נכתב ע״י דור שביב
shaviv@t2.technion.ac.il

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות
פתרון תרגיל בית מס׳ 4

שאלה 1:

(א) נוכיח תחילה שההתמרה מוגדרת עבור $s>a$:

$$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \le \int_0^t |f(\tau)|d\tau \le \int_0^t Ke^{a\tau}d\tau = K\left.\frac{e^{a\tau}}{a}\right|_0^t = \frac{K}{a}\left(e^{at}-1\right) \le \frac{K}{a}e^{at} = \tilde{K}e^{at}$$

נראה שהפונקציה היא בדיוק הקונבולוציה של f עם $g\equiv 1$:

$$(f*g)(t) = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \mathcal{L}\left[(f*g)\right](s) = \mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$$

(ב) נראה כי $g\in\beta(1,0)$:

$$|g(t)| = \left|\int_0^t \tau e^{-2\tau}\sin 5\tau d\tau\right| \le \int_0^t \left|\tau e^{-2\tau}\sin 5\tau\right| d\tau \le \int_0^t \left|\tau e^{-2\tau}\right| d\tau \le \int_0^t e^{-\tau}d\tau = \left.-e^{-\tau}\right|_0^t = 1-e^{-t} \le 1$$

ע״פ הסעיף הקודם:

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t \tau e^{-2\tau}\sin 5\tau d\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[te^{-2t}\sin 5t](s)$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 5t](s) = \frac{5}{(s+2)^2+25}$$

$$\mathcal{L}[te^{-2t}\sin 5t](s) = (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 5t](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{5}{(s+2)^2+25}\right) = \frac{5}{\left((s+2)^2+25\right)^2}\cdot 2(s+2) =$$

$$= \frac{10(s+2)}{\left((s+2)^2+25\right)^2}$$

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[te^{-2t}\sin 5t] = \frac{10(s+2)}{s\left((s+2)^2+25\right)^2}$$

נפרק את השבר שקיבלנו לסכום שברים פשוטים :

$$\frac{10(s+2)}{s\left((s+2)^2+25\right)^2}=\frac{10(s+2)}{s(s^2+4s+29)^2}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4s+29}+\frac{Ds+E}{(s^2+4s+29)^2}$$

$$10(s+2)=A(s^2+4s+29)^2+s(Bs+C)(s^2+4s+29)+s(Ds+E)$$

$$10s+20=A(s^4+8s^3+74s^2+232s+841)+(Bs^2+Cs)(s^2+4s+29)+Ds^2+Es$$

נשווה מקדמים :

$\underline{s^4}$: $0=A+B$

$\underline{s^3}$: $0=8A+4B+C$

$\underline{s^2}$: $0=74A+29B+4C+D$

$\underline{s}$: $10=232A+29C+E$

$\underline{1}$: $20=841A$

$$A=\frac{20}{841}$$

$$B=-A=\frac{-20}{841}$$

$$C=-8A-4B=\frac{-8\cdot 20+4\cdot 20}{841}=\frac{-80}{841}$$

$$D=-74A-29B-4C=\frac{-74\cdot 20+29\cdot 20+4\cdot 80}{841}=\frac{-580}{841}=\frac{-20}{29}$$

$$E=10-232A-29C=\frac{8410-232\cdot 20+29\cdot 80}{841}=\frac{6090}{841}=\frac{210}{29}$$

$$\mathcal{L}[g](s)=\frac{20}{841}\frac{1}{s}-\frac{20}{841}\frac{s+4}{(s+2)^2+25}-\frac{10}{29}\frac{2s-21}{\left((s+2)^2+25\right)^2}$$

$$\mathcal{L}[g](s)=\frac{1}{841}\left[20\frac{1}{s}-20\frac{s+4}{(s+2)^2+25}-290\frac{2s-21}{\left((s+2)^2+25\right)^2}\right]$$

על מנת למצוא את g , נחשב את ההתמרות הבאות :

$$\mathcal{L}[te^{at}\sin bt](s)=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{at}\sin bt](s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right)=\frac{2b(s-a)}{\left((s-a)^2+b^2\right)^2}$$

$$\mathcal{L}[te^{at}\cos bt](s)=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{at}\cos bt](s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right)=-\frac{(s-a)^2+b^2-2(s-a)^2}{\left((s-a)^2+b^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(s-a)^2-b^2}{\left((s-a)^2+b^2\right)^2}=\frac{1}{(s-a)^2+b^2}-\frac{2b^2}{\left((s-a)^2+b^2\right)^2}$$

