פתרון דף תרגילים מס. 4
בטורי פורייה והתמרות אינטגרליות
<u>התמרת לפלס</u>

1. תהיינה נתונות $x>0 \quad g(x)=\frac{sin^2(x)}{x^2}, \quad f(x)=\frac{sin(x)}{x}$. נסמן את התמרות לפלס של שתי פונקציות אלו ב- $F(s)$ וב- $G(s)$, בהתאמה.

(א) ללא חישוב $F(s)$ ו- $G(s)$ למצוא a כך ששתי ההתמרות האלו קיימות לכל $a<s$.

תשובה: $a=0$ מכיוון ששתי הפונקציות חסומות ע״י 1, כלומר שתיהן מקיימות את אי השוויון $|f(x)|\le 1e^{0x}$, $|g(x)|\le 1e^{0x}$ לכל $x>0$, וכפי שהוכחנו, התמרת לפלס של $f(x)$ קיימת לכל $s>a$ אם היא מקיימת $|f(x)|\le Ke^{ax}$ לכל $x>0$ עבור Kחיובי מתאים.

(ב) לחשב את $F'(s)$ ואת $G''(s)$ וע״י אינטגרציות של שתיהן למצוא את $F(s)$ ואת $G(s)$. (רמז: להיעזר בכך שהגבולות של $F(s),\ G(s),\ G'(s)$ באין-סוף הם 0).

פתרון: לפי אחת מתכונות תמורת לפלס

$$\mathcal{L}[x^n f(x)](s)=(-1)^n F^{(n)}(s), \quad F(s)=\mathcal{L}[f](s),$$

ומכיוון ש- $xf(x)=sinx$ ו- $x^2g(x)=sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ נסיק ש-

$$F'(s)=-\mathcal{L}[xf(x)](s)=-\mathcal{L}[sinx](s)=-(s^2+1)^{-1}$$

וכן

$$G''(s)= \mathcal{L}[x^2g(x)](s)=\tfrac{1}{2}\mathcal{L}[1-cos2x](s)=\tfrac{1}{2}\{(1/s)-s/(s^2+4)\}.$$

אינטגרציה של $F'(s)$ נותנת:

$$F(s)=-arctan(s)+C\to-\tfrac{1}{2}\pi+C, \quad as \quad s\to\infty$$

ומכיוון שהגבול הזה חייב להיות 0, נסיק ש- $C=\frac{1}{2}\pi$ ובהתאם לכך

$$F(s)=\mathcal{L}[sin(x)/x](s)=\tfrac{1}{2}\pi-arctans.$$

באופן דומה מוצאים ש-

$$G'(s)=\tfrac{1}{2}\{ln(s)-\tfrac{1}{2}ln(s^2+4)\}+C\to 0+C, \ as \quad s\to\infty,$$

כלומר $C=0$ ולפיכך $G'(s)=\frac{1}{2}\{ln(s)-\frac{1}{2}ln(s^2+4)\}$ ובאינטגרציה נוספת:

$$G(s)=\tfrac{1}{2}slns-\tfrac{1}{4}sln(s^2+4)-arctan(s/2)+C\to-\tfrac{1}{2}\pi+C, \quad as \quad s\to\infty$$

ולכן שוב $C=\frac{1}{2}\pi$ ולפיכך

$$G(s)=\mathcal{L}[sin^2(x)/x^2](s)=\tfrac{1}{4}sln[s^2/(s^2+4)]-arctan(s/2)+\tfrac{1}{2}\pi$$

(ג) לחשב את שני האינטגרלים המוכללים

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{sin^2(x)}{x^2}dx,$$

ע״י שימוש בפתרון של חלק (ב) של התרגיל.

פתרון:

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x}dx=\mathcal{L}[\frac{sin(x)}{x}](0)=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{sin^2(x)}{x^2}dx=\mathcal{L}[\frac{sin^2(x)}{x^2}](0)=\frac{\pi}{2}$$

2. (א) לחשב את התמרת לפלס של פונקצית החלק השלם $f(x)=[x]$ ושל $g(x)=(-1)^{[x]}$ (רמז: בטאו את $f(x)$ ו- $g(x)$ כטור מתאים של פונקציות הביסייד $(u_n(x)$.

