נכתב ע"י דור שביב
shaviv@t2.technion.ac.il

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות
פתרון תרגיל בית מס' 3

שאלה 1:

(א) האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|xf(x)|dx$ מתכנס, ו- $f\in G(\mathbb{R})$, לכן מתקיים:

$$\mathcal{F}[xf(x)](\omega)=i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f(x)](\omega)=i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{1+\omega^4}\right)=i\left(\frac{1+\omega^4-4\omega^3\cdot\omega}{(1+\omega^4)^2}\right)=i\left(\frac{1-3\omega^4}{(1+\omega^4)^2}\right)$$

$$\mathcal{F}[xf(x)](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-i\omega x}dx=i\frac{1-3\omega^4}{(1+\omega^4)^2}$$

נציב $\omega=0$ ונכפול ב- 2π : $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=2\pi i$

(ב) מכיוון ש- $f,f'\in G(\mathbb{R})$ ו- $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, ניתן לחשב את ההתמרה של $f'(x)$:

$$\mathcal{F}[f'(x)](\omega)=i\omega\mathcal{F}[f(x)](\omega)=i\omega\frac{\omega}{1+\omega^6}=\frac{i\omega^2}{1+\omega^6}$$

f'' קיימת ב- $x=0$ $\Leftarrow$ f' גזירה ב- $x=0$, ובפרט קיימות הנגזרות החד-צדדיות בנקודה (הן גם שוות). בנוסף, $f'\in G(\mathbb{R})$, לכן קיימת ההתמרה ההפוכה:

$$\frac{f'(x-)+f'(x+)}{2}=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f'](\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$\frac{f'(0-)+f'(0+)}{2}=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f'](\omega)d\omega$$

f' גזירה ב- $x=0$ ולכן גם רציפה שם $\Leftarrow$ $\frac{f'(0-)+f'(0+)}{2}=f'(0)$

$$f'(0)=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f'](\omega)d\omega=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{i\omega^2}{1+\omega^6}d\omega$$

הפונקציה באינטגרל זוגית, לכן נקבל שהגבול שווה לביטוי: $2i\int_0^{\infty}\frac{\omega^2}{1+\omega^6}d\omega$

ניתן להשאיר ככה, אבל ניתן גם לפתור ע"י ההצבה $t=\omega^3$:
הגבולות לא משתנים, ו- $dt=3\omega^2d\omega$.

$$2i\int_0^{\infty}\frac{\omega^2}{1+\omega^6}d\omega=\frac{2}{3}i\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{2}{3}i\left[\arctan t\right]_0^{\infty}=\frac{2}{3}\frac{\pi}{2}i=\frac{\pi}{3}i$$

ג) ע"פ נוסחת פלנשראל: $\int_{-\infty}^{\infty}\left|(f*f')(x)\right|^2dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}[f*f'](\omega)\right|^2d\omega$

נחשב את $\mathcal{F}[f*f'](\omega)$ בעזרת משפט הקונבולוציה:

$$\mathcal{F}[f*f'](\omega) = 2\pi\cdot\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[f'](\omega)$$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{1+|\omega|^3} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{i\omega}{1+|\omega|^3}$$

$$\mathcal{F}[f*f'](\omega) = 2\pi i\frac{\omega}{(1+|\omega|^3)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(f*f')(x)\right|^2dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}[f*f'](\omega)\right|^2d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|2\pi i\frac{\omega}{(1+|\omega|^3)^2}\right|^2d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}4\pi^2\frac{\omega^2}{(1+|\omega|^3)^4}d\omega =$$

$$= 8\pi^3\cdot 2\int_0^{\infty}\frac{\omega^2}{(1+\omega^3)^4}d\omega = 16\pi^3\int_0^{\infty}\frac{1}{3}\frac{3\omega^2}{(1+\omega^3)^4}d\omega = \frac{16\pi^3}{3}\int_0^{\infty}-\frac{1}{3}(-3)\frac{3\omega^2}{(1+\omega^3)^4}d\omega =$$

$$= -\frac{16\pi^3}{9}\int_0^{\infty}-3\frac{3\omega^2}{(1+\omega^3)^4}d\omega = -\frac{16\pi^3}{9}\left[\frac{1}{(1+\omega^3)^3}\right]_0^{\infty} = \frac{16\pi^3}{9}$$

<u>שאלה 2</u>:

