5.2
5.4
5.5
5.7
5.9
5.10
5.11
5.12
5.13
5.14
5.15

פתרון לתרגיל 5.2

$$p_X(k) = P(X=k) = \frac{\overbrace{\binom{a}{k}}^{\text{מס' } k \text{־יות מסוג א'}} \overbrace{\binom{b}{n-k}}^{\text{מס' } (n-k) \text{־יות מסוג ב'}}}{\underbrace{\binom{a+b}{n}}_{\text{מס' } n \text{־יות}}}, \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

ובפרט אנו רואים ש- $\qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n} \qquad (*)$

כעת, $EX = \frac{1}{\binom{a+b}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$. הסכום שווה ל-

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{a!}{(k-1)!(a-k)!} \frac{b!}{(n-k)!(b-(n-k))!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a(a-1)!}{(k-1)!((a-1)-(k-1))!} \frac{b!}{((n-1)-(k-1))!(b-((n-1)-(k-1)))!} \\
&\overset{j=k-1}{=} a \sum_{j=0}^{n-1} \binom{a-1}{j}\binom{b}{(n-1)-j} = a \binom{a+b-1}{n-1}
\end{aligned}$$

(השויון האחרון ניתן ע"י $(*)$ עם $n \leftrightarrow (n-1)$ ו- $a \leftrightarrow (a-1)$). לבסוף

$$EX = \frac{n!(a+b-n)!}{(a+b)!} \frac{a(a+b-1)!}{(n-1)!(a+b-n)!} = \boxed{\frac{an}{a+b}}$$

<u>דיון:</u> עם חושבים על המדגם כ-n לקיחות בזו אחר זו (ללא החזרה), מפתה לטעון שמדובר ב- n נסויי ברנולי, שהרי ראינו כבר שההסתברות להוצאת עצם מסוג א' (הצלחה) שווה ל- $p = \frac{a}{a+b}$ לא רק בשלב הראשון אלא גם בכל השלבים הבאים. אם כך הדבר, היה נובע מיד ש- $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ וש- $EX = np = n\frac{a}{a+b}$!

לרוע המזל, אלה <u>אינם</u> נסויי ברנולי! אמנם הסתברות ההצלחה קבועה מנסוי לנסוי, אבל נסויים אלה אינם בלתי תלויים: אם, למשל, יודעים שבנסוי הראשון נלקח עצם מסוג א', ההסתברות שבנסוי הבא יילקח שוב עצם מסוג א' אינה עוד $\frac{a}{a+b}$ (אלא $\frac{a-1}{a+b-1}$).

מה שתרגיל זה אומר הוא שבכל סידרה של n ניסויים בינאריים (הצלחה-כשלון) בהם הסתברות ההצלחה p היא קבועה בכל הנסויים, תוחלת מספר ההצלחות עדיין שווה ל- np <u>גם אם הנסויים אינם בלתי תלויים</u>. אבל את זאת היינו צריכים להוכיח ע"י חשבון.

פתרון לתרגיל 5.4

$$E\frac{1}{X+1} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)}{\lambda} = \boxed{\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}}$$

פתרון לתרגיל 5.5

יש שלוש אפשרויות ל- $\{X=k\}$: $\quad k = 1,2,3$.

k	תאור המשיכות	ההסתברות
1	אדום	$\frac{3}{5} = 0.6$
2	לבן-אדום	$\frac{2}{5}\frac{3}{4} = 0.3$
3	לבן-לבן-אדום	$\frac{3}{5}\frac{1}{4}1 = 0.1$

$$\Longleftarrow \quad EX = 1(0.6)+2(0.3)+3(0.1) = \boxed{1.5}$$

שאלה 5.7 :

$$EX = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}} \quad (i)$$

(ii) הצפיפות סימטרית סביב 1 ולכן $EX = \boxed{1}$

$$EX = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx = 1 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}} \quad (iii)$$

(כאן היה נוח יותר, אך לא הכרחי, להשתמש בנוסחה החליפית לתוחלת של משתנה מקרי חיובי)

5.9

א.

$$F_Y(y) = P\left(\frac{1}{4}X^2 \le y\right) = P\left(2 \le X \le 2\sqrt{y}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{\sqrt{y}-1}{3} & 1 \le y \le 16 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{y}} & 1 \le y \le 16 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ב.

