פתרון לתרגיל מספר 1.1

א.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\
&\qquad (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}\\
A &= \{(3,3)\}\\
B &= \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}\\
C &= \{(1,1),(1,2),\ldots,\ \text{חוץ מ-}(3,3),\ldots\}\\
D &= \{(1,2),(1,4,(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}
\end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned}
A\cap B &= \{\text{שני הסביבונים מראים 3}\} = A\\
A\cup B &= \{\text{סכום הנקודות על שני הסביבונים זוגי}\} = B\\
A\cap D &= \emptyset\\
B\cap C^C &= \{\text{שני הסביבונים מראים 3}\} = A \quad (C^C = A)\\
D^C\cap B &= \{\text{שני הסביבונים מראים מספר אי זוגי}\} = D^C
\end{aligned}$$

ג.

$$\begin{aligned}
A^C &= \{\text{לכל היותר אחד הסביבונים מראה 3}\}\\
B^C &= \{\text{סכום הנקודות על שני הסביבונים אי זוגי}\}\\
C^C &= \{\text{שני הסביבונים מאים 3}\}\\
D^C &= \{\text{שני הסביבונים מראים מספר אי זוגי}\}
\end{aligned}$$

פתרון לתרגיל מספר 1.3

א. תוצאה של הנסוי: פאה של הקוביה $\Longleftarrow$ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
כמו כן $\mathcal{F}=\{\emptyset,\ldots,\{2,3,6\},\ldots,\Omega\}$ (כל תתקבוצות Ω - יש 64 כאלו).
מספיק להגדיר את $P(\{1\}),P(\{2\}),\ldots,P(\{6\})$ על מנת לקבוע את $P(A)$
לכל מאורע $A\in\mathcal{F}$. נתון $P(\{1\})=a, P(\{2\})=2a,\ldots,P(\{6\})=6a$
עבור $a>0$ מסויים. את ערכו של a נקבל מתוך

$$1 = P(\{1,2,3,4,5,6\}) = a+2a+\cdots+6a = 21a \quad\Longrightarrow\quad a=\frac{1}{21}$$

ב. $P(\{\text{מספר ראשוני}\}) = P(\{2,3,5\}) = \frac{2+3+5}{21} \approx \boxed{0.48}$.

פתרון לתרגיל מספר 1.4

לפי הנתונים, ותוך שימוש בתכונה: $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$,

$$1 = P(\Omega) = P\big(\{D_1,D_2,D_3,D_4\}\cup\{D_3,D_5,D_6\}\big) \le 0.8+0.1 = 0.9$$

וזה, כמובן, לא ייתכן.

פתרון לתרגיל מספר 1.5

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{לפחות פעם אחת 6 בזריקת 4 קוביות}\}\\
B &= \{\text{לפחות פעם אחת }(6,6)\text{ ב- 24 זריקות של שתי קוביות}\}.
\end{aligned}$$

$$P(A^C) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \qquad\qquad P(B^C) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

ויש רק לוודא ש- $\left(\frac{35}{36}\right)^6 \le \frac{5}{6}$.

שאלה 1.6 :

א. הפונקציה הנ"ל אכן פו' ההסתברות:

(1) לכל $A \subseteq \Omega$ מתקיים $0 \le P(A) = \frac{|A|}{n} \le 1$.

(2) $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1, \quad P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$.

(3) עבור שני מאורעות זרים A ו-B מתקיים

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{n} = \frac{|A| + |B|}{n} = \frac{|A|}{n} + \frac{|B|}{n} = P(A) + P(B).$$

ב. הפונקציה הנ"ל אינה פו' ההסתברות: ניקח שני מאורעות זרים הבאים

$$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{4,5\}.$$

אזי $P(A) = \frac{3^2}{6^2} == \frac{9}{36}, P(B) = \frac{2^2}{6^2} == \frac{4}{36}, P(A \cup B) = \frac{5^2}{6^2} == \frac{25}{36}$, ו-

$$P(A \cup B) \ne P(A) + P(B).$$

שאלה 1.7 : לו A ו- B היו זרים $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$ ודבר זה כמובן לא יכול להיות. לכן, A ו- B אינם זרים.

שאלה 1.9 :

א. $\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,T,H),(T,H,T),(T,T,T)\}$.

ב. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - H מופיע לפחות פעם אחת

B - מתקבלים רק H-ים או רק T-ים.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P\{(T,T,T)\} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

$$P(B) = P\{(H,H,H),(T,T,T)\} = \frac{2}{8}.$$

פתרון לתרגיל מספר 1.10

נסמן ב-l את אורך צלע המשולש.