<u>פתרון:</u> מידית מקבלים את הזהויות:

$$f(x)=[x]=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x), \qquad x\geq 0,$$

$$g(x)=(-1)^{[x]}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k(x), \quad x\geq 0$$

ומכיון שהתמרת לפלס של $u_a(x)$ היא e^{-as}/s נקבל:

$$\mathcal{L}[[x]](s)=\mathcal{L}[\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)](s)=\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ks}=\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}=\frac{1}{s(e^s-1)}, \qquad s>0.$$

$$\mathcal{L}[(-1)^{[x]}](s)=\mathcal{L}[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k(x)](s)=\frac{1}{s}\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-ks}\}=$$

$$=\frac{1}{s}\{1-2\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}}\}=\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}=\frac{tanh(s/2)}{s}, \qquad s>0.$$

(ב) לחשב את התמרת לפלס של $f(x)=exp(-x^2)$ (לבטא אותה באמצעות פונקצית השגיאה $err(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2}dt$) ולקבוע מהו תחום ההגדרה של ההתמרה של פונקציה זאת.

<u>פתרון:</u> תמורת לפלס של פונקציה זאת קיימת לכל ערך של s והיא נתונה ע״י

$$\mathcal{L}[exp(-x^2)](s)=\int_0^\infty exp(-x^2-sx)\,dx=\int_0^\infty exp(-(x+s/2)^2+s^2/4)\,dx=$$

$$=exp(s^2/4)\int_{s/2}^{\infty} exp(-t^2)\,dt=$$

$$=[\int_{-\infty}^{\infty} exp(-t^2)\,dt-\int_{-\infty}^{s/2} exp(-t^2)\,dt]exp(s^2/4)=$$

$$=\sqrt{\pi}[1-err(s/2)]exp(s^2/4)$$

3. למצוא את הפתרונות של המשוואות הבאות המקיימים את תנאי ההתחלה המצורפים, תוך שימוש בהתמרת לפלס:

$$i)\quad y''-3y'+2y=(x-[x])e^x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-1.$$

פתרון: ע"פ תכונת התמרת לפלס:

$$\mathcal{L}[y^{(n)}](s)=s^n\mathcal{L}[y](s)-y(0)s^{n-1}-y'(0)s^{n-2}-\ldots-y^{(n-1)}(0)$$

נקבל:

$$\mathcal{L}[y''-3y'+2y](s)=(s^2-3s+2)\mathcal{L}[y](s)+1=\mathcal{L}[(x-[x])e^x](s)$$

ולפיכך:

$$\mathcal{L}[y](s)=-\frac{1}{s^2-3s+2}+\frac{\mathcal{L}[(x-[x])e^x](s)}{s^2-3s+2}=$$

$$=(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1})(-1+\mathcal{L}[(x-[x])e^x](s)=$$

$$=\mathcal{L}[e^x-e^{2x}+(e^{2x}-e^x)*(x-[x])e^x](s)$$

ועל כן

$$y(x)=e^x-e^{2x}+\int_0^x(t-[t])e^t\left(e^{2(x-t)}-e^{x-t}\right)dt=$$

$$=e^x(1-\int_0^x(t-[t])\,dt)-e^{2x}(1-\int_0^x(t-[t])\,e^{-t}dt)=$$

$$=e^x(1-\frac{1}{2}[x]-\frac{1}{2}(x-[x])^2)-e^{2x}(\frac{1-e^{-[x]}}{e-1}+(x-[x]+1)e^{-x})=$$

$$=e^x\frac{[x]-2x-(x-[x])^2}{2}-e^{2x}\frac{1-e^{-[x]}}{e-1}$$

$$ii)\quad y''+\pi^2 y=(-1)^{[x]}, \qquad y(0)=y'(0)=0.$$

פתרון:

$$(s^2+\pi^2)\mathcal{L}[y](s)=\mathcal{L}[(-1)^{[x]}](s)$$

ובהתאמה

$$\mathcal{L}[y](s)=\frac{\mathcal{L}[(-1)^{[x]}](s)}{s^2+\pi^2}=\frac{1}{\pi}\mathcal{L}[sin(\pi x)*(-1)^{[x]}](s)$$

