# טורי פורייה והתמרות אינטגרליות - תרגיל בית 3. 11/01/2005

**סימון:** התמרת פורייה $\widehat{f}$ של פונקציה כלשהי $f$ ב- $G(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $\widehat{f}(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$

**1.** נתונה פונקציה גזירה $f$ ב- $G(\mathbb{R})$ כך ש- $f' \in G(\mathbb{R})$ ו- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(א) אם $\widehat{f}(w) = \dfrac{w}{1+w^4}$, ואם הפונקציה $xf(x)$ אינטגבילית בהחלט ב-$\mathbb{R}$, חשבו את $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

(ב) אם $\widehat{f}(w) = \dfrac{w}{1+w^6}$, ואם הנגזרת השניה $f''$ קיימת ב-$x=0$, חשבו את $f'(0)$. (בטאו את התשובה בצורה אינטגרלית).

(ג) אם $\widehat{f}(w) = \dfrac{1}{1+|w|^3}$, חשבו את $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(f*f')(x)|^2 dx$. ($*$ מציין קונבולוציה).

**הערות:**
- מותר לכם להניח מראש שהאינטגרל בסעיף ג' קיים וסופי, ושהקונבולוציה $f*f'$ היא פונקציה רציפה למקוטעין.
- הוספנו את התנאי $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ לנוחיותכם, אבל למעשה אפשר להוכיח שתנאי זה נובע מזה ש- $f$ ו $f'$ שתיהן ב- $G(\mathbb{R})$.
- ניתן גם לקבל תשובה מספרית לסעיף ב'.

**2.** **תזכורת:** בתרגולים, בתרגילי כיתה ראיתם שהתמרת פורייה של $\chi_{[-a,a]}$ היא $\dfrac{\sin a\omega}{\pi\omega}$. מזה, בעזרת משפט ההתמרה ההפוכה (או בעזרת חישוב אחר שהיא חלק של הוכחת משפט ההתמרה הפוכה) חישבתם ש- $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin\omega}{\omega} d\omega = \pi$.

(א) בעזרת דברים בתזכורת הנ"ל ו/או נוסחת פלנשרל ו/או קונבולוציות, חשבו את שלושת האינטגרלים $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin^n \omega}{\omega^n} d\omega$ כאשר $n = 2,3,4$.

**הערה:** אפשר לטפל במקרה $n=4$ גם בשיטות דומות למדי להן שהיו בתרגיל כיתה אחרת.

(ב) עבור קבועיים חיוביים $a$ ו-$b$ חשבו התמרת פורייה $\widehat{g}$ של $g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2} \dfrac{\sin^2 a(x-y)}{\pi(x-y)^2} dy$.

**3.** יהי $a$ קבוע חיובי. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י
$$f(x) = \begin{cases} 2005 & , \quad x=0 \\ \frac{x}{|x|} & , \quad 0<|x|\le a \\ 0 & , \quad |x|>a \end{cases}.$$

(א) חשבו התמרת פורייה של $f$.

(ב) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\cos ax - 1}{x} \sin bx \, dx$ עבור כל ערך של הקבוע הממשי $b$.

(המשך מעבר לדף)

ג) נתונה פונקציה גזירה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $g(0)\neq 0$. נגדיר $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $u(x)=f(x)g(x)$ כאשר $f$ היא הפונקציה המוגדרת לעיל. הוכיחו כי $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}|\widehat{u}(\omega)|d\omega=+\infty$ (כאשר $\widehat{u}$ היא התמרת פוריה של $u$).

**רמז:** תניחו שהגבול הנ"ל סופי. הראו שהנחה זו גוררת סתירה.