א) ניתן לפתור את $n=2$ בעזרת נוסחת פלנשראל עבור הפונקציה $\pi\cdot\chi_{[-1,1]}$, אבל נפתור בדרך מסובכת יותר לטובת $n=3,4$:

$$\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}] = \frac{\sin\omega}{\pi\omega} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-1,1]}] = 2\pi\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}]\cdot\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}] = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$$

$$(\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-1,1]})(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-1,1]}(y)\cdot\chi_{[-1,1]}(x-y)dy = \int_{-1}^{1}\chi_{[-1,1]}(x-y)dy$$

נבצע החלפת משתנים: $u=x-y \Leftarrow du=-dy$, הגבולות: $y=-1\to u=x+1$

$y=1\to u=x+1$

$$(\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-1,1]})(x) = \int_{-1+x}^{1+x}\chi_{[-1,1]}(u)du = \begin{cases} 2-|x| & |x|<2 \\ 0 & |x|>2 \end{cases}$$

(כדי להגיע לנוסחא המפורשת פשוט צריך להפריד למקרים ולבדוק)

נסמן: $\Phi(x)=\begin{cases}2-|x| & |x|<2\\ 0 & |x|>2\end{cases}$. אזי: $\mathcal{F}[\Phi](\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$

Φ רציפה, לכן בעזרת ההתמרה ההפוכה ניתן לקבל בדיוק את ערך הפונקציה בנקודה:

$$\Phi(x)=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$$

$$\Phi(0)=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{2}{\pi}\lim_{M\to\infty}2\int_{0}^{M}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{2}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}\Phi(0)=\frac{\pi}{2}2=\pi$$

עבור $n=3$ - נשתמש בנוסחת פלנשראל המוכללת:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](\omega)\overline{\mathcal{F}[g](\omega)}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3\omega}{\omega^3}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\frac{\overline{\sin\omega}}{\omega}d\omega=\frac{\pi^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\frac{\overline{\sin\omega}}{\pi\omega}d\omega=$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[\Phi](\omega)\overline{\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](\omega)}d\omega=\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\overline{\chi_{[-1,1]}(x)}dx=\frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\chi_{[-1,1]}(x)dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\Phi(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}(2-x)dx=\frac{\pi}{2}\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(2-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\pi$$

עבור $n=4$ נשתמש בנוסחת פלנשראל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4\omega}{\omega^4}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\right)^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\right|^2d\omega=\frac{\pi^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\right|^2d\omega=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}[\Phi](\omega)\right|^2d\omega=\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi(x)\right|^2dx=\frac{\pi}{8}\int_{-2}^{2}\Phi^2(x)dx=\frac{\pi}{4}\int_{0}^{2}(2-x)^2dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2=-\frac{\pi}{4}\frac{1}{3}(-2)^3=\frac{2}{3}\pi$$

(ב) $g(x)$ היא בדיוק הקונבולוציה של e^{-bx^2} עם $\frac{\sin^2 ax}{\pi x^2}$.
לכן, לפי משפט הקונבולוציה:

$$\mathcal{F}\left[g\right](\omega)=\mathcal{F}\left[e^{-bx^2}*\frac{\sin^2 ax}{\pi x^2}\right](\omega)=2\pi\mathcal{F}\left[e^{-bx^2}\right]\cdot\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2 ax}{\pi x^2}\right]$$

ידוע כי: $\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$. נשתמש בנוסחת ההזזה:

$$\mathcal{F}\left[f(ax+b)\right](\omega)=\frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\mathcal{F}[f(x)](\tfrac{\omega}{a})$$

נציב $b\to 0$, $a\to\sqrt{b}$: $\mathcal{F}[e^{-bx^2}]=\frac{1}{\sqrt{b}}\mathcal{F}[f](\frac{\omega}{\sqrt{b}})=\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$

מהסעיף הקודם: $\mathcal{F}[\Phi](\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}$. Φ רציפה, ולכן לפי עיקרון הדואליות:

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[\Phi]]=\mathcal{F}[\tfrac{2}{\pi}\tfrac{\sin^2\omega}{\omega^2}]=\frac{1}{2\pi}\Phi(-x)=\frac{1}{2\pi}\Phi(x)$$

$$\mathcal{F}[\tfrac{\sin^2\omega}{\omega^2}]=\frac{1}{4}\Phi(x)$$

גם כאן נשתמש בנוסחת ההזזה, כאשר $\omega\to a\omega$, ונזכור ש- $a>0$:

$$\mathcal{F}[\tfrac{\sin^2 a\omega}{a^2\omega^2}]=\frac{1}{a}\frac{1}{4}\Phi(\tfrac{x}{a})$$

$$\mathcal{F}[\tfrac{\sin^2 a\omega}{\omega^2}]=\frac{a}{4}\Phi(\tfrac{x}{a})=\frac{a}{4}\cdot\begin{cases}2-\left|\frac{x}{a}\right| & ,\left|\frac{x}{a}\right|<2\\ 0 & ,\left|\frac{x}{a}\right|>2\end{cases}=\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{1}{4}|x| & ,|x|<2a\\ 0 & ,|x|>2a\end{cases}$$

$$\mathcal{F}[\tfrac{\sin^2 a\omega}{\pi\omega^2}]=\begin{cases}\frac{a}{2\pi}-\frac{1}{4\pi}|x| & ,|x|<2a\\ 0 & ,|x|>2a\end{cases}$$

$$\mathcal{F}[\tfrac{\sin^2 ax}{\pi x^2}]=\begin{cases}\frac{a}{2\pi}-\frac{1}{4\pi}|\omega| & ,|\omega|<2a\\ 0 & ,|\omega|>2a\end{cases}$$

$$\mathcal{F}[g](\omega)=2\pi\cdot\tfrac{1}{\sqrt{b}}\tfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4b}}\cdot\begin{cases}\frac{a}{2\pi}-\frac{1}{4\pi}|\omega| & ,|\omega|<2a\\ 0 & ,|\omega|>2a\end{cases}=\sqrt{\tfrac{\pi}{b}}e^{-\frac{\omega^2}{4b}}\cdot\begin{cases}\frac{a}{2\pi}-\frac{1}{4\pi}|\omega| & ,|\omega|<2a\\ 0 & ,|\omega|>2a\end{cases}$$

שאלה 3:

(א)
$$\mathcal{F}[f](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x}{|x|}e^{-i\omega x}dx=-i\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x}{|x|}\sin\omega x dx=$$
$$=-\frac{i}{\pi}\int_{0}^{a}\sin\omega x dx=-\frac{i}{\pi}\left[\frac{-\cos\omega x}{\omega}\right]_0^a=\frac{i}{\pi}\frac{\cos\omega a-1}{\omega}$$

(ב) $\frac{\cos ax-1}{x}$ היא פונקציה אי-זוגית, ולכן $\frac{\cos ax-1}{x}\sin bx$ היא זוגית, ולכן מתקיים:
$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}\sin bx\;dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}\sin bx\;dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}i\sin bx\;dx$$
מכיוון ש- $\frac{\cos ax-1}{x}$ אי-זוגית, מתקיים גם $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}\cos bx\;dx=0$, לכן ניתן להוסיף אותו לביטוי:
$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}i\sin bx\;dx=\frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}\cos bx\;dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}i\sin bx\;dx\right)=$$
$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}e^{ibx}dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos a\omega-1}{\omega}e^{ib\omega}d\omega=\frac{1}{2i}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\cos a\omega-1}{\omega}e^{ib\omega}d\omega=$$
(ניתן לעבור מהאינטגרל המוכלל לגבול כי האינטגרל מתכנס)
$$=-\frac{\pi}{2}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{i}{\pi}\frac{\cos a\omega-1}{\omega}e^{ib\omega}d\omega=-\frac{\pi}{2}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{ib\omega}d\omega$$
זוהי ההתמרה ההפוכה של $\mathcal{F}[f](\omega)$ בנקודה $x=b$. לכן נקבל את הערך של f בנקודות שבהן היא רציפה, ובנקודות שבהן היא אינה רציפה ($b=0,\pm a$), נקבל את ממוצע הגבולות החד-צדדיים. סה"כ:
$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-1}{x}\sin bx\;dx=-\frac{\pi}{2}\cdot\begin{cases}0 & , \quad b=0\\ \frac{b}{|b|} & , \quad |b|<a\\ \frac{1}{2}\frac{b}{|b|} & , \quad |b|=a\\ 0 & , \quad |b|>a\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad b=0\\ -\frac{\pi}{2}\frac{b}{|b|} & , \quad |b|<a\\ -\frac{\pi}{4}\frac{b}{|b|} & , \quad |b|=a\\ 0 & , \quad |b|>a\end{cases}$$

(ג) g גזירה ולכן רציפה, ו- f רציפה למקוטעין $\Leftarrow$ u רציפה למקוטעין.