ומכך נקבל

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^x sin\pi(x-t)(-1)^{[t]}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\{\sum_{k=1}^{[x]}(-1)^{k-1}\int_{k-1}^{k} sin\pi(x-t)\,dt+(-1)^{[x]}\int_{[x]}^{x} sin\pi(x-t)\,dt\}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\{(-1)^{[x]}-(2[x]+1)\,cos\pi x\}$$

$$iii)\quad y''+2y'+5y=\delta_\pi(x)-\delta_{2\pi}(x), \qquad y(0)=y'(0)=0.$$

פתרון:

$$(s^2+2s+5)\mathcal{L}[y](s)=e^{-\pi s}-e^{-2\pi s},$$

ולהתאמה

$$\mathcal{L}[y](s)=\frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{(s+1)^2+4}=(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s})\mathcal{L}[\frac{1}{4}e^{-x}\,sin2x](s)=$$

$$=\frac{1}{4}\mathcal{L}[u_\pi(x)\,e^{-(x-\pi)}\,sin2(x-\pi)-u_{2\pi}(x)\,e^{-(x-2\pi)}\,sin2(x-2\pi)](s),$$

ולכן

$$y(x)=\tfrac{1}{4}e^{-x}sin(2x)\{u_\pi(x)\,e^{\pi}-u_{2\pi}(x)\,e^{2\pi}\}.$$

$$iv)\quad y'''-8y=\chi_{[\pi,2\pi]}(x), \quad y(0)=y'(0)=0, \quad y''(0)=-1$$

כאשר $\chi_{[\pi,2\pi]}(x)=\{1,\ \pi\le x\le 2\pi;\quad 0,\ x\notin[\pi,2\pi]\}$.

פתרון:

$$(s^3-8)\mathcal{L}[y](s)+1=\mathcal{L}[u_\pi-u_{2\pi}](s)=(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s})/s$$

ולפיכך

$$\mathcal{L}[y](s)=-\frac{1}{s^3-8}+\frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s(s^3-8)}=$$

$$=-\frac{1}{12}\{\frac{1}{s-2}-\frac{(s+1)+3}{(s+1)^2+3}\}+\frac{1}{24}(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s})\{-\frac{3}{s}+\frac{1}{s-2}+\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+3}\}$$

ובהתאם לכך

$$y(x)=-\frac{1}{12}\{e^{2x}-e^{-x}(cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}sin\sqrt{3}x)\}+$$

$$+\frac{1}{24}u_{\pi}(x)\{-3+e^{2(x-\pi)}+2e^{-(x-\pi)}cos\sqrt{3}(x-\pi)\}-$$

$$-\frac{1}{24}u_{2\pi}(x)\{-3+e^{2(x-2\pi)}+2e^{-(x-2\pi)}cos\sqrt{3}(x-2\pi)\}$$

$v)$ $y'''-y''+4y'-4y=68e^x sin(2x),\ y(0)=1,\ y'(0)=-19,\ y''(0)=-37.$

פתרון:

$$(s^3-s^2+4s-4)\mathcal{L}[y](s)-s^2+20s+14=136/\{(s-1)^2+4\}$$

ומכאן

$$\mathcal{L}[y](s)=\frac{s^2-20s-14}{(s-1)(s^4+4)}+\frac{136}{(s-1)(s^2+4)\{(s+1)^2+4\}}=$$

$$=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+4}+\frac{Ds+E}{(s+1)^2+4}$$

כאשר את חמשת המקדמים מוצאים ע״י השוואת מקדמים ובהתאמה:

$$y(x)=Ae^x+Bcos(2x)+\tfrac{1}{2}Csin(2x)+De^{-x}cos(2x)+\tfrac{1}{2}(E-D)e^{-x}sin(2x)$$