א. תוצאה של הנסוי היא נקודה מתוך המשולש הנתון $\Longleftarrow$ $\{$כל נקודות המשולש$\} = \Omega$. במילים אחרות, המשולש$= \Omega$.
$\mathcal{F}$ הוא אוסף של תת קבוצות של המשולש. במקרה זה הוא לא מכיל את כל התתקבוצות של Ω אבל לא נפרט. בכל אופן, כל תתקבוצה של המשולש בה אי פעם ניתקל שייכת ל- $\mathcal{F}$.
לבסוף $\forall A \in \mathcal{F}$ $\quad P(A) = \frac{\text{שטח } A}{\text{שטח המשולש}} = \frac{4 \ \text{שטח } A}{\sqrt{3}l^2}$.

ב. נצייר 3 מעגלים ברדיוס $\frac{l}{2}$ שמרכזם בקודקודים. המאורע המבוקש הוא האזור A שבמרכז המשולש אך מחוץ לכל שלושת העיגולים. שטח כל אחת משלושת הגזרות (כל גזרה כזו היא שישית עיגול) הוא $\frac{1}{6}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2$ ולכן

$$P(A) = 1 - 3\,\frac{4\left(\frac{1}{6}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)}{\sqrt{3}l^2} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx \boxed{0.093}$$

פתרון לתרגיל מספר 1.11

נשתמש בסימון "$+$" לרכיב תקין וב- "$-$" לרכיב מקולקל.

א.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{+++\,,\,++-\,,\,+-+\,,\,+--\,,\,-++\,,\,-+-\,,\,--+\,,\,---\} \\
A &= \{+-+\} \\
B &= \{++-\} \\
C &= \{+++\,,\,+-+\,,\,++-\}
\end{aligned}$$

ב. A ו- B זרים (הם שני "יחידונים" זרים); הזוגות A,C ו- B,C אינם זרים כי $A \cap C = A \neq \emptyset$ ו- $B \cap C = B \neq \emptyset$.

פתרון לתרגיל מספר 1.14

מרחב המדגם של נסוי זה הוא $\{$כל החלוקות של $2n$ מספרים ל- n זוגות$\} = \Omega$.
ברור מהנסוח שזהו מרחב מדגם סימטרי, דהיינו כל החלוקות שוות סיכוי.
המספר a_n של החלוקות שב- Ω הוא $(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$.

אכן, יש a_{n-1} חלוקות בהן 1 מזווג עם 2 (כל חלוקות שאר $2(n-1)$ המספרים), a_{n-1} חלוקות בהן 1 מזווג עם 3, ..., a_{n-1} חלוקות בהן 1 מזווג עם $2n$, ולסיכום, $a_n = (2n-1)a_{n-1}$. מכאן מתקבל הערך שצויין למעלה של a_n.

למעשה, בטוי יותר קומפקטי הוא $a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

א. ההסתברות לקבל את החלוקה המקורית - שזו חלוקה אחת מתוך Ω - היא אם כן $\boxed{\frac{2^n n!}{(2n)!}} = \frac{1}{a_n}$ (בערך 0.001 עבור 5 זוגות).

ב. מספר חלוקות בהן כל הזוגות הם של בן ובת הוא $n!$ כי ניתן לקבל אותם ע"י כך שהבנות עומדות בשורה קבועה, וכל פרמוטציה (תמורה) של הבנים מולן מהווה חלוקה כזאת. קבלנו ש-

$$P(\{\text{חלוקה לזוגות בת-בן}\}) = \frac{n!}{a_n} = \boxed{\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}}.$$

(עבור 5 זוגות, ההסתברות היא עתה ≈ 0.127).

שאלה 1.17:

נגדיר את המאורעות הבאים:

$R_i, i = 1,2,3$ - הרכיב ה-i-י תקין

C - המערכת תקינה

אזי

$C = R_1 \bigcap (R_2 \bigcup R_3)$.

$$P(C) = P(R_1 \bigcap (R_2 \bigcup R_3)) = P(R_1) \cdot P(R_2 \bigcup R_3) = P(R_1) \cdot (P(R_2) + P(R_3) - P(R_2) \cdot P(R_3)) = 0.72$$

פתרון לתרגיל 1.18

נסמן ב- A, B, C, D את הרכיבים אשר הסתברויות תקינותם נתונות ע"י $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ בהתאמה.

$$\begin{aligned} & P(G \to H) \\ &= P(G \to H \mid \text{תקין } A) P(\text{תקין } A) + P(G \to H \mid \text{לא תקין } A) P(\text{לא תקין } A) \\ &= P(\text{תקינים } D \text{ או } C) P(\text{תקין } A) + P(\text{תקינים } D \text{ ו- } B) P(\text{לא תקין } A) \\ &= (\gamma + \delta - \gamma\delta)\alpha + \beta\delta(1-\alpha) \ . \end{aligned}$$

(אכן יש הרבה דרכים לספור את הצירופים השונים, אבל השימוש בהתניה לעיתים קרובות מפשטת את החישוב).