פתרון לתרגיל 6.1

$$\sigma^2_{2X-3} = \sigma^2_{2X} = 4\,\sigma^2_X = 4(EX^2-(EX)^2) = \boxed{12}\ .$$

פתרון לתרגיל 6.3

נוכיח באינדוקציה על r ש- $I_r \equiv \int_0^\infty x^{r-1}e^{-\lambda x}\,dx = \frac{(r-1)!}{\lambda^r}$.

בפרט זה יראה ש- f_x אכן צפיפות.

עבור $r=1$ הדבר מיידי, וידוע מתוך הצפיפות האקספוננציאלית. כמו כן

$$I_{r+1} = \int_0^\infty \underbrace{x^r}_{u}\,\underbrace{e^{-\lambda x}}_{v'}\,dx = \underbrace{-\frac{1}{\lambda}x^r e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{0} + \frac{r}{\lambda}\int_0^\infty x^{r-1}e^{-\lambda x}\,dx = \frac{r}{\lambda}I_r \stackrel{\checkmark}{=} \frac{r!}{\lambda^{r+1}}\ .$$

כמו כן

$$\begin{aligned} m_k = EX^k &= \frac{\lambda^r}{(r-1)!}\int_0^\infty x^{r+k-1}e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^r}{(r-1)!}I_{r+k} \\ &= \frac{\lambda^r}{(r-1)!}\,\frac{(r+k-1)!}{\lambda^{r+k}} = \frac{1}{\lambda^k}\,\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} \end{aligned}$$

ובפרט

$$EX = m_1 = \boxed{\tfrac{r}{\lambda}} \qquad\qquad \mathrm{var}X = m_2 - m_1^2 = \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} = \boxed{\tfrac{r}{\lambda^2}}$$

פתרון לתרגיל 6.4

את המשתנה המקרי X של חלק א' בתרגיל 3.23 ניתן להציג $X = Y+1$ כאשר $Y \sim \mathrm{Geom}(p=\frac{1}{n})$, ולכן $\sigma^2_X = \sigma^2_Y = \frac{1-p}{p^2} = \boxed{n(n-1)}$.

עבור X של סעיף ב' עם $n=4$ מתקיים ש-

$$p_X(k) = \begin{cases} 1/4 & k=2 \\ 3/8 & k=3 \\ 9/32 & k=4 \\ 3/32 & k=5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} EX &= \frac{8\times 2 + 12\times 3 + 9\times 4 + 3\times 5}{32} = \frac{103}{32} \\ EX^2 &= \frac{8\times 4 + 12\times 9 + 9\times 16 + 3\times 25}{32} = \frac{359}{32} \end{aligned} \Longrightarrow \sigma^2_X = \tfrac{359}{32} - \left(\tfrac{103}{32}\right)^2 = \boxed{\tfrac{879}{1024}}$$

פתרון לתרגיל 6.5

א.

$$\begin{aligned} P\left(|X-\mu_X| > \sigma_X\right) &= P\left(\left|X-\frac{1}{\lambda}\right| > \frac{1}{\lambda}\right) = P\left(X > \frac{2}{\lambda}\right) \\ &= \int_{\frac{2}{\lambda}}^\infty \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx = \boxed{e^{-2}} \end{aligned}$$

ב.

$$\frac{1}{2} = P(X > x_0) = \int_{x_0}^\infty \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda x_0} \Longrightarrow \boxed{x_0 = \tfrac{\ln 2}{\lambda}}$$

(נשים לב ש- x_0 (המכונה <u>חציון</u>) אינה EX (הוא קטן ממנה) .

