \le j < k$, ו- 0 אחרת.

כמו כן $p_{X_2}(k)=\sum_j p_{X_1,X_2}(j,k)=\sum_{j=1}^{k-1} p^2\,q^{k-2} = (k-1)\,p^2\,q^{k-2}$ עבור $k \ge 2$

## פתרון לתרגיל 7.5

א.

$$p_X(m) = \frac{e^{-7}4^m}{m!}\overbrace{\sum_{n=m}^{\infty}\frac{3^{n-m}}{(n-m)!}}^{e^3} = \frac{e^{-4}4^m}{m!} \Longrightarrow X \sim \text{Pois}(4)$$

$$p_Y(n) = \frac{e^{-7}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}4^m3^{n-m} = \frac{e^{-7}7^n}{n!} \Longrightarrow Y \sim \text{Pois}(7)$$

בפרט כאשר $m > n$ $\quad p_{X,Y}(m,n) = 0$ בעוד ש- $p_X(m)p_Y(n) \neq 0$, ולכן $X, Y$ אינם בלתי תלוים.

ב.

$$P(X=i,\ Y-X=j) = P(X=i,\ Y=i+j) = e^{-7}\frac{4^i}{i!}\frac{3^j}{j!}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots$$

ג. היות ו- $p_{X,Y-X}(i,j)$ מתפרקת לפונקציה של $i$ כפול פונקציה של $j$ (והתחום בו היא $0 \neq$ הוא "מלבן") נסיק ש- $X$ ו- $Y-X$ אכן בלתי תלויים.

**7.8**

א.

$$f_X(x)=cxe^{-2x^2}\int_0^\infty ye^{-y^2}dy=\tfrac{1}{2}cxe^{-2x^2},\ x>0$$

$$1=\int_0^\infty f_X(x)dx=\frac{c}{8}\int_0^\infty 4xe^{-2x^2}dx=\frac{c}{8},$$

לכן $c=8$. מכאן

$$f_X(x)=\begin{cases}4xe^{-2x^2}, & x>0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

ניתן לראות מכאן ש- $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ ולכן X ו-Y ב"ת.

ב.

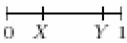
$$P(X\le 1,Y\le 1)=\int_0^1\int_0^1 8xye^{-(2x^2+y^2)}dxdy=(1-e^{-2})(1-e^{-1})$$

Y,X ב"ת, לכן

$$P(X\le 1\,|\,Y\le 1)=P(X\le 1)=\int_0^1 4xe^{-2x^2}dx=(1-e^{-2})$$

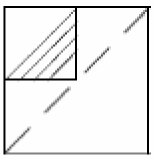
<u>פתרון לתרגיל 7.9</u>

נתון שצמד הנקודות $(X,Y)$ שנבחר, מפולג באחידות בתוך הריבוע $[0,1]^2$. המאורע "ניתן להרכיב משולש משלושת הקטעים" מתואר מתמטית ע"י כך שסכום ורכיהם של כל שני קטעים גדול מאורך הקטע השלישי (3 התנאים).

<u>אם $X<Y$</u> התמונה היא  ושלושת התנאים הם:

$$\begin{array}{rcl} X & < & 1-X\\ Y-X & < & X+1-Y\\ 1-Y & < & Y\end{array} \iff \begin{array}{rcl} X & < & 1/2\\ Y & < & X+1/2\\ Y & > & 1/2\end{array}$$

המתאימים למאורע



אשר הסתברותו היא $\frac{1}{8}$. באופן זהה מתקבלת הסתברות נוספת של $\frac{1}{8}$ כאשר $X>Y$, ולסיכום ההסתברות שניתן להרכיב משולש היא $\boxed{\frac{1}{4}}$.

**7.10**

נסמן : $X$-זמן הגעת הבחור

$Y$-זמן הגעת הבחורה

אנו נניח שזמן ההגעה שלהם הוא בין 0 ל 1 והמשך החישובים יהיו בשעות ולא בדקות.

$X\sim U[0,1]$, $Y\sim U[0,1]$ ולכן $f_Y=f_X=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ ומכיוון ש $X$ ו $Y$ ב"ת

$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in[0,1]^2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ אנו מחפשים $P((x,y)\in D)$ כאשר $D=\{(x,y):|x-y|<\frac{1}{6}\}$

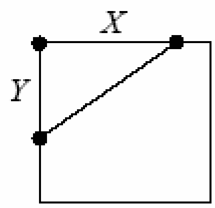
כלומר ההסתברות שהם יפגשו היא ההסתברות שהפרשי זמני הגעתם בערך מוחלט יהיה פחות מ $\frac{1}{6}$.

$$p((x,y)\in D)=\iint_D f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{x-\frac{1}{6}}^{x+\frac{1}{6}}1dydx=\int_0^1\frac{2}{6}dx=\frac{1}{3}$$

הערה: ניתן היה לפתור את התרגיל בצורה אחרת כפי שעשינו בתרגול כיתה מס' 3.

