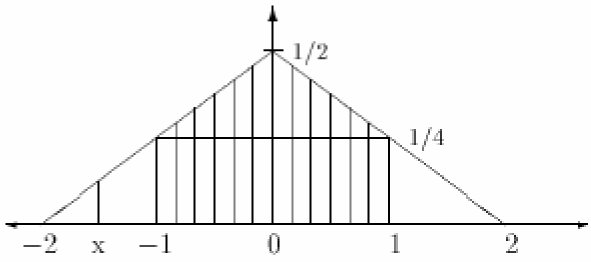
פתרון לתרגיל 4.3

א.



זו אכן פונקצית צפיפות כי שטח המשולש שווה 1.

ב. ההסתברות ש- $-1<X<1$ נתונה ע"י שטח התחום המקווקו השווה ל- $\frac{3}{4}$.

באופן דומה, ההסתברות ש- $X>-\frac{1}{2}$ נתונה ע"י שטחו של מרובע מתאים (אשר לא סומן בציור), השווה ל- $\frac{23}{32}$.

ג. עבור $x<0$ (כפי שסומן בציור), $F_X(x)$ נתון ע"י שטח המשולש השמאלי הקטן. אורך בסיס אותו משולש הוא $x+2$ בעוד שהגובה הוא $\frac{1}{4}(x+2)$ (היות והשפוע הוא $\frac{1}{4}$). קבלנו $F_X(x)=\frac{1}{8}(x+2)^2$ עבור $-2\le x<0$.

עבור $x>0$ ניתן למצוא את $F_X(x)$ ע"י חישוב שטח דומה. אבל פשוט יותר לשים לב שעבור צפיפות שהיא סימטרית סביב ציר y (כמו זו ובדומה לצפיפות הגאוסית התקנית) מתקיים $F_X(x)=1-F_X(-x)$. לסיכום

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x\le -2 \\ \frac{1}{8}(4+4x+4x^2) & -2\le x\le 0 \\ \frac{1}{8}(4+4x-4x^2) & 0\le x\le 2 \\ 1 & 2\le x \end{cases}.$$

4.4

למשתנה מקרי X יש צפיפות : $f_X(x)=\begin{cases} ax & 0\le x\le 1 \\ a & 1<x\le 2 \\ -ax+3a & 2<x\le 3 \end{cases}$

א) חשב את a

ב) חשב את פונקציית ההתפלגות $F_X(x)$ וצייר אותה.

<u>פתרון :</u>

א) נמצא את a ע"י הדרישה $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$ כלומר : $\int_0^1 axdx+\int_1^2 adx+\int_2^3(-ax+3a)dx=1$

כלומר $\left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^1+\left.ax\right|_1^2+\left.(-\frac{ax^2}{2}+3a)\right|_2^3=1$

$\frac{a}{2}+2a-a-\frac{9a}{2}+9a+\frac{4a}{2}-6a=1$ נקבל $a=\frac{1}{2}$.

ב) נמצא את פונקציית ההתפלגות :

אם $x<0$ $\quad F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}0=0$

אם $0\le x\le 1$ $\quad F_X(x)=\int_0^x\frac{1}{2}tdt=\frac{1}{4}x^2$

אם $1\le x\le 2$ $\quad F_X(x)=\int_0^1\frac{1}{2}xdx+\int_1^x\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

אם $2<x\le 3$

$$F_X(x)=\int_0^1\frac{1}{2}xdx\int_1^2\frac{1}{2}dx\int_2^x(-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2})dt=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+1-3=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}$$

אם $3\le x$ כמובן ש $F_X(x)=1$.

סה"כ נקבל:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} & 1\le x\le 2 \\ -\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4} & 2\le x\le 3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

<u>שאלה 4.5</u> :

א. צריך להתקיים $\int_0^\infty ae^{-bt}dt=a\cdot\frac{1}{b}=1$ ולכן $a=b$.

ב. $\int_0^1 2e^{-2t}dt=1-e^{-2}$

<u>פתרון לתרגיל 4.6</u>

א. ברור ש- $F_X(x)=0$ אם $x<3$. כאשר $x\ge 3$

$$F_X(x)=\int_3^x f_X(u)\,du=\int_3^x\frac{81}{u^4}du=-\left.\frac{81}{3u^3}\right|_3^x=27\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{x^3}\right)=\boxed{1-\frac{27}{x^3}}$$

ב. $$P(X>10\mid X>5)=\frac{P(X>10)}{P(X>5)}=\frac{1-F_X(10)}{1-F_X(5)}=\frac{27/10^3}{27/5^3}=\boxed{\frac{1}{8}}$$

ג. אילו היה חוסר זכרון, התוצאה של הסעיף הקודם היה צריך להיות שווה ל- $P(X>5)$, דהיינו ל- $\frac{27}{5^3}$, אבל זה פשוט לא נכון!