פתרון לתרגיל 6.6

מתוך 216 התוצאות של זריקת 3 קוביות, 6 יציגו שלשה זהה ($X=1$) וב- $6\cdot 5\cdot 4$ מהם שלושת התוצאות תהיינה שונות ($X=3$). מכאן ש- $X=2$ ב-90 מהתוצאות. לכן

$$EX = \frac{1\times 6 + 2\times 90 + 3\times 120}{216} = \boxed{\tfrac{91}{36}} \quad (\approx 2.53)$$

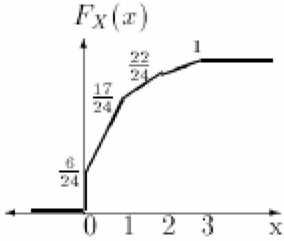
$$EX^2 = \frac{1\times 6 + 4\times 90 + 9\times 120}{216} = \frac{8676}{1296} \Longrightarrow \sigma^2_X = \frac{8676 - 91^2}{1296} = \boxed{\tfrac{395}{1296}} \ (\approx 0.3)$$

פתרון לתרגיל 6.7

4.16) נזכיר תחילה את פונקצית ההתפלגות (המעורבת) של תרגיל 4.16:

$$F_x(x) = \sum_{i=1}^{4} P(X \le x \mid i \text{ פקיד})\, P(i \text{ פקיד})$$

$$= \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac14\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right) = \frac14 + \frac{11}{24}x & 0\le x<1 \\ \frac14\left(1+1+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right) = \frac12 + \frac{5}{24}x & 1\le x<2 \\ \frac14\left(1+1+1+\frac{x}{3}\right) = \frac34 + \frac{2}{24}x & 2\le x<3 \\ 1 & 3\le x \end{cases}$$



פונקצית התפלגות זו מתפרקת כ- $\frac14 F_{X_1}(x) + \frac34 F_{X_2}(x)$ כאשר X_1 בדידה ומרוכזת ב- 0 (ז.א. $X_1 \equiv 0$). כמו כן, ל- X_2 יש צפיפות $\begin{cases} 11/18 & 0<x<1 \\ 5/18 & 1<x<2 \\ 2/18 & 2<x<3 \end{cases}$.

ברור ש- $EX_1 = EX^2 = 0$ בעוד ש-

$$EX_2 = \int_0^3 x\, f_{X_2}(x)\,dx = \frac{1}{18}\left(11\,\frac{1^2-0^2}{2} + 5\,\frac{2^2-1^2}{2} + 2\,\frac{3^2-2^2}{2}\right) = 1$$

$$EX_2^2 = \int_0^3 x^2\, f_{X_2}(x)\,dx = \frac{1}{18}\left(11\,\frac{1^3-0^3}{3} + 5\,\frac{2^3-1^3}{3} + 2\,\frac{3^3-2^3}{3}\right) = \frac{14}{9}$$

לבסוף: $EX = \frac14 EX_1 + \frac34 EX_2 = \boxed{\frac34}$, $EX^2 = \frac14 EX_1^2 + \frac34 EX_2^2 = \frac76$ כך ש- $\text{var}\,X = \frac76 - \frac{9}{16} = \boxed{\frac{29}{48}}$, (שימו לב ש- $\text{var}\,X \neq \frac14 \text{var}\,X_1 + \frac34 \text{var}\,X_2$).

פתרון לתרגיל 6.8

אם $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ נקבל ע"י השלמה לרבוע

$$M_X(s) = Ee^{sX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2-2\sigma^2 sx}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2(\mu+\sigma^2 s)x+(\mu+\sigma^2 s)^2}{2\sigma^2}}\,dx\right)}_{=1 \text{ בתור אינטגרל של צפיפות נורמלית}} e^{\frac{(\mu+\sigma^2 s)^2-\mu^2}{2\sigma^2}} = \boxed{e^{\mu s+\frac{\sigma^2 s^2}{2}}}\ .$$

בפרט, אם $Y = aX+b$: $M_Y(s) = Ee^{s(aX+b)} = e^{bs}M_X(as) = e^{(a\mu+b)s+\frac{a^2\sigma^2 s^2}{2}}$
ואם נשווה עם הבטוי שקבלנו למעלה, נראה שזו פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה $N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$. על פי העובדה שצוטטה בהמשך לשאלה, נסיק ש- $Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.

