טורי פורייה והתמרות אינטגרליות - תרגיל בית 1

גירסה 2, עם שני תיקונים. 5.12.2004

1. בשאלה זו נתעסק עם אי-שיויון קושי-שוורץ-בוניאקובסקי, ז"א האי-שיויון

$$|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} \tag{1}$$

אשר מתקיים כאשר V מרחב ליניארי כלשהוא, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ היא מכפלה פנימית כלשהיא ב-V ו-x ו-y הם איברים כלשהם ב-V.
ההוכחה של (1) מופיעה בעמוד 12 של ספר הלימוד (של זעפרני ופינקוס). אבל עליכם לפתור את השאלה הזו מבלי להשתמש בהוכחה זו. מותר להשתמש רק בתכונות של מכפלות פנימיות אשר רשומות בהגדרה שלהן (למשל בהגדרה 1.4 בעמוד 7 של ספר הלימוד).

(א) הוכיחו כי (1) מתקיים כאשר $x=0$ או $y=0$ או $\langle x,y\rangle = 0$.

(ב) הראו כי $\langle x-y,x-y\rangle$ הוא סכום של ארבעה איברים, כל אחד מהצורה $\pm\langle a,b\rangle$ כאשר כל אחד מ-a ו-b הוא x או y. בעזרת תכונה זו הוכיחו ש-(1) מתקיים לכל x ו-y בעלי שתי התכונות הבאות:

- $\langle x,y\rangle$ הוא מספר ממשי <u>וחיובי</u>.
- $\langle x,x\rangle = \langle y,y\rangle$

(ג) יהיו x ו-y שני וקטורים כלשהם בעלי התכונות $x\neq 0$, $y\neq 0$ ו- $\langle x,y\rangle > 0$. נגדיר שני וקטורים חדשים x_1 ו- y_1 ע"י $x_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}x$ ו- $y_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle y,y\rangle}}y$. בעזרת x_1 ו- y_1 וסעיף (ב) הוכיחו כי (1) מתקיים עבור x ו- y האלו.

(ד) כעת נניח ש- x ו- y מקיימים $x\neq 0$, $y\neq 0$ ו- $\langle x,y\rangle \neq 0$. נגדיר שני וקטורים חדשים x_1 ו- y_1 ע"י $x_1 = \overline{\langle x,y\rangle}x$ ו- $y_1 = y$. בעזרת הוקטורים האלה וסעיף (ג) הוכיחו כי (1) מתקיים עבור x ו- y האלו.

(ה) הסבירו מדוע הפתרונות לסעיפים (א) ו- (ד) מהווים הוכחה מלאה ש- (1) מתקיים עבור **כל** x ו- y ב- V.

2. (א) מצאו דוגמא של פונקציה רציפה $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש: $\phi(t) = 0$ לכל $t \notin (0,1)$ ו- $\int_0^1 (\phi(t))^2 dt = 1$. ציירו (בערך) את הגרף של הפונקציה ϕ שבחרתם.
בכל יתר הסעיפים של השאלה הזו ϕ תהיה הפונקציה שבחרת ו- ϕ_1, ϕ_2 ו- ϕ_3 תהינה הפונקציות המוגדרות ע"י $\phi_n(t) = \phi(t-n+1)$ עבור $n=1,2,3$ ועבור כל t ב- $\mathbb{R}$. ציירו (בערך) את הגרפים של שלוש הפונקציות האלו.

(ב) יהי V המרחב הלינארי של כל הפונקציות הרציפות $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ בעלות הצורה $f(t) = \alpha\phi_1(t) + \beta\phi_2(t) + \gamma\phi_3(t)$, כאשר α, β ו- γ הם קבועים ממשיים. נגדיר מכפלה פנימית ב-V ע"י הנוסחא $\langle f,g\rangle = \int_0^3 f(t)g(t)dt$ עבור כל f ו-g ב-V.
נניח ש $f = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + \gamma\phi_3$ ו- $g = a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3$. חשבו את $\langle f,g\rangle$. (התשובה תהיה ביטוי פשוט אשר תלוי בקבועים הממשיים α, β, γ, a, b ו- c).

(ג) יהי W מרחב כל הפונקציות f בעלות הצורה $f = \alpha(\phi_1+\phi_2) + \beta(\phi_3-\phi_1)$ כאשר α ו- β הם קבועים ממשיים כלשהם. מצאו מערכת אורתונורמלית אשר פורשת את W. מצאו מספרים A, B ו- C כך ש $f\in W$ אם ורק אם $f = x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3$ והמספרים הממשיים הקבועים x , y ו-z מקיימים $Ax+By+Cz=0$.

(ד) תהי $f = \phi_1 + \phi_3$. מצאו, בעזרת משפט ההיטל האורתוגונלי, את המספר

$$\min_{g\in W}\int_0^3 |f(t)-g(t)|^2\,dt \; .$$

כמו-כן מצאו את הפונקציה g ב-W שעבורה מתקבל המינימום הזה.

(ה) תהינה $u = x_1\phi_1 + y_1\phi_2 + z_1\phi_3$ ו- $v = x_2\phi_1 + y_2\phi_2 + z_2\phi_3$. מצאו קשר בין הנורמה $\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$ לבין המרחק ב- $\mathbb{R}^3$ בין הנקודות (x_1, y_1, z_1) ו- (x_2, y_2, z_2). (כמובן אפשר להעזר כאן בסעיף (ב)). מצאו תאור גאומטרי פשוט של הקבוצה ב- $\mathbb{R}^3$ של כל הנקודות (x_1, y_1, z_1) בעלות התכונה ש $u = x_1\phi_1 + y_1\phi_2 + z_1\phi_3 \in W$.

(ו) הראו, בעזרת סעיף (ה) שהפתרון שמצאת בסעיף (ד) גם נותן פתרון לבעיה גאומטרית שגרתית מסויימת (איזו בעיה?) ב-$\mathbb{R}^3$.

3. תהא $f(x)$ רציפה, מחזורית, ז"א $f(x+2\pi) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ובעלת פיתוח פורייה $f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. מצא את פיתוח פורייה של הפונקציה $g(x)$ כאשר :

(א) $g(x) = f(x) \cdot \sin x$.

(ב) $g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$.

(ג) $g(x) = f(x+\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(ד) $g(x) = f(Nx)$ N טבעי .

<u>הערה:</u> אין שום הבטחה שהטור $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ מתכנס. החישוב שלכם צריך להיות נכון גם כאשר הטור מתבדר עבור הרבה ערכים שונים של x.

4. תהי הפונקציה $f(x) = e^{-|x|}$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(א) מצאו את הטור פורייה $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(ב) נגדיר את הפונקציה $s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
מצאו נוסחה/נוסחאות המתארות את $s(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ ושרטטו את הגרף של $s(x)$ לאורך כל ציר x.

(ג) האם הטור מתכנס במידה שווה ל- $s(x)$ ב- $\mathbb{R}$? נמקו.
<u>הערה:</u> אפשר לחכות עם סעיף זה עד שנלמד את הפרק על התכנסות במידה שווה.

(ד) חשבו את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad , \quad \sum_{n-1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$.