2.6
2.7
2.8
2.10
2.11
2.13
2.14
2.15
2.16
2.17
2.19
2.20

שאלה 2.6

א. $\frac{1}{4}$

ב. נגדיר את המאורעות הבאים :

B - שני שנבחר הוא בת

A - ראשון שנבחר הוא בת

$$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A^c)P(A^c)=\frac{9}{39}\cdot\frac{1}{4}+\frac{10}{39}\cdot\frac{3}{4}=\frac{39}{39\cdot4}=\frac{1}{4}$$

ג.

$$\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{30}{2}}{\binom{40}{4}}$$

שאלה 2.7

נגדיר את המאורעות הבאים:

A - ככר נאפתה בתנור A
B - ככר נאפתה בתנור B
C - ככר נאפתה בתנור C
X - הככר שרופה

$P(A\mid X)=?$

$$P(A\mid X)=\frac{P(X\mid A)\cdot P(A)}{P(X)}=\frac{P(X\mid A)\cdot P(A)}{P(X\mid A)\cdot P(A)+P(X\mid B)\cdot P(B)+P(X\mid C)\cdot P(C)}$$
$$=\quad\frac{0.05\cdot0.25}{0.05\cdot0.25+0.04\cdot0.35+0.02\cdot0.4}=\frac{25}{69}$$

פתרון לתרגיל 2.8

נרשום את הנתונים שבציור כך:

$$\begin{array}{ll} P(0\to 0)_L=0.6 & P(0\to 0)_R=0.5 \\ P(0\to 1)_L=0.4 & P(0\to 1)_R=0.5 \\ P(1\to 0)_L=0.1 & P(1\to 0)_R=0.3 \\ P(1\to 1)_L=0.9 & P(1\to 1)_R=0.7 \end{array}$$

(הסימונים "L" ו- "R" מתייחסים ל-"שמאל" ו- "ימין" בהתאמה).
כמו כן, לא צויין במפורש שהמשדר, תחנת הממסר והמטלט פועלים באופן בלתי תלוי, אבל זו היתה הכוונה. בלי הנחה מסוג זה אין מספיק נתונים.

א.
$$\begin{aligned} P(0\ \text{קלט}\,|\,0\ \text{שודר}) &= P(0\to 0\to 0)+P(0\to 1\to 0) \\ &= P(0\to 0)_L P(0\to 0)_R + P(0\to 1)_L P(1\to 0)_R \\ &= (0.6)(0.5)+(0.4)(0.3)=\boxed{0.42}\,. \end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned} P(\text{לשדר}\ 1\ \text{ולקלוט}\ 1) &= P(1\ \text{לקלוט}\ |\ 1\ \text{שודר})\quad P(1\ \text{שודר}) \\ &= (\ (0.1)(0.5)+(0.9)(0.7)\ )\quad 0.2 \quad =\boxed{0.136} \end{aligned}$$

<u>שאלה 2.10:</u>

א. הטענה נכונה.
הוכחה:

$$P(F\,|\,E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E\,|\,F)P(F)}{P(E)}\le\frac{P(E)P(F)}{P(F)}=P(F)$$

מהנתון

ב. הטענה איננה נכונה.
דוגמה נגדית:
נתבונן בניסוי הטלת קובייה הוגנת.

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},$$

יהיו E,F,G מאורעות הבאים:

$$\begin{aligned} E&=\{\text{בקובייה יצא מספר 1}\} \\ F&=\{\text{בקובייה יצא מספר זוגי}\} \\ G&=\{\text{בקובייה יצא מספר 2}\} \end{aligned}$$

אזי:

$$P(E\,|\,F)=0\le\frac{1}{6}=P(E)$$

$$P(G\,|\,E)=0\le\frac{1}{6}=P(G)$$

אבל

$$P(G\,|\,F)=\frac{1}{3}>\frac{1}{6}=P(G).$$

פתרון לתרגיל 2.11

א.

$$\begin{aligned} P(\text{כדור שני אדום}) &= P(\text{ראשון אדום})P(\text{שני אדום} \mid \text{ראשון אדום}) \\ &\quad + P(\text{ראשון לבן})P(\text{שני אדום} \mid \text{ראשון לבן}) \\ &= \frac{3}{10}\frac{2}{10} + \frac{7}{10}\frac{4}{10} = \boxed{0.34} \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} P(\text{שני כדורים אדומים}) &= P(\text{ראשון אדום})P(\text{שני אדום} \mid \text{ראשון אדום}) \\ &= \frac{3}{10}\frac{2}{10} = \boxed{0.06} \end{aligned}$$