דרך א':

$$EY = \frac{1}{4}EX^2 = \frac{1}{4}\int_2^8 \frac{x^2}{6} dx = 7$$

דרך ב':

$$EY = \int_1^{16} \frac{\sqrt{y}}{6} dx = 7$$

פתרון לתרגיל 5.10

$$EY = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_\infty^0 = \boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}$$

שאלה 5.11 :

$$EX = 0 \cdot P(X=0) + \sum_{k=1}^\infty 2^k \cdot P\left(X = 2^k\right) = \sum_{k=1}^\infty 2^k \cdot 2^{-(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

מטעמי סימטריה $EY = 0$.

א.

$$P\left(U_i \text{ נבחר} \mid X<b\right)=\frac{P\left(X<b \mid U_i \text{ נבחר}\right)\cdot P\left(U_i \text{ נבחר}\right)}{P(X<b)}$$

$$P\left(X<b \mid U_i \text{ נבחר}\right)=\begin{cases}0, & b<0\\ \frac{b}{i} & 0\le b<i\\ 1, & b\ge i\end{cases}$$

$$P(X<b)=\sum_{i=1}^{4}P\left(X<b \mid U_i \text{ נבחר}\right)\cdot P\left(U_i \text{ נבחר}\right)$$

מכאן נוכל לבנות את טבלת ההסתברויות המבוקשת :

	1	2	3	4
0.5	0.111111	0.055556	0.037037	0.027778
1.5	0.387097	0.290323	0.193548	0.145161
2.5	0.473684	0.473684	0.394737	0.296053
3.5	0.4	0.4	0.4	0.35

ב.

$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{i=1}^{4}P\left(X<x \mid U_i \text{ נבחר}\right)P\left(U_i \text{ נבחר}\right)=$$

$$=0.2\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{1} & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}+0.3\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{2} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}+0.3\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{3} & 0\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}+0.2\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{4} & 0\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.5x & 0\le x<1\\ 0.3x+0.2 & 1\le x<2\\ 0.15x+0.5 & 2\le x<3\\ 0.05x+0.8 & 3\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

ולשרטט זאת בטח תוכלו לבד.

ג. את התוחלת נוכל לחשב במספר דרכים :
ראשית, המשתנה האקראי הוא אי שלילי ולכן ניתן להשתמש בנוסחת הזנב. שנית, ניתן לראות כי פונקצית התפלגות רציפה ולכן יש צפיפות וחישוב התוחלת הוא לפי ההגדרה :

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 0.5xdx+\int_1^2 0.3xdx+\int_2^3 0.15xdx+\int_3^4 0.05xdx=1.25$$

5.13

א. נחשב את פונקציית ההתפלגות של Y. עבור $y<-1$,$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$. עבור $y\in(-1,0)$ מתקיים:

$$P(Y\le y)=P(Y<-1)+P(Y=-1)+P(Y\in(-1,y])=P(X\in[-1,0])=$$
$$=\int_{-1}^{0}(1+t)dt=\frac{1}{2},\qquad \forall y\in[-1,0]$$

אם $y\in(0,1]$ אזי

$$P(Y\le y)=P(Y\in[0,y))+P(Y<0)=\frac{1}{2}+P(X\le y^2)=\int_0^{y^2}(1-t)dt+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+y^2-\frac{y^4}{2}$$

וכמובן $P(Y\le y)=1$ עבור $y>1$.