## 7.11

(א) ללא הגבלת הכלליות נניח שצלע של הריבוע שווה ל-1.
נסמן ב- $X,Y$ מ"מ המציינים מרחקים מנקודה המשותפת של זוג הצלעות, כמו בציור הבא:




לפי הנתון מתקיים: $f_X(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & x\notin[0,1]\end{cases}$, כנ"ל לגבי $f_Y(y)$.

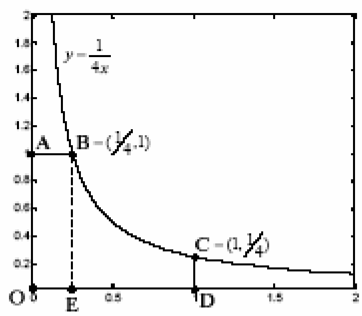
כמו כן מאחר ו- $X,Y$ בלתי תלויים, מתקיים: $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

נסמן ב- $S$ מ"מ המציין שטח של המשולש שנוצר. $S=\frac{XY}{2}$.

בעצם אנחנו מתבקשים למצוא $P(S<\frac{1}{8})$.

$$P(S<\frac{1}{8})=P(\frac{XY}{2}<\frac{1}{8})=P(XY<\frac{1}{4})=P((X,Y)\in F)$$

כאשר $F$ זהו תחום המוגדר ע"י $F=OABCDO$ כמו בציור הבא.




$$P((X,Y)\in F)=\iint_F f_{X,Y}(x,y)dxdy=\iint_F f_X(x)f_Y(y)dxdy=\iint_F dxdy=Area(F)$$

$$Area(F)=Area(OABE)+Area(EBCD)=\frac{1}{4}+\int_{1/4}^{1}\frac{1}{4x}dx=\frac{1}{4}\ln(4e)$$

סה"כ קיבלנו: $P(S<\frac{1}{8})=\frac{1}{4}\ln(4e)$.

(ב) $P(S>\frac{1}{2})=0$. ברור מהציור.

מטעמי סימטריה התשובות לשאלות לא ישתנו, אם נגריל את זוג צלעות הסמוכות.

**7.13**

נמצא את פונקצית ההתפלגות של וקטור (X,Y) משיקולים גיאומטריים. כלומר, נחלק את שטח התחום בו $(X \le x, Y \le y)$ בשטח הכולל של תחום ההגדרה של הווקטור (X,Y) (השווה ל- $\frac{1}{2}$ ) לכל בחירה של הפרמטרים x ו-y. נקבל:

$$\begin{cases} 0, & x \le 0 \ \ or \ y \le 0 \\ 2xy, & 0 \le x, y \le 1 \ \ and \ \ x+y \le 1 \\ 2\left(\frac{1}{2} - \frac{y(1-y)}{2} - \frac{x(1-x)}{2}\right), & 0 \le x, y \le 1 \ \ and \ \ x+y \ge 1 \\ 2\left(\frac{1}{2} - \frac{x(1-x)}{2}\right), & 0 \le x \le 1 \ \ and \ \ y \ge 1 \\ 2\left(\frac{1}{2} - \frac{y(1-y)}{2}\right), & 0 \le y \le 1 \ \ and \ \ x \ge 1 \\ 1, & x, y \ge 1 \end{cases}$$

אם $0 \le x, y \le 1$ ו-$x+y \le 1$ אז התחום הוא מלבן עם קודקודים (x,y), (x,0), (0,y), (0,0).
אם $0 \le x, y \le 1$ ו-$x+y \ge 1$ אז התחום נוצר ע"י איחוד של מלבן עם קודקודים
(0,0),(x,1-x),(x,0),(0,1-x) וטרפז עם קודקודים (x,1-x),(1-y,y), (0,1-x), (y,0)
אם $0 \le x \le 1$ ו-$y \ge 1$ התחום הוא המשולש בו מפולג (X ,Y) ללא המשולש עם קודקודים
(x,0), (1,0), (x,1-x).

**7.16**

א.

שטח המשולש 2 ולכן $\boxed{f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2}}$ בתחום.

צלעות המשולש: y=2x , y=4-2x , y=0

ולכן

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy=\boxed{\begin{cases}\int_0^{2x}\frac{1}{2}dy=x & 0\le x\le 1\\ \int_0^{-2x+4}\frac{1}{2}dy=2-x & 1\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\boxed{\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{2-\frac{y}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}(2-\frac{y}{2}-\frac{y}{2})=1-\frac{y}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & else\end{cases}}$$

ניתן לראות ש-X ו-Y אינם בלתי תלויים. בעצם מראש לא ייתכן כי הם בלתי תלויים כי תנאי הכרחי לכך הוא שהתחום שבו הצפיפות חיובית יהיה בצורת מלבן.

ב. נחפש את שטח המשולש החסום בין הצלעות: y=x , y=4-2x , y=0

כאשר נקודת המפגש בין y=4-2x , y=x היא (4/3,4/3), ולכן:

$$P(X<Y)=1-P(X>Y)=1-\int_0^{\frac{4}{3}}\left(\int_y^{2-\frac{y}{2}}\tfrac{1}{2}dx\right)dy=1-\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

למי שתוהה מדוע פתרנו את התרגיל בעזרת המשלים – התשובה היא שהאינטגרל שפתרנו יותר פשוט מהאינטגרל המקורי, בכך שלא צריך "לפרק" אותו לשני אינטגרלים.