ג.

$$\begin{aligned} P(\text{שני לבנים} \mid \text{אותו צבע}) &= \frac{P(\text{אותו צבע} \mid \text{שני לבנים})P(\text{שני לבנים})}{P(\text{אותו צבע})} \\ &= \frac{1 \times \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)}{\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)} = \frac{42}{48} = \boxed{0.875} \end{aligned}$$

שאלה 2.13

א. נגדיר H = {הפאה, עליה נופלת הפירמידה מכילה כחול,אדום וירוק }

$$P(E \cap F \cap G) = P(H) = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = P(F) = P(G) = \frac{1}{2}$$

לכן -

$$P(E \cap F \cap G) \neq P(E) \cdot P(F) \cdot P(G)$$

ולכן –

E, F, G - תלויים

ב.

$$P(E \cap F) = P(H) = \frac{1}{4}$$

וגם –

$$P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{4}$$

ולכן –

E, F - לא תלויים

כנ"ל לגבי זוגות G, F ו – E, G

לכן-

E, F, G – לא תלויים בזוגות

שאלה 2.14:

נסמן את המאורעות באופן הבא:

R_2 – המשתתף בחר באקדח עם שני תאים ריקים.

R_3 – המשתתף בחר באקדח עם שלושה תאים ריקים.

R_4 – המשתתף בחר באקדח עם ארבעה תאים ריקים.

L – המשתתף נשאר בחיים

D – המשתתף נהרג.

א. בסעיף זה יש למצוא את ההסתברויות הבאות: $P(R_2 \mid D)$, $P(R_3 \mid D)$, $P(R_4 \mid D)$.
נחשב תחילה את הסיכוי להיהרג. לפי נוסחת ההסתברות הכוללת,

$$P(D) = P(D \mid R_2) \cdot P(R_2) + P(D \mid R_3) \cdot P(R_3) + P(D \mid R_4) \cdot P(R_4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

כעת, לפי נוסחת Bayes

$$P(R_4 \mid D) = P(D \mid R_4) \cdot \frac{P(R_4)}{P(D)} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{9}$$

$$P(R_3 \mid D) = P(D \mid R_3) \cdot \frac{P(R_3)}{P(D)} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1/3}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$$P(R_2 \mid D) = P(D \mid R_2) \cdot \frac{P(R_2)}{P(D)} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1/3}{1/2} = \frac{4}{9}$$

נשים לב כי סכום ההסתברויות הוא 1, כפי שהיינו מצפים שיהיה.

ב. ניזכר כי ההסתברות המותנית במאורע מסוים קבוע מראש היא פונקצית הסתברות בפני עצמה. R_3 ו-R_4 הינם מאורעות זרים, ולכן מתקיים לגביהם חוק חיבור ההסתברויות:

$$P(R_3 \cup R_4 \mid D) = P(R_3 \mid D) + P(R_4 \mid D) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

ג. D ו-L הינם מאורעות משלימים, ולכן

$$P(L) = 1 - P(D) = \frac{1}{2}$$

לפיכך, לפי נוסחת Bayes

$$P(R_4 \mid L) = P(L \mid R_4) \cdot \frac{P(R_4)}{P(L)} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1/3}{1/2} = \frac{4}{9}$$

$$P(R_3 \mid L) = P(L \mid R_3) \cdot \frac{P(R_3)}{P(L)} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1/3}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$$P(R_2 \mid L) = P(L \mid R_2) \cdot \frac{P(R_2)}{P(L)} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{9}$$

פתרון לתרגיל 2.15

אם נסמן:

$$A = \{a \text{ שודר}\} \qquad B = \{b \text{ שודר}\} \qquad C = \{c \text{ שודר}\} \qquad D = \{d \text{ שודר}\}$$
$$E = \{\text{היתה שגיאה}\}$$

אז

$$P(B|E\cap D^C) = \frac{\overbrace{P(E\cap D^C|B)}^{P(E|B)}P(B)}{P(E\cap D^C)} = \frac{(0.4)(0.15)}{P(E\cap A)+P(E\cap B)+P(E\cap C)}$$
$$= \frac{0.06}{0.1\times 0.4+0.15\times 0.4+0.25\times 0.2} = \boxed{0.4}$$

פתרון לתרגיל 2.16

א. $1 = C(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = 91C \quad \Longleftarrow \quad \boxed{C=\frac{1}{91}}$