לכן, פונקציית ההתפלגות $F_Y(y)$ נראית באופן הבא:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<-1\\ \frac{1}{2} & y\in[-1,0)\\ \frac{1}{2}+y^2-\frac{y^4}{2} & y\in[0,1]\\ 1 & y>1\end{cases}$$

קל לראות כי $F_Y(y)$ רציפה בכל הנקודות למעט $y=-1$ בה יש לה קפיצה בגודל $\frac{1}{2}$.

ב.
משתנה אקראי Y הוא מעורב. הוא לא יכול להיות בדיד כי מרחב הערכים שלו אינו בר מניה ולא יכול להיות רציף כי פונקציית ההתפלגות שלו אינה רציפה.

ג.
נעיר כי מהנתון נובע כי:

$$Y=(-1)\cdot\mathbf{1}_{-1<X<0}+\sqrt{X}\cdot\mathbf{1}_{0\le X\le 1}$$

כאשר $\mathbf{1}_A$ זה פונקצית מציין של A. לכן

$$EY=\int_{-1}^{0}(-(1+t))dt+\int_0^1((1-t)\sqrt{t})dt=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=-\frac{7}{30}$$

הערה: אפשר למצוא את EY ע"י פירוק של $F_Y(y)$ לחלק בדיד ורציף.

פתרון לתרגיל 5.14

א. כאשר $n=0$, מתקיים $F(y)=1$ לכל $y>0$ ובגלל הרציפות מימין $F(0)=\lim_{y\to 0^+}F(y)=1$, דהיינו כאן המוסכמה הנכונה ל- 0^0 היא 1.

ב. עבור $0<y\leq 1$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y\leq y)=\sum_{n=0}^{\infty}P(Y\leq y\,|\,N=n)\,P(N=n)=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{1}{4^n} \\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{4}\right)^n=\frac{3}{4-y} \end{aligned}$$

ושוב, בגלל הרציפות מימין (או בגלל המוסכמה שנקבעה בסעיף הקודם) בטוי זה גם נכון ב- $y=0$.

פונקציה זו שווה 0 ב- $y<0$, "קופצת" ל- $\frac{3}{4}$ ב- $y=0$, ומשם עולה (באופן כעור) ל-1 ב-$y=1$. לכל $y>1$, $F_Y(y)=1$, כמובן.

ג. זאת התפלגות מעורבת. נרשום $F_Y=\alpha\,F_{Y_1}+\beta\,F_{Y_2}$, אז $\alpha=3/4,\ \beta=1/4$ בעוד ש- $Y_1\equiv 0$ ו- Y_2 משתנה רציף בהחלט בעל צפיפות $f_{Y_2}(y)=\frac{C}{(4-y)^2}$ עבור $0<y<1$, כאשר הנרמול קובע ש- $C=12$.

ד.

$$EY=\alpha\,EY_1+\beta\,EY_2=\frac{3}{4}0+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{12y}{(4-y)^2}\,dy=\left(1-3\ln\frac{4}{3}\right)\approx 0.137$$

פתרון לתרגיל 5.15

נגדיר $X=$ מספר המשחקים עד שחיים שוב יתמוך בהפועל.
נבדוק את האפשרויות של $\{X=k\}$ (ונסמן $+$: "יחליף", ו- $-$: "לא יחליף").

k	תאור הטלות המטבע	ההסתברות
1	$-$	q
2	$++$	p^2
3	$+-+$	p^2q
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$+\overbrace{-\cdots-}^{k-2}+$	p^2q^{k-2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\Longrightarrow\quad EX=q+\frac{p}{q}\left(p\sum_{k=2}^{\infty}kq^{k-1}\right)\quad .$$

במקום לחשב את הטור, נשים לב שהבטוי בסוגריים נכתב כך שמלבד האיבר עבור $k=1$ החסר, הוא שווה לתוחלת של משתנה מקרי גיאומטרי (p). לכן

$$EX=q+\frac{p}{q}\left(\frac{1}{p}-p\right)=q+\left(\frac{p}{q}\right)\frac{1-p^2}{p}=q+(1+p)=\boxed{2}.$$

בפרט, תוחלת זו לא תלויה כלל ב- p !