נכתב ע"י דור שביב
shaviv@t2.technion.ac.il

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות
פתרון תרגיל בית מס' 2

שאלה 1:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+x}} & , \quad 0<x<\pi \\ 0 & , \quad x=0,-\pi,\pi \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x}} & , \quad -\pi<x<0\end{cases} \qquad\qquad f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$$

(א)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|c_n|=+\infty$$

הוכחה: נניח בשלילה שהטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס.

בנוסף, מתקיים $|c_n e^{inx}|\le|c_n|$ לכל x. לכן, ע"פ מבחן M של ויירשטראס, הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$ מתכנס במ"ש לכל x. ע"פ משפט דיריכלה, הטור מתכנס נקודתית ל- $f(x)$ עבור כל $x\in(-\pi,\pi)$, כולל הנקודה שבה היא אינה רציפה: $x=0$. הסכומים החלקיים $S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{inx}$ הם סכומים של פונקציות רציפות, לכן $S_N(x)$ היא פונקציה רציפה לכל N.
מכיוון שהסדרה $\{S_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$, נובע ש- $f(x)$ רציפה בקטע $(-\pi,\pi)$, בסתירה לכך ש- $f(x)$ אינה רציפה ב- $x=0$.

$f\in E$, לכן ע"פ שוויון פרסבל: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\pi}\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{\pi}[\ln|1+x|]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\ln(1+\pi)$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{\pi}\ln(1+\pi)$$

(ב) $f(x)$ רציפה למקוטעין וקיימות הנגזרות החד-צדדיות שלה לכל $x\in[-\pi,\pi]$, לכן $f(x)\in E'$. לכן, ע"פ משפט דיריכלה, הטור פורייה של $f(x)$ מתכנס לכל $x\in[-\pi,\pi]$.

(ג) ע"פ משפט דיריכלה, בכל הנקודות בהן $f(x)$ רציפה הטור הנ"ל מתכנס ל- $f(x)$. עבור $x=0,-\pi,\pi$ מתקיים $f(x)=\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$ (עבור ההרחבה המחזורית של $f(x)$), לכן הטור מתכנס ל- $f(x)$ גם בנקודות אלו.

(ד) כפי שציינו בסעיף א, $S_N(x)$ היא פונקציה רציפה לכל N. לכן אם $S_N(x)$ מתכנסת במ"ש ל- $f(x)$ בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, אזי $f(x)$ צריכה להיות פונקציה רציפה בקטע זה.
אבל $f(x)$ אינה רציפה ב- $x=0$, לכן אין התכנסות במ"ש.

<u>שאלה 2</u>:

(א) תהי $g(x)=\begin{cases}0 & , \quad -\pi\le x<\alpha \\ 2\pi & , \quad \alpha\le x\le\beta \\ 0 & , \quad \beta<x\le\pi\end{cases}$, ונניח $g(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n e^{inx}$. נחשב את c_n:

$$d_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}2\pi e^{-inx}dx=\int_{\alpha}^{\beta}e^{-inx}dx=\begin{cases}\beta-\alpha & n=0 \\ \left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{e^{-in\beta}-e^{-in\alpha}}{-in} & n\neq 0\end{cases}$$

תהי $f\in E[-\pi,\pi]$, עם טור פורייה $f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$. מכיוון שגם $g\in E[-\pi,\pi]$, מתקיים שוויון פרסבל המוכלל: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\overline{d_n}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\overline{d_n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n\overline{\left(\frac{e^{-in\beta}-e^{-in\alpha}}{-in}\right)}+c_0\overline{(\beta-\alpha)}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\overline{\left(\frac{e^{-in\beta}-e^{-in\alpha}}{-in}\right)}=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n\frac{e^{in\beta}-e^{in\alpha}}{in}+c_0(\beta-\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{e^{in\beta}-e^{in\alpha}}{in}$$

(ב) $$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

נגדיר $g(x)=\begin{cases}0 & , \quad -\pi\le x<\alpha\\ \pi & , \quad \alpha\le x\le\beta\\ 0 & , \quad \beta<x\le\pi\end{cases}$. הטור פורייה של g : $g(x)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos nx+d_n\sin nx\right]$