4. למצוא את הפתרונות של המשוואות האינטגרליות הבאות:

$i)$ $f(x)-2\int_0^x f(t)sin(2x-2t)\,dt=e^{-x}$, $f(x)=-4+4x+5e^{-x}$

$ii)$ $f(x)-\frac{1}{6}\int_0^x f(t)(x-t)^3=cos(x)$, $f(x)=\frac{1}{4}sinx+\frac{1}{8}sinhx+\frac{1}{16}coshx$

$iii)$ $\int_0^x f'(x-t)f(t)\,dt=x-cos(x)-\frac{1}{2}xsin(x),\ f(0)=0,\ f'(0)<0$

$$f(x)=-1+cosx$$

$iv)$ $\int_0^x f(t)\sqrt{x-t}\,dt=x-x^2+x^3$, $f(x)=\frac{2(1-4x+8x^2)}{\pi\sqrt{x}}$

5. תהי $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה למקוטעין שהתמרת לפלס של $F(s)$ מוגדרת גם כפונקציה של משתנה מרוכב.

(א) להוכיח את הזהויות הבאות:

$$\mathcal{L}[cos(ax)f(x)](s)=Re\{F(s-ia)\}$$

$$\mathcal{L}[sin(ax)f(x)](s)=Im\{F(s-ia)\}$$

עבור קבוע חיובי כלשהו a.

פתרון:

$$\mathcal{L}[e^{iax}f(x)](s)=\int_0^\infty f(x)e^{iax-sx}dx=\mathcal{L}[f(x)](s-ia)$$

ומאחר שלפי הנתון $f(x)$ ממשית לכל $x>0$ הזהויות הנ"ל נובעות מיידית

(ב) לחשב את התמרות לפלס של $\frac{sin(x)}{\sqrt{x}}, \frac{cos(ax)}{\sqrt{x}}$ עבור קבוע חיובי כלשהו a.

(להיעזר בחלק הקודם, עבור $f(x)=x^{-1/2}$, בהכרת התמרת לפלס של פונקציה זאת וביטוי אלגברי של השורש הריבועי של המספר המרוכב $s+ia$ הנמצא ברביע הראשון של המישור המרוכב (כלומר, למצוא $u+iv$ עם $u>0,\ v>0$ המקיים את המשוואה $(u+iv)^2=s+ia$ עבור $s>0,\ a>0$).

פתרון:

$$\mathcal{L}[\frac{cosx}{\sqrt{x}}](s)=Re\mathcal{L}[\frac{1}{\sqrt{x}}](s-ia)=Re\sqrt{\frac{\pi}{s-ia}}=\sqrt{\frac{\pi}{s^2+a^2}}Re\sqrt{s+ia}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi(\sqrt{s^2+a^2}+s)}{2(s^2+a^2)}}$$

$$\mathcal{L}[\frac{sinx}{\sqrt{x}}](s)=Im\mathcal{L}[\frac{1}{\sqrt{x}}](s-ia)=Im\sqrt{\frac{\pi}{s-ia}}=\sqrt{\frac{\pi}{s^2+a^2}}Im\sqrt{s+ia}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi(\sqrt{s^2+a^2}-s)}{2(s^2+a^2)}}$$

(ג) לחשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^\infty \frac{cos(ax)}{\sqrt{x}}dx, \quad \int_0^\infty \frac{sin(ax)}{\sqrt{x}}dx, \quad \int_0^\infty cos(t^2)dt, \quad \int_0^\infty sin(t^2)dt$$

פתרון:

$$\int_0^\infty \frac{cosax}{\sqrt{x}}dx=\mathcal{L}[\frac{cosax}{\sqrt{x}}](0)=\sqrt{\frac{\pi}{2a}},$$

$$\int_0^\infty \frac{sinax}{\sqrt{x}}dx=\mathcal{L}[\frac{sinax}{\sqrt{x}}](0)=\sqrt{\frac{\pi}{2a}},$$

$$\int_0^\infty cos(t^2)\,dt=\int_0^\infty cos(x)\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty sin(t^2)\,dt=\int_0^\infty sin(x)\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$