$$\mathcal{L}[g](s)=\frac{1}{841}\left[20\frac{1}{s}-20\frac{s+4}{(s+2)^2+25}-290\frac{2s-21}{\left((s+2)^2+25\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{841}\left[20\frac{1}{s}-20\frac{s+2}{(s+2)^2+25}-20\frac{2}{(s+2)^2+25}-290\frac{2s+4}{\left((s+2)^2+25\right)^2}+290\frac{25}{\left((s+2)^2+25\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{841}\left[20\frac{1}{s}-20\frac{s+2}{(s+2)^2+25}-40\frac{1}{(s+2)^2+25}-58\frac{2\cdot 5\cdot(s+2)}{\left((s+2)^2+25\right)^2}+145\frac{2\cdot 25}{\left((s+2)^2+25\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{841}\left[20\frac{1}{s}-20\frac{s+2}{(s+2)^2+25}-40\frac{1}{(s+2)^2+25}-58\frac{2\cdot 5\cdot(s+2)}{\left((s+2)^2+25\right)^2}-145\frac{-2\cdot 25}{\left((s+2)^2+25\right)^2}-\right.$$

$$\left.-145\frac{1}{(s+2)^2+25}+145\frac{1}{(s+2)^2+25}\right]=$$

$$=\frac{1}{841}\left[20\frac{1}{s}-20\frac{s+2}{(s+2)^2+25}+21\frac{5}{(s+2)^2+25}-58\frac{2\cdot 5\cdot(s+2)}{\left((s+2)^2+25\right)^2}-\right.$$

$$\left.-145\left(\frac{1}{(s+2)^2+25}-\frac{2\cdot 25}{\left((s+2)^2+25\right)^2}\right)\right]$$

ומכאן נקבל את $g(t)$:

$$g(t)=\frac{1}{841}\left[20-20e^{-2t}\cos 5t+21e^{-2t}\sin 5t-58te^{-2t}\sin 5t-145te^{-2t}\cos 5t\right]$$

ג) ההתמרות של f_j :

$$\mathcal{L}[f_1](s) = \mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1}$$
$$\mathcal{L}[f_2](s) = \mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1}$$
$$\mathcal{L}[f_3](s) = \mathcal{L}[u_1(t)](s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[f_1 * f_2 * f_3](s) = \mathcal{L}[f_1](s)\cdot\mathcal{L}[f_2](s)\cdot\mathcal{L}[f_3](s) = \frac{1}{s-1}\frac{s}{s^2+1}\frac{e^{-s}}{s} = \frac{e^{-s}}{(s-1)(s^2+1)}$$

נגדיר פונקציה $g(t)$ כך שמתקיים : $\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$. אזי $\mathcal{L}[f](s) = e^{-s}\mathcal{L}[g](s)$,
ולכן $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[u_1(t)g(t-1)](s)$. כלומר, $f(t) = u_1(t)g(t-1)$.

נפרק את השבר לשברים פשוטים :

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+c}{s^2+1}$$
$$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1)$$

ע"י השוואת מקדמים נקבל:

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ C-B&=0\\ A-C&=1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad A=\frac{1}{2} \quad B=-\frac{1}{2} \quad C=-\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos t - \sin t\right)$$

$$f(t) = u_1(t)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{t-1} - \cos(t-1) - \sin(t-1)\right)$$

שאלה 2 :

נשתמש בהתמרת לפלס על שני אגפי המשוואה :

$$\mathcal{L}[x''] + \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[\sin t] + \mathcal{L}[\int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau]$$

$$\mathcal{L}[x''] = s^2\mathcal{L}[x] - sx(0) - x'(0)$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau] = \mathcal{L}[\sin t * x(t)] = \mathcal{L}[\sin t]\cdot\mathcal{L}[x] = \frac{\mathcal{L}[x]}{s^2+1}$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל :

$$s^2\mathcal{L}[x] - s + \mathcal{L}[x] = \frac{1+\mathcal{L}[x]}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)^2\mathcal{L}[x] - s(s^2+1) = 1 + \mathcal{L}[x]$$

$$(s^4+2s^2)\mathcal{L}[x] = s^2 + s + 1$$

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{s^2+s+1}{s^2(s^2+2)}$$

נפרק לשברים חלקיים :

$$\frac{s^3+s+1}{s^2(s^2+2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2}$$

$$s^3+s+1 = (As+B)(s^2+2) + s^2(Cs+D)$$

$\underline{s^3}$: $1 = A + C$

$\underline{s^2}$: $0 = B + D$

$\underline{s}$: $1 = 2A$

$\underline{1}$: $1 = 2B$

$$A = \frac{1}{2},\quad \text{B}=\frac{1}{2},\quad C = \frac{1}{2},\quad D = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[1 + t + \cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right]$$