3.3
3.6
3.7
3.8
3.11
3.12
3.13
3.15
3.17
3.19
3.20
3.21
3.22
3.23

פתרון לתרגיל 3.3

הטבלאות הבאות מתארות את הערכים שמתקבלים ע"י W ו- D בהתאמה, כאשר מספרי השורות (עמודות) מתארים את תוצאת הקוביה הראשונה (השניה), בעוד שהמשבצות מכילות את הערך שמתקבל בכל מקרה ע"י W ו- D בהתאמה.

W	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

D	1	2	3	4	5	6
1	0	−1	−2	−3	−4	−5
2	1	0	−1	−2	−3	−4
3	2	1	0	−1	−2	−3
4	3	2	1	0	−1	−2
5	4	3	2	1	0	−1
6	5	4	3	2	1	0

היות וכל משבצת חלה בהסתברות שווה $\frac{1}{36}$ נסיק ש-

$$p_W(k)=\begin{cases}11/36 & k=1 \text{ אם}\\ 9/36 & k=2 \text{ אם}\\ 7/36 & k=3 \text{ אם}\\ 5/36 & k=4 \text{ אם}\\ 3/36 & k=5 \text{ אם}\\ 1/36 & k=6 \text{ אם}\end{cases}\qquad F_W(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 11/36 & 1\le x<2\\ 20/36 & 2\le x<3\\ 27/36 & 3\le x<4\\ 32/36 & 4\le x<5\\ 35/36 & 5\le x<6\\ 36/36 & 6\le x\end{cases}$$

$$p_D(k)=\begin{cases}1/36 & k=-5 \text{ אם}\\ 2/36 & k=-4 \text{ אם}\\ 3/36 & k=-3 \text{ אם}\\ 4/36 & k=-2 \text{ אם}\\ 5/36 & k=-1 \text{ אם}\\ 6/36 & k=0 \text{ אם}\\ 5/36 & k=1 \text{ אם}\\ 4/36 & k=2 \text{ אם}\\ 3/36 & k=3 \text{ אם}\\ 2/36 & k=4 \text{ אם}\\ 1/36 & k=5 \text{ אם}\end{cases}\qquad F_D(x)=\begin{cases}0 & x<-5\\ 1/36 & -5\le x<-4\\ 3/36 & -4\le x<-3\\ 6/36 & -3\le x<-2\\ 10/36 & -2\le x<-1\\ 15/36 & -1\le x<0\\ 21/36 & 0\le x<1\\ 26/36 & 1\le x<2\\ 30/36 & 2\le x<3\\ 33/36 & 3\le x<4\\ 35/36 & 4\le x<5\\ 36/36 & 5\le x\end{cases}$$

שאלה 3.6

א. המשתנה X המתאים לבעיה הוא משתנה בינומי עם $n=10$ והסתברות להצלחה $p=0.95$ לכן ההסתברות ל – 7 הצלחות ו – 3 כישלונות (הצלחה = הממסר תקין) היא:

$$p(X=7)=\binom{10}{7}0.95^7 0.05^3\approx 0.0105$$

ב. פה אנו מחפשים את $p\left(X\ge 7 \middle| X\ge 5\right)$. נשתמש בהגדרה:

$$p\left(X\ge 7 \middle| X\ge 5\right)=\frac{p\left(X\ge 7\cap X\ge 5\right)}{p(X\ge 5)}=\frac{p(X\ge 7)}{p(X\ge 5)}$$

$$=\frac{\sum_{i=7}^{10}p(X=i)}{\sum_{i=5}^{10}p(X=i)}=\frac{\sum_{i=7}^{10}\binom{10}{i}0.95^i 0.05^{10-i}}{\sum_{i=5}^{10}\binom{10}{i}0.95^i 0.05^{10-i}}$$

פתרון לתרגיל 3.7

מדובר בסידרה של 40 ניסויי ברנולי, כאשר "הצלחה" היא אי-הופעה ($p = 0.1$).
כאן ההנחה היא שהביטולים נעשים באופן בלתי תלוי.
אם נסמן X = מספר הביטולים, אז $X \sim \mathrm{Bin}(40, 0.1)$ ו-

$$P(\text{מקום לכולם}) = P(\text{לפחות שני ביטולים})$$

$$= 1 - \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} (0.1)^0 (0.9)^{40} - \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \end{pmatrix} (0.1)^1 (0.9)^{39} = \boxed{0.9195} \ .$$

מצד שני, ועל פי הקירוב הפואסוני, $X \approx \mathrm{Pois}(\lambda)$ עם $\lambda = 40 \times 0.1 = 4$ ולכן

$$P(\text{מקום לכולם}) \approx 1 - e^{-4} \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} \right) = 0.9084 \ .$$

פתרון לתרגיל 3.8

נסמן: $A_i = \{$נורה מס' i תפעל לפחות 10 שעות$\}$ $\qquad i = 1, \ldots, 4$
$A = \{$המערכת כולה תפעל לפחות 10 שעות$\}$.