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\pi dx=\beta-\alpha$$

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nxdx=\int_{\alpha}^{\beta}\cos nxdx=\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{\alpha}^{\beta}=\frac{\sin n\beta-\sin n\alpha}{n}$$

$$d_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nxdx=\int_{\alpha}^{\beta}\sin nxdx=-\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{\alpha}^{\beta}=-\frac{\cos n\beta-\cos n\alpha}{n}$$

שוויון פרסבל המוכלל: $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{a_0\overline{c_0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\overline{c_n}+b_n\overline{d_n}\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{a_0\overline{c_0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\overline{c_n}+b_n\overline{d_n}\right]=$$
$$=\frac{a_0(\beta-\alpha)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{\sin n\beta-\sin n\alpha}{n}-b_n\frac{\cos n\beta-\cos n\alpha}{n}\right]$$

<u>שאלה 3</u>:

$$f(x)=\begin{cases}\pi-|2x| & , \quad |x|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2}<|x|\le\pi\end{cases}$$

(א) $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\pi-2x)dx=\frac{2}{\pi}\left[\pi x-x^2\right]_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\pi-2x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi/2} - 2\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{n}dx\right)\right]=$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\frac{\pi}{n}\sin n\frac{\pi}{2}} - 2\left(\cancel{\frac{\pi}{2n}\sin n\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi/2}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\frac{2}{n^2}\left[\cos nx\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{4}{\pi n^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} & n = 2k-1 \\ 0 & n = 4k \\ \frac{8}{\pi n^2} & n = 4k-2 \end{cases}$$

f היא פונקציה זוגית, לכן $b_n = 0$ לכל $n \ge 1$.

(ב) $$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)x\right) + \frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos\left(2(2k-1)x\right)\right]$$

f רציפה לכל $x\in[-\pi,\pi]$, ומתקיים $f(\pi-) = f((-\pi)+)$, לכן לפי משפט דיריכלה הטור פורייה מתכנס ל- $f(x)$.

(ג) f רציפה לכל $x\in[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, והנגזרת של f רציפה למקוטעין, כלומר, $f'\in E$. לכן הטור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi,\pi]$.

(ד) מכיוון שמתקיימים התנאים של התכנסות במ"ש, ניתן לגזור את הטור פורייה של f איבר איבר ולקבל את הטור $G(x)$. לכן הטור מתכנס נקודתית ל- $f'(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$. אבל f' איננה פונקציה רציפה (למשל בנקודה $x=0$), לכן הטור פורייה שלה לא מתכנס במ"ש, כלומר $G(x)$ אינו מתכנס במ"ש.

(ה) $G(x) = f'(x)$ בכל הנקודות בהן f' רציפה (מלבד קצוות התחום). בנקודות הנותרות:

$$G(\pi) = G(-\pi) = \frac{f'((-\pi)+) + f'(\pi-)}{2} = 0$$

$$G(-\frac{\pi}{2}) = \frac{f'((-\frac{\pi}{2})-) + f'((-\frac{\pi}{2})+)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

$$G(0) = \frac{f'(0-) + f'(0+)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$G(\frac{\pi}{2}) = \frac{f'(\frac{\pi}{2}-) + f'(\frac{\pi}{2}+)}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1$$

עבור שאר הנקודות:

$$G(x)=\begin{cases} 0 & , \quad -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 2 & , \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ -2 & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

G מחזורית 2π, כלומר, לכל x מתקיים $G(x+2\pi)=G(x)$.

(ו) מצאנו בסעיף (ה): $G(0)=0$, $G(\frac{\pi}{2})=-1$, $G(\pi)=0$.

(ז) שוויון פרסבל: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|^2+|b_n|^2\right]$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2+b_n^2\right]=\frac{\pi^2}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{16}{\pi^2(2k-1)^4}+\frac{4}{\pi^2(2k-1)^4}\right)=\frac{\pi^2}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{20}{\pi^2(2k-1)^4}=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{20}{\pi^2(2k+1)^4}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{20}{\pi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{20}{\pi^2(2k+1)^4}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{20}{\pi^2}+\frac{20}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi/2}(\pi-2x)^2\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{-1}{3}\left[(\pi-2x)^3\right]_0^{\pi/2}=-\frac{(\pi-\pi)^3-(\pi-0)^3}{3\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{20}{\pi^2}+\frac{20}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{5}{24}\pi^2-\frac{20}{\pi^2}=\frac{20}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}-1$$

שאלה 4:

(א) f פונקציה אי-זוגית, לכן המקדמים a_n מתאפסים לכל $n \ge 0$ $\Leftarrow$ $a_0 = a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nxdx = \frac{1}{n}$$

(ב) נבצע אינטגרציה איבר איבר על הטור פורייה של f : $\quad f \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

(מותר לעשות זאת כי f רציפה בקטעים $(0,\pi)$ ו-$(-\pi,0)$, והגבולות החד-צדדיים בנקודות $0,-\pi,\pi$ קיימים $\Leftarrow$ $f \in E$)

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}(\cos nx - \cos n\pi) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cos nx - (-1)^n) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}}_{const} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} + K$$

נחשב את האינטגרל - עבור $-\pi \le x \le 0$:

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{x} -\frac{\pi + t}{2}dt = \left[\frac{\pi}{2}t + \frac{t^2}{4}\right]_x^{-\pi} = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{2\pi x + x^2}{4} = -\frac{x^2 + 2\pi x + \pi^2}{4} = -\left(\frac{x+\pi}{2}\right)^2$$

עבור $0 \le x \le \pi$:

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = -\left(\frac{0+\pi}{2}\right)^2 + \int_{0}^{x}\frac{\pi - t}{2}dt = -\frac{\pi^2}{4} + \left[\frac{\pi}{2}t - \frac{t^2}{4}\right]_0^x = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} =$$

$$= -\frac{x^2 - 2\pi x + \pi^2}{4} = -\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2$$

נגדיר פונקציה $F(x)$ באופן הבא:

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \begin{cases} -\left(\frac{\pi + x}{2}\right)^2 & , \quad -\pi \le x < 0 \\ -\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 & , \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ולכן אינטגרל הטור מתכנס במ"ש ל-$F(x)$: $\quad F(x) = \underbrace{K}_{\frac{A_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-\frac{1}{n^2})}_{A_n}\cos nx$

נחשב את A_0 ע"פ ההגדרה:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2dx=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2dx=-\frac{1}{6\pi}\Big[(x-\pi)^3\Big]_0^{\pi}=$$
$$=-\frac{1}{6\pi}\left(0-(-\pi)^3\right)=-\frac{\pi^2}{6}$$

$$F(x)=\frac{A_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx=-\frac{\pi^2}{12}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\qquad\Leftarrow$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}-F(x)=\begin{cases}\left(\frac{\pi+x}{2}\right)^2-\frac{\pi^2}{12} & , \quad -\pi\le x<0\\ \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2-\frac{\pi^2}{12} & , \quad 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6} & , \quad -\pi\le x<0\\ \frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6} & , \quad 0\le x\le\pi\end{cases}$$

(ג) באופן דומה לסעיף הקודם, נבצע אינטגרציה איבר איבר ל- $g(x)$ (גם כאן מותר, כי $g(x)$ רציפה):

$$G(x)=\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n^3}+\underbrace{K}_{\frac{A_0}{2}}$$

$$G(x)=\int g(t)dt=\begin{cases}\frac{x^3}{12}+\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2x}{6} & , \quad -\pi\le x<0\\ \frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2x}{6} & , \quad 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$G(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, לכן: $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)dx = 0$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} = \begin{cases} \frac{x^3}{12} + \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} & , \quad -\pi \le x < 0 \\ \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} & , \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

(ד) שוויון פרסבל: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right]$

נשתמש בשוויון פרסבל עבור $h(x)$: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^6}{144} + \frac{\pi^2 x^4}{16} + \frac{\pi^4 x^2}{36} - 2\frac{x^3}{12}\frac{\pi x^2}{4} + 2\frac{x^3}{12}\frac{\pi^2 x}{6} - 2\frac{\pi x^2}{4}\frac{\pi^2 x}{6}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^6}{144} - \frac{\pi x^5}{24} + \frac{13\pi^2 x^4}{144} - \frac{\pi^3 x^3}{12} + \frac{\pi^4 x^2}{36}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^7}{1008} - \frac{\pi x^6}{144} + \frac{13\pi^2 x^5}{720} - \frac{\pi^3 x^4}{48} + \frac{\pi^4 x^3}{108}\right]_0^{\pi} =$$

$$= 2\pi^6\left(\frac{1}{1008} - \frac{1}{144} + \frac{13}{720} - \frac{1}{48} + \frac{1}{108}\right) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$