$f(x)=0$ עבור $|x|>a$, לכן גם $u(x)=f(x)g(x)=0$ לכל $|x|>a$. מכאן: $\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|dx<\infty$.

כלומר, u רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט $\Leftarrow$ $u\in G(\mathbb{R})$.

מכאן ניתן להסיק שלושה דברים:

1. $\hat{u}(\omega)$ מוגדרת לכל $\omega\in\mathbb{R}$.
2. $\hat{u}(\omega)$ רציפה לכל $\omega\in\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty}\hat{u}(\omega)=0$

בנוסף: $u\in\mathbb{R}$ לכן $\hat{u}(-\omega)=\overline{\hat{u}(\omega)}$. ומכאן: $|\hat{u}(-\omega)|=|\overline{\hat{u}(\omega)}|=|\hat{u}(\omega)|$. כלומר, $|\hat{u}(\omega)|$ זוגית.

לכן מתקיים: $\int_{-R}^{R}|\hat{u}(\omega)|d\omega=2\int_{0}^{R}|\hat{u}(\omega)|d\omega$ עבור $R>0$. נעבור לגבול:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}|\hat{u}(\omega)|d\omega=2\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}|\hat{u}(\omega)|d\omega=2\int_{0}^{\infty}|\hat{u}(\omega)|d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(\omega)|d\omega$$

נניח בשלילה שהגבול הנ"ל סופי. אזי $\hat{u}(\omega)$ אינטגרבילית בהחלט.

ע"פ המשפט הקודם, $\hat{u}(\omega)$ רציפה, ולכן $\hat{u}(\omega)\in G(\mathbb{R})$.

מכאן, לפי אותו משפט, ההתמרת פורייה של $\hat{u}(\omega)$ רציפה לכל x.

לפי עקרון הדואליות: $\mathcal{F}[\hat{u}](x)=\mathcal{F}[\mathcal{F}[u]](x)=\frac{1}{2\pi}\tilde{u}(-x)$, כאשר $\tilde{u}$ היא פונקציה המקיימת לכל x: $\tilde{u}(x)=\frac{u(x-)+u(x+)}{2}$. כלומר, ע"פ המשפט $\tilde{u}(x)$ היא פונקציה רציפה.

נראה כי $\tilde{u}$ אינה רציפה ב- $x=0$:

לפי ההגדרה של f, ניתן לראות כי $f(0-)=-1$ ו-$f(0+)=1$.

עבור כל x חיובי המקיים $0<x<a$ מתקיים: $f(x-)=f(x+)=1$, ועבור x שלילי המקיים $-a<x<0$ מתקיים $f(x-)=f(x+)=-1$.

g רציפה, לכן מתקיים לכל x: $g(x)=g(x-)=g(x+)$.

$$\tilde{u}(0)=\frac{u(0-)+u(0+)}{2}=\frac{f(0-)g(0-)+f(0+)g(0+)}{2}=\frac{-g(0-)+g(0+)}{2}=\frac{-g(0)+g(0)}{2}=0$$

ניקח מספר חיובי קטן $\varepsilon>0$. אזי מתקיים:

$$\tilde{u}(\varepsilon)=\frac{u(\varepsilon-)+u(\varepsilon+)}{2}=\frac{f(\varepsilon-)g(\varepsilon-)+f(\varepsilon+)g(\varepsilon+)}{2}=\frac{g(\varepsilon-)+g(\varepsilon+)}{2}=\frac{g(\varepsilon)+g(\varepsilon)}{2}=g(\varepsilon)$$

נשאיף את ε ל- 0, ומהרציפות של g נקבל: $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\tilde{u}(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}g(\varepsilon)=g(0)$.

באותו אופן ניתן להראות כי $\lim\limits_{\varepsilon\to0-}\tilde{u}(\varepsilon)=-g(0)$ (עבור $\varepsilon<0$).

אבל ע"פ הנתון, $g(0)\neq0$, כלומר $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\tilde{u}(\varepsilon)\neq\tilde{u}(0)$.

קיבלנו ש- $\tilde{u}$ אינה רציפה ב- $x=0$, וזוהי סתירה.

לכן הנחת השלילה אינה נכונה, ומתקיים: $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}|\hat{u}(\omega)|d\omega=+\infty$