א. מדובר ב-4 נסויי ברנולי עם $p = 0.4$.

$$P(\{\text{המערכת תצליח}\}) = P(A) = P(\{\text{לפחות 2 הצלחות מתוך 4 נסויים}\})$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} 0.4^2 0.6^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} 0.4^3 0.6^1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} 0.4^4 0.6^0 = \boxed{0.5248} \ .$$

ב.
$$P\left(A \,\middle|\, \cup_{i=1}^4 A_i \right) = \frac{P(\overbrace{A \cap \left(\cup_{i=1}^4 A_i \right)}^{A})}{P\left(\cup_{i=1}^4 A_i \right)} = \frac{0.5248}{0.8704} \approx \boxed{0.603} \ .$$

כאשר השתמשנו ב- $P\left(\cup_{i=1}^4 A_i \right) = 1 - P\left(\cap_{i=1}^4 A_i^C \right) = 1 - 0.6^4 = 0.8704$.

פתרון לתרגיל 3.11

בסעיפים א' ו-ב' המפתח מוחזר כל פעם לצרור, ולכן מדובר בנסויי ברנולי עם פרמטר $p = \frac{1}{n}$ ($q = 1 - p = \frac{n-1}{n}$).

א. $P(\text{ההצלחה הראשונה תחול בנסוי מס' } k) = pq^{k-1} = \boxed{\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}}$.
זו פונקצית ההסתברות הגיאומטרית של ההצלחה הראשונה בנסויי ברנולי.

ב. $P(\text{הצלחה ראשונה עד הנסוי מס' } k) = \sum_{i=1}^k pq^{i-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = \boxed{\frac{n^k - (n-1)^k}{n^k}}$.

כעת המפתחות הכושלים לא מוחזרים, ולכן הסתברויות ההצלחה משתנות מנסוי לנסוי. כבר לא מדובר בנסויי ברנולי.

ג. עבור $k = 1, \ldots, n$

$$P(\text{המפתח מס' } k \text{ פותח}) = \overbrace{\frac{\cancel{n-1}}{n} \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \cdots \frac{n-k+1}{\cancel{n-k+2}}}^{\text{הסתברויות לכשלון } k-1} \overbrace{\frac{1}{n-k+1}}^{\text{הצלחה}}$$
$$= \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{n-k+1} = \boxed{\frac{1}{n}} \ .$$

התקבל שלכל אחד מ-n המפתחות יש סיכוי שווה להצליח. בדיעבד, זה הגיוני מאוד. למה ?

פתרון לתרגיל 3.12

א. X יכול לקבל את הערכים $\boxed{1,2,\ldots,n}$.

ב. $p_X(k) = p\,q^{k-1}$ $\qquad k = 1,\ldots,n-1$

כי ההסתברות להצלחה ראשונה בהטלה מספר k לא מושפעת מהעובדה שמאוחר יותר (n) היינו מפסיקים אם לא היתה שום הצלחה. כמו כן

$p_X(n) = P($אין הצלחה ב- $n-1$ ההטלות הראשונות$) = q^{n-1}$.

שאלה 3.13

א. מתקיים כי $2 \le X \le n+1$. בהוצאה הראשונה אין חזרה ולכן $2 \le X$. ואם אחרי n הוצאות לא הוצא אף כדור פעמיים מעקרון שובך היונים בהוצאה הבא יוצא כדור פעם שניה.

ב. נחשב את $p(X=k)$ כאשר $2 \le k \le n+1$. ישנם $k-1$ הוצאות בהם לא חזר כדור פעמיים ובהוצאה האחרונה כן חזר. בהוצאה ה - $2 \le \ell \le k-1$ שבה לא חזר כדור פעמיים כבר הוצאו $\ell-1$ כדורים שונים וההסתברות שלא יוצא אחד מהם היא $\frac{n-(\ell-1)}{n}$. בהוצאה ה - k מוצא כדור פעם שניה מתוך $k-1$ הכדורים שנראו עד כה ולכן ההסתברות לכך היא: $\frac{k-1}{n}$. בסה"כ:

$$p(X=k) = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-2)}{n}\frac{k-1}{n}, & k = 2,\ldots,n+1 \\ 0, & else \end{cases}$$

שאלה 3.15

א. המאורע A_r מתקיים אך ורק אם ב - $N+(N-r)-1$ ההוצאות הראשונות היו בדיוק $N-1$ אדומים והשאר כחולים ובהוצאה ה - $N+(N-r)$ יוצא אדום (כי הקופסא האדומה מתרוקנת) וההסתברות לכך מתקבלת ע"י:

$$p(A_r) = \left(\binom{2N-r-1}{N-1}p^{N-1}q^{N-r}\right)p = \binom{2N-r-1}{N-1}p^N q^{N-r}$$