ג. המשולש כולו נמצא מתחת לקו שעבורו $Y=-X+3 \Leftarrow Y+X=3$ פרט לנקודה $(1,2)$ שנמצאת על הקו. בכל מקרה אין במשולש תחום הנמצא מעל הקו ולכן ההסתברות במבוקשת היא אפס.

<u>פתרון לתרגיל 7.17</u>

$$\begin{aligned}P(X<Y<Z) &= 12\int_0^1 z\left(\int_0^z y\left(\int_0^y x^2\,dx\right)dy\right)dz\\ &= 12\int_0^1 z\left(\int_0^z y\,\frac{y^3}{3}\,dy\right)dz = 4\int_0^1 z\,\frac{z^5}{5}\,dz = \boxed{\tfrac{4}{35}}\end{aligned}$$

<u>פתרון לתרגיל 7.18</u>

נסמן ב-$Z$ את הזמן העובר מכניסתה של רינה לעירייה ועד לסיום הסידור (אם מתעלמים מהאפשרות של נפילת המחשב): $z>5$ $\quad f_Z(z)=0.1e^{0.1(z-5)}$ .

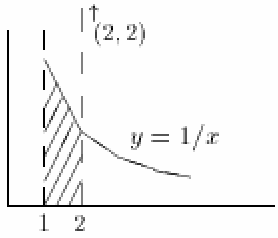
היות ו- $Y$ ו- $Z$ בלתי תלויים

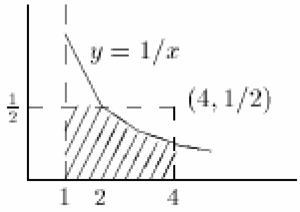
$$f_{Y,Z}(y,z)=\frac{1}{200}e^{-\frac{y}{20}}e^{-\frac{z-5}{10}} \qquad y>0,\ z>5 \implies$$

$$\begin{aligned}P(Z<Y) &= \frac{1}{200}\int_5^{\infty}e^{-\frac{z-5}{10}}\left(\int_z^{\infty}e^{-\frac{y}{20}}dy\right)dz=\frac{1}{10}\int_5^{\infty}e^{-\frac{z-5}{10}}e^{-\frac{z}{20}}dz\\ &= \frac{1}{10}e^{\frac{1}{2}}\int_5^{\infty}e^{-\frac{3z}{20}}dz=\frac{2e^{\frac{1}{2}}}{3}e^{-\frac{3}{4}}=\boxed{\tfrac{2}{3e^{\frac{1}{4}}}\approx 0.52}\end{aligned}$$

## פתרון לתרגיל 7.19

בשני המקרים, הערך של פ' התפלגות שווה לאינטגרל הצפיפות על התחום שצוייר:




$$F_{X,Y}(2,2)=\int_1^2\int_0^{\frac{1}{x}} 3xy^2\,dy\,dx = \boxed{1/2}$$

$$F_{X,Y}(4,\tfrac{1}{2})=\left(\int_1^2\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_2^4\int_0^{\frac{1}{x}}\right) 3xy^2\,dy\,dx = \boxed{7/16}$$

## פתרון לתרגיל 7.20

התנאי לשני שורשים ממשיים הוא $B^2 > 4AC$. יש לחשב את נפח אותו חלק של קובית היחידה (שציריו הם $A, B, C$) בו מתקיים אי השיוון. אם נשליך למישור $AC$, רואים שיש לבצע אינטגרל על אותו חלק של ריבוע היחידה עבורו $AC < \frac{1}{4}$. זו הפינה השמאול-תחתונה של הריבוע אשר גבולה הימין-עליון הוא העקום $c = \frac{1}{4a}$.

$$\begin{aligned}
P(B^2 > 4AC) &= \int_0^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^1 (1-2\sqrt{ac})\,dc\right)da + \int_{\frac{1}{4}}^1\left(\int_0^{\frac{1}{4a}}(1-2\sqrt{ac})\,dc\right)da \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{4}{3}\sqrt{a}\right)da + \int_{\frac{1}{4}}^1\left(\frac{1}{4a}-\overbrace{\frac{4\sqrt{a}}{3}\,\frac{1}{(4a)^{\frac{3}{2}}}}^{\frac{1}{6a}}\right)da \\
&= \left(\frac{1}{4}-\left(\frac{8}{9}a^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{4}}\right)\right)+\frac{1}{12}\ln a\Big|_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{5}{36}+\frac{1}{6}\ln 2 \approx \boxed{0.254}
\end{aligned}$$

ההסתברות לפתרון ממשי אחד היא $0$ מכיוון שהתנאי לכך הוא $B^2 = 4AC$, והשלשות $(A, B, C)$ המקיימות שיוון זה מהוות משטח בתוך הקוביה, וההסתברות להגריל שלשה מתוך משטח (יש צפיפות!) היא כמובן $0$.