נכתב ע״י דור שביב
shaviv@t2.technion.ac.il

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות
פתרון תרגיל בית מס׳ 1

שאלה 1:

(א) אם $x=0$ או $y=0$ אז $\langle x,y\rangle=0$. בכל מקרה מתקיים $\langle x,x\rangle\geq 0$ ו- $\langle y,y\rangle\geq 0$.
ולכן $\left|\langle x,y\rangle\right|=0\leq\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$.

(ב)
$$\langle x-y,x-y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$$
אם $\langle x,y\rangle$ ממשי, אזי מתקיים: $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}=\langle x,y\rangle$. לכן מתקיים:
$$0\leq\langle x-y,x-y\rangle=2\left(\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle\right)$$
$$\langle x,y\rangle\leq\langle x,x\rangle$$
$\langle x,y\rangle$ ממשי וחיובי, לכן $\langle x,y\rangle=\left|\langle x,y\rangle\right|$. כלומר: $\left|\langle x,y\rangle\right|\leq\langle x,x\rangle$.
$$\left|\langle x,y\rangle\right|\leq\sqrt{\left(\langle x,x\rangle\right)^2}=\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$$

(ג)
$$\langle x_1,y_1\rangle=\left\langle\frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}},\frac{y}{\sqrt{\langle y,y\rangle}}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{\langle y,y\rangle}}\right)}\langle x,y\rangle=\frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}}>0$$
$$\langle x_1,x_1\rangle=\frac{\langle x,x\rangle}{\langle x,x\rangle}=1\qquad\qquad\langle y_1,y_1\rangle=1$$
$\langle x_1,x_1\rangle=\langle y_1,y_1\rangle$ ו- $\langle x_1,y_1\rangle$ מספר ממשי וחיובי, לכן ע״פ סעיף (ב):
$$\left|\langle x_1,y_1\rangle\right|\leq\sqrt{\langle x_1,x_1\rangle\langle y_1,y_1\rangle}$$
$$\frac{\left|\langle x,y\rangle\right|}{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}}\leq\sqrt{1\cdot 1}=1$$
$$\left|\langle x,y\rangle\right|\leq\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$$

(ד)
$$\langle x_1,y_1\rangle=\left\langle\overline{\langle x,y\rangle}x,y\right\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle=\left|\langle x,y\rangle\right|^2>0$$
לכן ע״פ סעיף (ג), (1) מתקיים עבור וקטורים אלו:
$$\left|\langle x,y\rangle\right|^2\leq\sqrt{\langle x_1,x_1\rangle\langle y_1,y_1\rangle}=\sqrt{\left|\langle x,y\rangle\right|^2\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}=\left|\langle x,y\rangle\right|\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$$
$$\left|\langle x,y\rangle\right|\leq\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$$

(ה) אם $x=0$ או $y=0$ או $\langle x,y\rangle=0$, אזי (1) מתקיים ע״פ סעיף (א).
אם $x\neq 0$ ו- $y\neq 0$ ו- $\langle x,y\rangle\neq 0$, אזי (1) מתקיים ע״פ סעיף (ד).
ולכן (1) מתקיים לכל x ו- y.

<u>שאלה 2</u>:

(א) נבחר: $\phi(t)=\sqrt{2}\sin(\pi t)\cdot\chi_{(0,1)}(t)$. ברור ש- $\phi(t)=0$ לכל $t\notin(0,1)$. בנוסף:

$$\int_0^1(\phi(t))^2\,dt=\int_0^1\left(\sqrt{2}\sin(\pi t)\chi_{(0,1)}\right)^2dt=\int_0^1 2\sin^2\pi t dt=\int_0^1(1-\cos 2\pi t)\,dt=1$$

$$\phi_1(t)=\sqrt{2}\sin\pi t\cdot\chi_{(0,1)}(t)$$
$$\phi_2(t)=\sqrt{2}\sin\pi(t-1)\cdot\chi_{(1,2)}(t)$$
$$\phi_3(t)=\sqrt{2}\sin\pi(t-2)\cdot\chi_{(2,3)}(t)$$

(ב) ניתן לראות שע״פ המכפלה הפנימית שהוגדרה מתקיים $\langle\phi_i,\phi_j\rangle=\delta_{ij}$.

$$\langle f,g\rangle=\langle\alpha\phi_1+\beta\phi_2+\gamma\phi_3,a\phi_1+b\phi_2+c\phi_3\rangle=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}=\alpha a+\beta b+\gamma c$$