ב. הקופסא האדומה מתרוקנת לפני הכחולה אם אחד המאורעות $A_1, A_2, \ldots, A_N$ קורה ולכן אנו מחפשים את $\sum_{i=0}^{N} A_i$. למקרה ש: $N=5,\ p=\frac{1}{3}$:

$$\sum_{i=1}^{5}\binom{9-i}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^{5-i} = 70\frac{2^4}{3^9}+35\frac{2^3}{3^8}+15\frac{2^2}{3^7}+5\frac{2^1}{3^6}+\frac{1}{3^5} \approx 0.145$$

והמקרה ש: $N=8,\ p=\frac{1}{2}$:

$$\sum_{i=1}^{8}\binom{15-i}{7}\frac{1}{2^{16-i}} = \frac{3432}{2^{15}}+\frac{1716}{2^{14}}+\frac{792}{2^{13}}+\frac{330}{2^{12}}+\frac{120}{2^{11}}+\frac{36}{2^{10}}+\frac{8}{2^9}+\frac{1}{2^8} = 0.5$$

פתרון לתרגיל 3.17

ברור ש-A ו- B "סימטריים" במובן שיש להם הסתברות שווה α להיות המנצח. היות וההסתברות היא 0 לכך שהמשחק יימשך לעד ללא מנצח (הוכיחו זאת! זה לא קשה אבל גם לא מובן מאליו) ההסתברות ש- C ינצח תהיה $1-2\alpha$.

ננתח את ההסתברות לנצחון C. במשחקים הנפתחים עם נצחון של A, שרשרת המנצחים חייבת להיות אחת השורות הבאות:

$$\begin{array}{l}
(ACC) \\
(ACB)(ACC) \\
(ACB)(ACB)(ACC) \\
\qquad\quad\vdots \\
\underbrace{(ACB)\cdots(ACB)}_{k \text{ פעמים}}(ACC) \\
\qquad\quad\vdots
\end{array}$$

דהיינו, סידרה מחזורית הנקטעת כאשר לראשונה C מנצח פעמיים ברציפות (הסוגריים הוכנסו רק לנוחיות). יש לשים לב ששלושת השחקנים חייבים להשתתף בסידרה כזאת: לדוגמה, קטע מהצורה ACA אינו אפשרי מכיוון שאם A מנצח במשחק הראשון, הוא זה שמפסיד ל- C בשני, ולכן כלל לא משתתף בשלישי.

ההסתברות של המאורע המופיע בשורה מס' k ($k=0,1,2,\ldots$) היא $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^k$ כי כל נצחון מסויים קורה בהסתברות $\frac{1}{2}$, וכולם בלתי תלויים, ולכן ההסתברות של כל האפשרויות האלו היא

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\ .$$

מטעמי סימטריה יש הסתברות זהה לניצחון (במשחק כולו) של C במשחק שנפתח עם נצחון של B. נסיק ש-C יהיה המנצח בהסתברות $\frac{2}{7}$, ולסיכום

$$\boxed{P(\text{ינצח } A)=\frac{5}{14} \qquad P(\text{ינצח } B)=\frac{5}{14} \qquad P(\text{ינצח } C)=\frac{2}{7}}\ .$$

נעיר שזו איננה הדרך היחידה לפתור את השאלה.

פתרון לתרגיל 3.19

א.

$$\begin{aligned}
P(\text{לפחות } 1) &= P(X\geq 1) = 1-p_X(0) = 1-e^{-3} &&\approx 0.95 \\
P(\text{בדיוק } 1) &= P(X=1) = p_X(1) = 3\,e^{-3} &&\approx 0.15 \\
P(\text{לכל היותר } 1) &= P(X\leq 1) = p_X(0)+p_X(1) = 4\,e^{-3} &&\approx 0.20
\end{aligned}$$

בדיקה: $1 = 0.15 - 0.20 + 0.95$ $\surd$

ב. נחשב את ההסתברות שאף אלקטרון לא פגע בלוח. לו ידענו ש- n אלקטרונים נפלטו, הסתברות זו היתה 0.3^n. היות ומספר זה של האלקטרונים (n) בעצמו אקראי, יש להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה (או כוללת):

$$\begin{aligned}
P(\text{אף פגיעה}) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{אף פגיעה} \mid n \text{ פליטות})\, P(n \text{ פליטות}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 0.3^n\, e^{-3}\frac{3^n}{n!} = e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0.9^n}{n!} = e^{-3}\,e^{0.9} = e^{-2.1}
\end{aligned}$$

ולכן $P(\text{לפחות פגיעה אחת}) = 1-e^{-2.1} \approx \boxed{0.877}$.

