טורי פורייה והתמרות אינטגרליות - תרגיל בית 4

סימון: לנוחיותינו, בעמוד זה K ו- a יהיו תמיד קבועים ממשיים וניקח $K \geq 0$. כמו-כן $\mathcal{B}(K,a)$ יסמן אוסף כל הפונקציות הרציפות למקוטעין $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ אשר מקיימות $|f(t)| \leq Ke^{at}$ לכל $t \geq 0$. נסמן גם $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{K\geq 0, a\in\mathbb{R}} \mathcal{B}(K,a)$.

1. (א) **הוכיחו כי כל f ב- $\mathcal{B}(K,a)$ מקיימת את הנוסחא** $\mathcal{L}\left[\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$ **עבור כל $s \neq 0$ כך ש $s > a$.**

(**הערה:** למעשה אפשר להוכיח שאותה נוסחא מתקיימת גם לכל $s \neq 0$ מרוכב כך ש- $\mathrm{Re}\, s > a$).

(ב) **נגדיר את הפונקציה** $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ **ע"י** $g(t) = \int\limits_0^t \tau e^{-2\tau}\sin 5\tau \, d\tau$.

האם g פונקציה ב- $\mathcal{B}$?

חשבו התמרת לפלס של g, ומכך מצאו נוסחא מפורשת עבור $g(t)$ לכל $t \geq 0$.

(ג) **שלוש הפונקציות** $f_j:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $j=1,2,3$, **הן** $f_1(t)=e^t$, $f_2(t)=\cos t$, **ו-** $f_3(t)$ **היא פונקצית** Heaviside, $f_3(t) = u_1(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \geq 1 \\ 0 & ; \quad x < 1 \end{cases}$

נגדיר $f = f_1 * f_2 * f_3$. (זו קונבולוציה נשנה של שלוש פונקציות ב-$\mathcal{B}$, והיא מוגדרת היטב בלי שימוש בסוגריים, כי אפשר להוכיח ש- $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$.)

חשבו את $\mathcal{L}[f]$, ומכך חשבו גם את f עצמה.

2. פתרו את הבעיה הבאה תוך שימוש בהתמרת לפלס:

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = \sin t + \int\limits_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau, \ \ t \geq 0 \\ x'(0) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

הערה: בפתרון של בעיה כזו בעזרת התמרת לפלס אנו מניחים מראש שיש פתרון x שהוא פונקציה ב-$\mathcal{B}$. אנו גם נעזרים במשפט הבא, משפט יחידות עבור התמרת לפלס:

אם x ו- y הן שתי פונקציות ב- $\mathcal{B}$ כך שהתמרות לפלס שלהן מקיימות $\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}[y](s)$ עבור כל s ממשי גדול ממספר מסוים, אזי $x(t) = y(t)$ בבכל נקודה $t > 0$ שבה x ו- y גזירות.