(ג) ניתן לראות ש- $W=Span\{\phi_1+\phi_2,\phi_3-\phi_1\}$, וזהו בסיס ל- W. על מנת לקבל בסיס אורותונורמלי, נשתמש בתהליך גרם-שמידט:

$$v_1=\phi_1+\phi_2,\quad v_2=\phi_3-\phi_1$$
$$e_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{\phi_1+\phi_2}{\sqrt{\langle\phi_1+\phi_2,\phi_1+\phi_2\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+\phi_2)$$
$$\tilde{v}_2=\langle v_2,e_1\rangle e_1=\left\langle\phi_3-\phi_1,\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+\phi_2)\right\rangle e_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+\phi_2)=-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}$$
$$e_2=\frac{v_2-\tilde{v}_2}{\|v_2-\tilde{v}_2\|}=\frac{\phi_3-\phi_1+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}{\left\|\phi_3-\phi_1+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right\|}=\frac{\frac{1}{2}(-\phi_1+\phi_2+2\phi_3)}{\frac{1}{2}\|-\phi_1+\phi_2+2\phi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\phi_1+\phi_2+2\phi_3)$$

לכן המערכת הדרושה היא: $\left\{\frac{\phi_1+\phi_2}{\sqrt{2}},\frac{-\phi_1+\phi_2+2\phi_3}{\sqrt{6}}\right\}$.

$$f=\alpha(\phi_1+\phi_2)+\beta(\phi_3-\phi_1)=(\alpha-\beta)\phi_1+\alpha\phi_2+\beta\phi_3=x\phi_1+y\phi_2+z\phi_3$$

ניתן לראות כי מתקיים $x-y+z=0$.

(ד) ניתן לראות שמתקיים: $\int_0^3 |f(t)-g(t)|^2\,dt = \langle f-g, f-g\rangle = \|f-g\|^2$
כלומר, נדרש למצוא $g(t)\in W$ כך שהמרחק הנ"ל יהיה מינימלי. זהו בדיוק ההיטל האורתוגונלי של f על W:

$$g = \langle f, e_1\rangle e_1 + \langle f, e_2\rangle e_2$$

$$\langle f, e_1\rangle = \left\langle \phi_1+\phi_3, \frac{\phi_1+\phi_2}{\sqrt{2}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle f, e_2\rangle = \left\langle \phi_1+\phi_3, \frac{-\phi_1+\phi_2+2\phi_3}{\sqrt{6}}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\phi_1+\phi_2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{-\phi_1+\phi_2+2\phi_3}{\sqrt{6}} = \frac{3(\phi_1+\phi_2)-\phi_1+\phi_2+2\phi_3}{6} = \frac{\phi_1+2\phi_2+\phi_3}{3}$$

$$\int_0^3 |f(t)-g(t)|^2\,dt = \|f-g\|^2 = \left\|\phi_1+\phi_3-\frac{\phi_1+2\phi_2+\phi_3}{3}\right\|^2 = \left\|\frac{2\phi_1-2\phi_2+2\phi_3}{3}\right\|^2 = \frac{4}{9}(1+1+1) = \frac{4}{3}$$

(ה)

$$\|u-v\| = \|(x_1\phi_1+y_1\phi_2+z_1\phi_3)-(x_2\phi_1+y_2\phi_2+z_2\phi_3)\| = \|(x_1-x_2)\phi_1+(y_1-y_2)\phi_2+(z_1-z_2)\phi_3\| =$$
$$= \sqrt{\langle [(x_1-x_2)\phi_1+(y_1-y_2)\phi_2+(z_1-z_2)\phi_3], [(x_1-x_2)\phi_1+(y_1-y_2)\phi_2+(z_1-z_2)\phi_3]\rangle} =$$
$$= \sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2+|z_1-z_2|^2}$$

זהו בדיוק המרחק בין הנקודות (x_1,y_1,z_1) ו- (x_2,y_2,z_2) ב- $\mathbb{R}^3$.

אם $u\in W$, ע"פ סעיף (ג) מתקיים: $x_1-y_1+z_1=0$. זהו ייצוג של <u>מישור</u> ב- $\mathbb{R}^3$.

(ו) הבעיה בסעיף (ד) מקבילה לבעיית מציאת <u>מרחק בין נקודה למישור</u>, כאשר f מייצגת את הנקודה $(1,0,1)$, ו- W הוא המישור, אשר משוואתו נתונה בסעיף (ה).