פתרון לתרגיל 4.7

$$P(2\le X\le 3\,|\,X>1)=\frac{P(\{2\le X\le 3\}\cap\{X>1\})}{P(X>1)}=\frac{P(2\le X\le 3)}{P(X>1)}=\boxed{\tfrac{1}{4}}$$

בין היתר זה אומר שלפילוג האחיד אין חוסר זיכרון. לו היה, התשובה היתה צריכה להיות שווה ל- $P(1\le X\le 2)=\frac{1}{5}$.

פתרון לתרגיל 4.9

א.
$$P(X<7)=\Phi\left(\tfrac{7-3}{2}\right)=\Phi(2)\approx\boxed{0.9772}$$
$$P(X>9)=1-\Phi\left(\tfrac{9-3}{2}\right)=1-\Phi(3)\approx\boxed{0.0013}$$

ב.
$$P(Y<1.5)=\Phi\left(\tfrac{1.5-2.5}{4}\right)=\Phi(-0.25)\approx\boxed{0.4013}$$
$$P(3.5\le Y\le 8)=\Phi\left(\tfrac{8-2.5}{4}\right)-\Phi\left(\tfrac{3.5-2.5}{4}\right)=\cdots\approx\boxed{0.3167}$$

פתרון לתרגיל 4.11

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{a} f_X(\overset{x=a-t}{x})\,dx+\int_{a}^{\infty} f_X(\overset{x=a+t}{x})\,dx\\ &= \int_0^{\infty} f(a-t)\,dt+\int_0^{\infty} f(a+t)\,dt\\ &\overset{\text{נתון}}{=} 2\int_0^{\infty} f(a-t)\,dt=2\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx=2P(X\le a)=2F_X(a)\end{aligned}$$

ומכאן $\boxed{F_X(a)=\frac{1}{2}}$.

4.12

נבצע תקנון. במקרה הראשון נקבל:

$$P(X<\mu)=P\left(Z<\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)=P(Z<0)=0.5$$

במקרה השני:

$$P(X<\mu-1.96\sigma)=P\left(Z<\frac{\mu-1.96\sigma-\mu}{\sigma}\right)=P(Z<-1.96)=0.025$$

פתרון לתרגיל 4.13

יש להבין מנסוח השאלה ש- $F_X(x)=0$ לכל $x\le 0$.

א.
- $e^{-\frac{x}{3}}$ פונקציה לא עולה, וכך גם $e^{-\left[\frac{x}{3}\right]}$. הסימן – הופכת את F_X לפונקציה לא יורדת. (זאת עבור $x>0$. ב- $(-\infty,0]$ F_X קבועה).
- ברור ש- $\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$. כמו כן, $e^{-\frac{x}{3}}\to 0$ ו- $e^{-\left[\frac{x}{3}\right]}\to 0$ כאשר $x\to+\infty$, ולכן $F_X(x)\to 1$.
- הפונקציות $\frac{x}{3}$ ו- $\left[\frac{x}{3}\right]$ רציפות מימין (הראשונה אפילו רציפה) ולכן כך גם $F_X(x)$ עבור $x>0$. כמו כן הגבולות מימין ומשמאול ב- $x=0$ שניהם שווים ל- 0, והרציפות ברורה ב- $(-\infty,0)$.

מדובר בפונקציה עולה ממש ב- $[0,\infty)$ עם קפיצות ב- $\{3,6,9,\dots\}$. למעשה, זו תערובת (עם משקלים $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{2}$) בין $X_1\sim\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{3}\right)$ ו- $3X_2$ כאשר $X_2\sim\mathrm{Geom}\left(\mathrm{p}=1-\frac{1}{e}\right)$.

ב.
$$(i)\quad P(X\ge 5)=1-F_X(5^-)=\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{5}{3}}+e^{-1}\right)\approx 0.28$$
$$(ii)\quad P(X<4)=F_X(4^-)=1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{4}{3}}+e^{-1}\right)\approx 0.68$$
$$(iii)\quad P(X=3)=F_X(3)-F_X(3^-)=\tfrac{1}{2}\left(e^{0}-e^{-1}\right)\approx 0.32$$
$$(iv)\quad P(X<9\,|\,X>5)=\frac{P(5<X<9)}{P(X>5)}=\frac{F_X(9^-)-F_X(5)}{1-F_X(5)}\approx 0.6675$$

(שימו לב ש- $F_X(9^-)=1-\frac{1}{2}(e^{-3}+e^{-2})$)