שאלה 3.20 :

א. $P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - 18.5e^{-5}$

ב. $P(X>3|X>0) = \frac{P(X>3 \cap X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(X>3)}{P(X>0)} = \frac{1-P(X\leq 3)}{1-P(X=0)} = \frac{1-\frac{118}{3}e^{-5}}{1-e^{-5}}$

$P(X>3|X>0) \neq P(X>3)$, ולכן ההתפלגות הפואסונית אינה חסרת זכרון.

פתרון לתרגיל 3.21

$$\begin{aligned} P(\text{משפיעה} \mid \text{פעמיים}) &= \frac{P(\text{פעמיים} \mid \text{משפיעה})P(\text{משפיעה})}{P(\text{פעמיים})} \\ &= \frac{\left(\frac{e^{-3}3^2}{2!}\right)0.75}{\left(\frac{e^{-3}3^2}{2!}\right)0.75 + \left(\frac{e^{-5}5^2}{2!}\right)0.25} = \frac{27e^2}{27e^2+25} = \boxed{0.89} \end{aligned}$$

3.22

נסמן ב- N את מספר הפינים. נתון ש- $N \sim \text{Pois}(3)$.

א. הגודל המבוקש הוא $P(N=k|N\geq 1)$ עבור $k=1,2,\ldots$.

$$\begin{aligned} P(N=k|N\geq 1) &= \frac{P(\{N=k\}\cap\{N\geq 1\})}{P(N\geq 1)} = \frac{P(\{N=k\})}{P(N\geq 1)} \\ &= \frac{\frac{e^{-3}3^k}{k!}}{1-\frac{e^{-3}3^0}{0!}} = \boxed{\frac{1}{(e^3-1)}\frac{3^k}{k!}} \ . \end{aligned}$$

ב. בתנאיי השאלה (דהיינו ידוע ש- $N \geq 1$), N מפולג כפי שחושב בסעיף א'.

$$\begin{aligned} P(\text{מרוצה}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\text{מרוצה} \mid N=k)P(N=k) \\ &= \frac{2}{3(e^3-1)}\left(\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{3^k}{k!}\underbrace{P(k \text{ ייבחר מתוך})}_{\frac{2}{k}}\right) \\ &= \frac{2}{3(e^3-1)}\left(7.5+2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{3^k}{kk!}\right) \ . \end{aligned}$$

הטור הזה בוודאי מתכנס אך ערכו לא נתון ע"י ביטוי פשוט, ולכן נשאיר כך את הפתרון.

ג.

$$\begin{aligned} P(\text{מרוצה } 1) &= P(\text{מרוצה } 1|N=1)P(N=1) + P(\text{מרוצה } 1|N\geq 2)P(N\geq 2) \\ &= \frac{2}{3}(e^{-3}3) + \binom{2}{1}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\left(1-e^{-3}(1+3)\right) = \boxed{\frac{2+4e^3}{9e^3}} \quad (\approx 0.46) \ . \end{aligned}$$

פתרון לתרגיל 3.23

בשני המקרים, נסמן ב- X את מספר הפצות השמועה.

א. אחרי שממציא השמועה מספר אותה בפעם הראשונה, ההפצות הופכות לסידרת נסויי ברנולי, כאשר הצלחה פרושה לבחור באותו הממציא כיעד של ההפצה הבאה, וההסתברות לכך היא $p = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} p_X(k) &= P(\text{הפצות } k) = P(\text{הצלחה ראשונה בנסוי מס' } k-1) \\ &= pq^{k-2} = \boxed{\frac{(n-1)^{k-2}}{n^{k-1}}} \qquad k = 2,3,4,\ldots \end{aligned}$$

זו פונקצית הסתברות גיאומטרית "מוזזת ימינה" ביחידה אחת.

ב. לאחר $k-1$ פעמים שהשמועה הופצה למאזין חדש, ישנם בקבוצה k אנשים שמכירים את תוכנה. ההסתברות לכך שבצעד הבא היא תחזור לאחד מאלה היא, אם כן, $\frac{k-1}{n}$ (שימו לב שאדם לא מספר את השמועה לעצמו, מכאן שלא נכון היה לכתוב $\frac{k}{n+1}$). נקבל

$$p_X(k) = \frac{n-1}{n} \cdots \underbrace{\left(\frac{n-i+1}{n}\right)}_{\text{מאזין חדש בצעד } i} \cdots \frac{n-k+2}{n} \underbrace{\left(\frac{k-1}{n}\right)}_{\text{מאזין חוזר בצעד } k} = \boxed{\frac{(n-1)!}{(n-k+1)!} \frac{k-1}{n^{k-1}}}$$

וזאת עבור $k = 2,3,\ldots,n+1$.