שאלה 3 :

$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, והמקדמים נתונים ע״י $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

בכל הסעיפים הבאים נניח $g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$, כאשר $\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx$.

(א) $g(x) = f(x)\cdot \sin x$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}e^{-inx}dx =$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(n-1)x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(n+1)x}dx\right] = \frac{c_{n-1}-c_{n+1}}{2i}$$

(ב) $g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt$, $-\pi \le x \le \pi$.

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{x} f(t)dt\right]e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{x} f(t)e^{-inx}dt\right]dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{t}^{\pi} f(t)e^{-inx}dx\right]dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\int_{t}^{\pi} e^{-inx}dx\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{t}^{\pi}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{e^{-in\pi}-e^{-int}}{-in}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{in}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt - (-1)^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\right] = \frac{c_n-(-1)^n c_0}{in}$$

(ג) $g(x) = f(x+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\lambda)e^{-inx}dx$$

$$t = x+\lambda$$
$$dt = dx$$
$$x=-\pi \ \rightarrow\ t = -\pi+\lambda$$
$$x=\pi \ \rightarrow\ t = \pi+\lambda$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\lambda}^{\pi+\lambda} f(t)e^{-in(t-\lambda)}dt = e^{in\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\lambda}^{\pi+\lambda} f(t)e^{-int}dt = e^{in\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = e^{in\lambda}c_n$$

(ד) $g(x) = f(Nx)$, $N \in \mathbb{N}$.

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(Nx)e^{-inx}dx$$

$$t = Nx$$
$$dt = Ndx$$
$$x=-\pi \ \rightarrow\ t = -N\pi$$
$$x=\pi \ \rightarrow\ t = N\pi$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi}^{N\pi} f(t)e^{-in\frac{t}{N}}\,\frac{dt}{N} = \frac{1}{N}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-N\pi}^{-N\pi+2\pi} f(t)e^{-in\frac{t}{N}}dt + \int_{-N\pi+2\pi}^{-N\pi+4\pi} f(t)e^{-in\frac{t}{N}}dt + \ldots + \int_{N\pi-2\pi}^{N\pi} f(t)e^{-in\frac{t}{N}}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi+2\pi(k-1)}^{-N\pi+2\pi k} f(t)e^{-i\frac{n}{N}t}dt$$

$$u = t - 2\pi(k-1)$$
$$du = dt$$
$$t = -N\pi + 2\pi(k-1) \;\rightarrow\; u = -N\pi$$
$$t = -N\pi + 2\pi k \;\rightarrow\; u = -N\pi + 2\pi$$

$$\gamma_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi -}\int_{-N\pi}^{-N\pi+2\pi} f(u+2\pi(k-1))e^{-i\frac{n}{N}(u+2\pi(k-1))}du = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi}^{-N\pi+2\pi} f(u)e^{-i\frac{n}{N}u}e^{-i\frac{n}{N}2\pi(k-1)}du =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi}^{-N\pi+2\pi} f(u)e^{-i\frac{n}{N}u}\left[\sum_{k=1}^{N} e^{-i\frac{n}{N}2\pi(k-1)}\right]du$$

עבור $n = Nz$, כאשר z טבעי:

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-i\frac{n}{N}2\pi(k-1)} = \sum_{k=1}^{N} e^{-iz2\pi(k-1)} = \sum_{k=1}^{N} 1 = N$$

$$\gamma_n = \frac{1}{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi}^{-N\pi+2\pi} f(u)e^{-i\frac{n}{N}u}N du = \frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi}^{-N\pi+2\pi} f(u)e^{-izu}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-izu}du = c_z = c_{n/N}$$

עבור $n \neq Nz$:

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-i\frac{n}{N}2\pi(k-1)} = 1 + e^{-i\frac{n}{N}2\pi} + \ldots + e^{-i\frac{n}{N}2\pi(N-1)} = \frac{1-e^{-i\frac{n}{N}2\pi N}}{1-e^{-i\frac{n}{N}2\pi}} = \frac{1-e^{-in2\pi}}{1-e^{-i\frac{n}{N}2\pi}} = 0$$

$$\gamma_n = 0$$

סה"כ: $\gamma_n = \begin{cases} c_{n/N} & n = Nk \\ 0 & n \neq Nk \end{cases}$ לכל k טבעי.