פתרון לתרגיל 4,14

א. $P(X\le a)=F_X(a)=\boxed{b}$ $\quad P(X=a)=\boxed{0}$ כי $F_X(x)$ רציפה ב- a.

$$P\left(\left|X-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}\right)=P\left(-\frac{1}{4}<X-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}<\frac{1}{4}\right)$$
$$=P\left(\frac{a}{2}<X<\frac{1+a}{2}\right)=F_X\left(\frac{1+a}{2}\right)-F_X\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1+b}{2}-\frac{b}{2}=\boxed{\tfrac{1}{2}}\ .$$

(למה נרשם, למשל, $F_X\left(\frac{1+a}{2}\right)=\frac{1+b}{2}$? מכיוון ש- F_X לינארית ב- $[a,1]$, ולכן אמצע הקטע בציר x עובר לאמצע הקטע בציר y).

ב. נחשב את m_k, המומנט מסדר k של X (בפועל נצטרך רק את m_1 ו- m_2).

$$\begin{aligned}
m_k &= \int_0^a \frac{b}{a}x^k\,dx+\int_a^1\frac{1-b}{1-a}x^k\,dx=\frac{1}{k+1}\left(\frac{b}{a}a^{k+1}+\left(\frac{1-b}{1-a}\right)\left(1-a^{k+1}\right)\right)\\
&= \cdots=\frac{1}{k+1}\left(\frac{1-a^{k+1}}{1-a}-b\frac{1-a^k}{1-a}\right)\\
&= \frac{1}{k+1}\left((1+a+\cdots+a^k)+b(1+a+\cdots+a^{k-1})\right)\\
\Longrightarrow \sigma_X^2 &= m_2-m_1^2=\frac{1}{3}(1+a+a^2-b(1+a))-\frac{1}{4}(1+a-b)^2\\
&= \frac{1}{12}(1+2b-2a+a^2+2ab-3b^2)
\end{aligned}$$

קל לבדוק ע"י נגזרות חלקיות לפי a ו- b שאין לבטוי זה מינימום או מקסימום מקומי (אלא רק נקודת אוכף אחת) ולכן השונות המירבית תתקבל עבור זוגות (a,b) הנמצאים על שפת הריבוע. עליו יש שתי נקודות מינימום לא מפתיעות ($(a,b)=(0,1)$ ו- $(1,0)$ המייצגות פילוגים מנוונים (ב- 0 וב- 1 בהתאמה) עבורן השונות היא כמובן 0, בנוסף לשתי נקודות מקסימום ($(a,b)=(0,\frac{1}{3})$ ו- $(1,\frac{2}{3})$) המייצגות התפלגות מעורבת עם משקל $\frac{1}{3}$ באחד מקצוות הקטע והשאר פילוג אחיד על כל הקטע. השונות המקסימלית בשני המקרים האלה היא $\boxed{\tfrac{1}{9}}$.

ג. אם נסתכל על הצפיפות של X, נראה שהיא תערובת של $U[0,a]$ עם משקל b ושל $U[a,1]$ עם משקל $(1-b)$ (בדומה לפרוק של התפלגויות מעורבות, אבל כאן שני "המרכיבים" רציפים). אם כן, ניתן לתאר כך נסוי שיוביל להתפלגות הנתונה: מטילים מטבע בעלת פרמטר הצלחה b. אם התקבלה הצלחה מגרילים מספר באחידות מתוך $[0,a]$ (למשל באמצעות רולטה מסומ-נת בהתאם), בעוד שאם התקבל כשלון במטבע, מגרילים מספר באחידות מתוך $[a,1]$ (רולטה אחרת). בכל מקרה, מכנים ב- X את המספר שהוגרל.

פתרון לתרגיל 4,15

א.
$$\begin{aligned}
1=\lim_{x\to\infty}F_X(x)=\lim_{x\to\infty}\tfrac{1+ax}{b+x}=a &\quad\Longrightarrow\quad \boxed{a=1}\\
0.1=P(X\le -1)=F_X(-1)=ce^{-1} &\quad\Longrightarrow\quad \boxed{c=\tfrac{e}{10}}\\
\tfrac{1}{3}=P(X\le 0)=F_X(0)=\tfrac{1+a0}{b+0}=\tfrac{1}{b} &\quad\Longrightarrow\quad \boxed{b=3}
\end{aligned}$$
(את $F_X(0)$ חישבנו לפי ההגדרה עבור $x>0$ בגלל הרציפות מימין).