ב.

$$P(\text{ליאת תזכה})$$
$$= \sum_{k=0}^{5} P(\text{ליאת תזכה} \mid k \text{ משתתפים נוספים})\ P(k \text{ משתתפים נוספים})$$
$$= \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{(k+1)}\ \frac{1}{91}(k+1)^2 = \frac{1+2+3+4+5+6}{91} = \boxed{\frac{3}{13}}.$$

ג. $1 = C\sum_{j=1}^{n+1} j^2 \quad \Longleftarrow \quad \boxed{C=\frac{6}{(n+1)(n+2)(2n+3)}}$.

$$P(\text{ליאת תזכה}) = \frac{6}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} j}_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \boxed{\frac{3}{2n+3}}.$$

שאלה 2.17:

עפ"י נוסחת בייס

$$P(R_i \mid C) = \frac{P(C\mid R_i)\cdot P(R_i)}{P(C)}, i=1,2,3$$

נחשב $P(C\mid R_i)$:

$$P(C\mid R_1) = \frac{P(R_1\cap(R_2\cup R_3)\cap R_1)}{P(R_1)} = P(R_2\cup R_3) = P(R_2)+P(R_3)-P(R_2)\cdot P(R_3) = 0.8$$
$$(P(R_2)+P(R_3)-P(R_2)\cdot P(R_3))$$
$$P(C\mid R_2) = \frac{P(R_1\cap(R_2\cup R_3)\cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)} = P(R_1) = 0.9$$

באופן דומה

$$P(C\mid R_3) = 0.9.$$

ואז

$$P(R_1\mid C) = \frac{0.8\cdot 0.9}{0.72} = 1,$$
$$P(R_2\mid C) = \frac{0.9\cdot 0.5}{0.72} = \frac{5}{8},$$
$$P(R_3\mid C) = \frac{0.9\cdot 0.6}{0.72} = \frac{6}{8}.$$

__פתרון לתרגיל 2.19__

עבור $n = 1$ ברור ש- $P(\text{כדור "אחרון" לבן}) = \frac{w}{w+b}$
(ולכן יש הסתברות $\frac{b}{w+b}$ לכדור שחור).

עבור $n = 2$, אם נתנה בכדור הראשון נקבל
$P(\text{כדור שני לבן}) = \frac{w}{(w+b)}\frac{w+1}{(w+b+1)} + \frac{b}{(w+b)}\frac{w}{(w+b+1)} = \frac{w}{w+b}$.

עבור $n = 3$ צריך להתנות בכדור השני, אבל מכיוון שההסתברויות לכדור השני שוות לאלו של הכדור הראשון, החשבון יהיה זהה לזה של השלב הקודם, ושוב נקבל $\frac{w}{w+b}$, וכך גם (באינדוקציה) עבור n כללי.

__פתרון לתרגיל 2.20__

א. לפי נוסחת ההסתברות הכוללת

$$\begin{aligned} P(\text{גלוי}) &= P(\text{גלוי} \mid A)P(A) + P(\text{גלוי} \mid B)P(B) + \ldots + P(\text{גלוי} \mid E)P(E) \\ &= 0.8 \times 0.1 + 0.4 \times 0.1 + 0.6 \times 0.2 + 0.8 \times 0.3 + 0.9 \times 0.3 = \boxed{0.75}\ . \end{aligned}$$

ב. $P(\text{לא תתגלה ב- } D) = 1 - P(D)P(\text{תתגלה } \mid D) = 1 - (0.3)(0.8) = 0.76$

$$\begin{aligned} P(E \mid \text{לא התגלתה ב- } D) &= \frac{P(\text{לא התגלתה ב- } D \mid E)P(E)}{P(\text{לא התגלתה ב- } D)} = \frac{1 \times 0.3}{0.76} \\ &= \boxed{0.39}\ . \end{aligned}$$

ג. $$P(A \mid \text{לא התגלתה}) = \frac{P(\text{לא התגלתה} \mid A)P(A)}{P(\text{לא התגלתה})} = \frac{(0.2)(0.1)}{1 - 0.75} = 0.08$$

ובאותו אופן, עבור $\bullet = A, B, C, D, E$

$$P(\bullet \mid \text{לא התגלתה}) = 0.08,\ 0.24,\ 0.32,\ 0.24,\ 0.12$$

ולכן אחרי סיבוב אחד בו האוניה לא התגלתה, האזור בעל הסיכוי הגבוהה ביותר הוא עתה C.