(כאשר $a=0$ מתקבל משתנה השווה דטרמיניסטית ל- b. מקובל לומר שמשתנים דטרמיניסטיים גם הם משתנים נורמליים -רק עם שונות 0- כך שגם במקרה $a=0$ הטענה נכונה, לפחות במובן זה.)

פתרון לתרגיל 6.9

$M_X(s) = \int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{sx}}{2x^2}\,dx + \int_1^{\infty}\frac{e^{sx}}{2x^2}\,dx$. עבור $s<0$ האינטגרל הראשון מתבדר, בעוד שכאשר $s>0$, השני מתבדר. פרוש הדבר ש- $M_X(s)<\infty$ רק עבור $s=0$.

פתרון לתרגיל 6.10

לפי הנתון,

$$0.4 = P(|X-\mu_x| > 2\sigma_X) \overset{\text{צ'בישב}}{\le} \frac14 = 0.25$$

וזאת סתירה. לכן אין משתנה מקרי כזה.

פתרון לתרגיל 6.11

נסמן X = אורך הנסיעה.

$$P(X>60) \le P\left(|X-\underbrace{\mu_X}_{30}|>6\underbrace{\sigma_X}_{5}\right) \overset{\text{צ'בישב}}{\le} \frac{1}{36} < 0.03$$

פתרון לתרגיל 6.12

א. $P(|X-3.5|>2.5) = P(\{X<1\}\cup\{X>6\}) = P(\emptyset) = 0$

ב. ברור ש- $EX = 3.5$. כמו כן,

$\sigma_X^2 = E(X-3.5)^2 = \frac{2(0.5)^2+2(1.5)^2+2(2.5)^2}{6} = \frac{35}{12}$ ולכן, לפי צ'בישב,

$P(|X-3.5|>2.5) \le \frac{35}{12(2.5)^2} = \frac{7}{15}$.

פתרון לתרגיל 6.14

א. $M'_X(s) = \frac{1}{(1-s)^2} \implies EX = M'_X(0) = \boxed{1}$

$$M''_X(s) = \frac{2}{(1-s)^3} \implies EX^2 = M''_X(0) = 2$$

ולכן $\text{var } X = EX^2-(EX)^2 = 2-1^2 = \boxed{1}$

ב. $M'_X(s) = (6+2s)e^{6s+s^2} \implies EX = M'_X(0) = \boxed{6}$

$$M''_X(s) = (38+24s+4s^2)e^{6s+s^2} \implies EX^2 = M''_X(0) = 38$$

ולכן $\text{var } X = EX^2-(EX)^2 = 38-6^2 = \boxed{2}$

ג. $C=8 \implies 1 = M_X(0) = \frac{C}{8}$. כמו כן

$$M'_X(s) = \frac{24}{(2-s)^4} \implies EX = M'_X(0) = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$M''_X(s) = \frac{96}{(2-s)^5} \implies EX^2 = M''_X(0) = \frac{96}{32} = \boxed{3}$$

ולכן $\text{var } X = EX^2-(EX)^2 = 3-\frac{9}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

פתרון לתרגיל 6.15

א. שפוע הקטע OQ הוא פשוט $\tan\Theta$ ולכן עלינו לחשב

$$E\tan\Theta = \frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta \, d\theta = -\frac{6}{\pi}\ln\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}\ln 3 \approx \boxed{1.049}$$

ב. מתוך הסימטריה של צפיפות Θ סביב $\frac{\pi}{4}$ נסיק ש- $E\Theta = \frac{\pi}{4}$, ואם נפעיל את אי השויון של ינסן לפונקציה $\tan\theta$ (קמורה ב-$(0,\frac{\pi}{2})$) נקבל

$$E\tan\Theta \ge \tan E\Theta = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$