שאלה 4:

(א)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-|x|}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{-x}dx=\frac{2}{\pi}\left[-e^{-x}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(1-e^{-\pi}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-|x|}\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{-x}\cos nxdx$$

$$I=\int_0^{\pi}e^{-x}\cos nxdx=\underbrace{e^{-x}\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}}_{0}+\int_0^{\pi}e^{-x}\frac{\sin nx}{n}dx=\frac{1}{n}\left(e^{-x}\frac{-\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-x}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(e^{-\pi}\frac{-(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}I\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)I=\frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^ne^{-\pi}\right)$$

$$I=\frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\left(1-(-1)^ne^{-\pi}\right)=\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{n^2+1}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{n^2+1}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-|x|}\sin nxdx=0$$

האינטגרל האחרון מתאפס כי הפונקציה באינטגרל היא אי-זוגית.

(ב) מכיוון ש- $f(x)$ רציפה לכל $x\in[-\pi,\pi]$ ומתקיים $f\left((-\pi)+\right)=f\left(\pi-\right)$, ע״פ משפט דיריכלה, הטור פורייה של $f(x)$ מתכנס ל- $f(x)$ לכל $x\in[-\pi,\pi]$.
$s(x)$ היא ההרחבה המחזורית של $f(x)$ על כל הישר.

(ג) בנוסף לתנאים שמתקיימים בסעיף הקודם, מתקיים $f'(x)\in E$ (הנגזרת של $f(x)$ רציפה למקוטעין), ולכן $s(x)$ מתכנס במידה שווה.

(ד) ע״פ סעיף (ג):

$$f(x)=s(x)=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{n^2+1}\cos nx$$

נציב $x=0$:

$$f(0)=1$$

$$s(0)=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{n^2+1}=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}-\frac{2}{\pi}e^{-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

נציב $x=\pi$:

$$f(\pi)=e^{-\pi}$$

$$s(\pi)=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{n^2+1}(-1)^n=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}-\frac{2}{\pi}e^{-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

נסמן $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$, $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$.

$$\begin{cases} 1=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+\frac{2}{\pi}A-\frac{2}{\pi}e^{-\pi}B \\ e^{-\pi}=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+\frac{2}{\pi}B-\frac{2}{\pi}e^{-\pi}A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}(1-e^{-\pi})+A-e^{-\pi}B \\ \frac{\pi}{2}e^{-\pi}=\frac{1}{2}(1-e^{-\pi})+B-e^{-\pi}A \end{cases}$$

$$A=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(1-e^{-\pi})+e^{-\pi}B$$

$$\frac{\pi}{2}e^{-\pi}=\frac{1}{2}(1-e^{-\pi})+B-e^{-\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(1-e^{-\pi})+e^{-\pi}B\right)$$

$$\frac{\pi}{2}e^{-\pi}=\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{2}e^{-\pi}}+B-\frac{\pi}{2}e^{-\pi}+\cancel{\frac{1}{2}e^{-\pi}}-\frac{1}{2}e^{-2\pi}-e^{-2\pi}B$$

$$\pi e^{-\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\pi}+(1-e^{-2\pi})B$$

$$2\pi e^{\pi}=e^{2\pi}-1+2(e^{2\pi}-1)B$$

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}=\frac{1+2\pi e^{\pi}-e^{2\pi}}{2(e^{2\pi}-1)}$$

$$A=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(1-e^{-\pi})+e^{-\pi}\frac{1+2\pi e^{\pi}-e^{2\pi}}{2(e^{2\pi}-1)}=\frac{\pi-1+e^{-\pi}}{2}+\frac{e^{-\pi}+2\pi-e^{\pi}}{2(e^{2\pi}-1)}=$$

$$=\frac{(\pi-1+e^{-\pi})(e^{2\pi}-1)+e^{-\pi}+2\pi-e^{\pi}}{2(e^{2\pi}-1)}=\frac{\pi e^{2\pi}-\pi-e^{2\pi}+1+\cancel{e^{\pi}}-\cancel{e^{-\pi}}+\cancel{e^{-\pi}}+2\pi-\cancel{e^{\pi}}}{2(e^{2\pi}-1)}=$$

$$=\frac{(\pi-1)e^{2\pi}+\pi+1}{2(e^{2\pi}-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{(\pi-1)e^{2\pi}+\pi+1}{2(e^{2\pi}-1)}$$