טורי פורייה והתמרות אינטגרליות - תרגיל בית 2

6.1.2005 (גירסה 2.)

1. נגדיר
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} & , \quad 0<x<\pi\\ 0 & , \quad x=0,-\pi,\pi\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & , \quad -\pi<x<0\end{cases}$$
ונניח ש- $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$.

(א) חשבו את הערך של כל אחד משני הגבולות $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|c_n|$ ו- $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2$.
(לא שללנו את האפשרות שאחד או אפילו שניים מהגבולות שווים ל- $+\infty$. כמו-כן שימו לב ש- f לא רציפה ב- 0.)

נגדיר $S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}$.

(ב) מצאו כל x ב- $[-\pi,\pi]$ שעבורו הגבול $\lim_{N\to\infty}S_N(x)$ קיים וסופי.

(ג) מצאו כל x ב- $[-\pi,\pi]$ שעבורו הגבול $\lim_{N\to\infty}S_N(x)$ קיים ושווה ל- $f(x)$.

(ד) האם הסדרה $S_N(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[-\pi/2,\pi/2]$ כאשר N שואף ל- ∞ ? נמקו.

2. נניח ש- $-\pi\le\alpha<\beta\le\pi$ וש- $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ עבור פונקציה מסויימת f ב- $E[-\pi,\pi]$.
אם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס ל- f במ"ש ב- $[\alpha,\beta]$ אז, לפי משפט 2 (ראו בנספח) נובע ש-

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)dx &= \int_\alpha^\beta\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_\alpha^\beta c_ne^{inx}dx\\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}c_n\frac{e^{in\beta}-e^{in\alpha}}{in}+c_0(\beta-\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{e^{in\beta}-e^{in\alpha}}{in}.\end{aligned}$$

אבל ידוע לנו כי עבור בחירות מסויימות של f ב- $E[-\pi,\pi]$, הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ לא מתכנס במ"ש בקטעים מסויימים $[\alpha,\beta]$. יתר על כן, יש אפילו דוגמאות של פונקציות רציפות f שעבורן הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתבדר עבור מספר אין סופי של ערכים של x בכל קטע $[\alpha,\beta]$ בעל עורך חיובי. עבור פונקציות כאלו אי אפשר אפילו להגדיר את האינטרל רימן $\int_\alpha^\beta\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}dx$.
אף על פי כן, אפילו עבור פונקציות מאד בעייתיות כאלו, קורה "נס פורייה" והנוסחה

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n\frac{e^{in\beta}-e^{in\alpha}}{in}+c_0(\beta-\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{e^{in\beta}-e^{in\alpha}}{in} \tag{1}$$

מתקיים בכל זאת. בפרט, הטורים באגף הימין של (1) מתכנסים.

(א) מצאו הוכחה קצרה שאכן, כל f ב- $E[-\pi,\pi]$ מקיים את (1) עבור כל α ו β ב $[-\pi,\pi]$.
אפשר להעזר בנוסחת פרסבל המוכלל.

(ב) בעזרת סעיף (א) הוכיחו נוסחא אנלוגית ל-(1) עבור $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ שבה מופיעים מקדמי פורייה של קוסינוס וסינוס, a_n ו-b_n במקום c_n, ופונקציות קוסינוס וסינוס במקום הפונקציות e^{inx}.

3. תהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\pi-|2x| & ; \quad |x|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2}<|x|\le\pi\end{cases}$.

(א) חשבו את מקדמי פורייה, a_0, a_k,b_k, $k\ge 1$ של f.

(ב) מצאו את סכום הטור פורייה של $f(x)$.

(ג) האם הטור הנ"ל מתכנס במידה שווה ל-$f(x)$ ב- $[-\pi,\pi]$? נמקו !

(ד) נגדיר את הטור $G(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kb_k\cos kx-ka_k\sin kx$ כאשר a_k,b_k הם מסעיף א'.
האם הטור הזה מתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$? נמקו !

(ה) חשבו את G ושרטטו במדויק את הגרף של G.

(ו) מצאו את $G(0)$, $G(\frac{\pi}{2})$ ו- $G(\pi)$.

(ז) חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

4. נתונה פונקציה אי זוגית f בקטע $[-\pi,\pi]$ וכך ש- $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0,\pi)$.

(א) חשבו את המקדמי פורייה a_0,a_n,b_n של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

(ב) מגדירים את הפונקציה $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $-\pi\le x\le\pi$. חשבו את $g(x)$.

(ג) מגדירים את הפונקציה $h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$, $-\pi\le x\le\pi$. חשבו את $h(x)$.

(ד) חשבו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

נספח

לנוחיותכם נזכיר כאן משפט סטנדרטי על אינטגרציה איבר-איבר של טורים. בדרך כלל לומדים משפט זה בחדו"א 1מ (או בחדו"א 2מ) עבור פונקציות ממשיות. ההכללה לפונקציות מרוכבות מתקבלת בקלות, למשל על ידי טיפול בנפרד בחלקים הממשיים והמדומים של כל הפונקציות.

משפט 2

**נניח שעבור כל n ב- $\mathbb{N}$ הפונקציה $u_n:[a,b]\to\mathbb{C}$ היא אינטגרבילית לפי רימן בקטע החסום $[a,b]$.
כמו-כן נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$.
אזי הפונקציה $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ גם היא אינטגרבילית לפי רימן ב- $[a,b]$ ו-**

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

משפט 2 לא נכון במקרה שמחליפים את הקטע $[a,b]$ בקטע לא חסום ומחליפים את האינטגרלים ע"י אינטגרלים מוכללים בקטע זה. (מקרה זה רלוונטי למשל כאשר אנו עובדים עם התמרות פורייה של פונקציות ב- $G(\mathbb{R})$).
במקרה כזה מנסים, במקום משפט 2, להעזר בגירסה מתאימה של משפט ההתכנסות הנשלטת של Lebesgue.