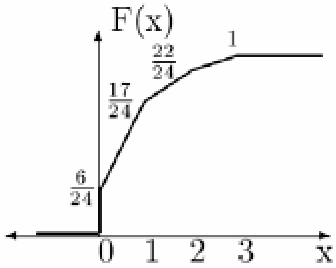
ב. כבר ראינו בסעיף הקודם ש- $\boxed{F_X(0)=\tfrac{1}{3}}$.

$$P(X=0)=F_X(0)-\lim_{x\to 0^-}F_X(x)=\frac{1}{3}-\lim_{x\to 0}ce^x=\frac{1}{3}-\frac{e}{10}\approx\boxed{0.0615}$$

4.16

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{4}P(X\le x\,|\,clerk\ \ i)P(clerk\ \ i)=$$

$$=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{11}{24}x & 0\le x<1\\ \frac{1}{4}\left(1+1+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{5}{24}x & 1\le x<2\\ \frac{1}{4}\left(1+1+1+\frac{x}{3}\right)=\frac{3}{4}+\frac{2}{24}x & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$



<u>פתרון לתרגיל 4.17</u>

נתשב את הצפיפות של Y באמצעות פונקצית ההתפלגות שלו. עבור $y\ge 0$

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P\left(4X^2\le y\right)=P\left(-\frac{\sqrt{y}}{2}\le X\le\frac{\sqrt{y}}{2}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)\\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)-1\end{aligned}$$

כאשר $\Phi(\cdot)$ היא פונקצית ההתפלגות הגאוסית התקנית. נגזור ונקבל עבור $y>0$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y}{dy}(y)=2\,\frac{1}{4\sqrt{y}}\,\Phi'\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\frac{e^{-\frac{y/4}{2}}}{\sqrt{2\pi}}=\boxed{\frac{e^{-\frac{y}{8}}}{\sqrt{8\,\pi\,y}}}$$

ו- 0 אחרת.

<u>פתרון לתרגיל 4.19</u>

א. Y מקבל ערכים ב- $[1,\infty)$. לכל $1\le y$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\frac{1}{X}\le y\right)=P\left(X\ge\frac{1}{y}\right)=\boxed{1-\frac{1}{y}}$$

$$\Longrightarrow^{(y>1)}\quad f_Y(y)=\boxed{\frac{1}{y^2}}\,.$$

עבור $y<1$ ברור ש- $F_Y(y)=f_Y(y)=0$.

ב. Z מקבל ערכים ב-$(-\infty,0)$. לכל $z<0$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\ln X\le z)=P(X\le e^z)=\boxed{e^z}$$

$$\Longrightarrow\quad f_Z(z)=\boxed{e^z}\ .$$

עבור $z>0$ ברור ש- $F_Z(z)=1$ ו- $f_Z(z)=0$.

(תאור אחר של הפילוג של Z הוא $-Z\sim \mathrm{Exp}(1)$).

פתרון לתרגיל 4.21

פונקצית ההתפלגות (הרציפה) של X נתונה אחרי אינטגרציה ע"י

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{4}(x+1)^2 & 1 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases} .$$

המשתנה המקרי Y נבדל מ- X בכך שכל ה-"מסה" של-X היתה במספרים השליליים מרוכזת כעת בערך $y = 0$. במונחי פונקצית ההתפלגות, זו של Y שווה לזו של X מלבד העובדה שהתחום בו היא שווה ל- 0 נמשך עד ל- $y = 0$, ובנקודה זו יש קפיצה כך שבערכים החיוביים F_Y מזדהה עם F_X. במילים אחרות

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{4}(y+1)^2 & 0 \le y < 1 \\ 1 & 1 \le y \end{cases} .$$

זו פונקצית התפלגות מעורבת.

4.22

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0, & y < -4 \\ P(X \le y), & -4 \le y < 4 \\ 1, & 4 \le y \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < -3 \\ \dfrac{y+3}{8}, & -3 \le y < 4 \\ 1, & 4 \le y \end{cases}$$

והמשתנה האקראי Y הוא מעורב כצפוי כי פונקציה F_Y אינה רציפה בנק' $y = 4$.

4.23

נשים לב כי X ~ U[-1,3]. Y יקבל ערכים בתחום [0, 3]. לכן

$$F_Y(y) = 0, \;\; y < 0$$
$$F_Y(y) = 1, \;\; y \ge 3$$
$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-y \le X \le y) = F_X(y) - F_X(-y), \;\; 0 \le y < 1$$
$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X \le y) = F_X(y), \;\; 1 \le y < 3$$

נסכם :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \dfrac{y}{2}, & 0 \le y < 1 \\ \dfrac{y+1}{4}, & 1 \le y < 3 \\ 1, & y \ge 3 \end{cases}$$

פונקצית ההתפלגות יצאה רציפה ולכן Y רציף.