טורי פוריה והתמרות אנטגרליות -- 104214

פתרונות לתרגילים , חורף תשס"ד

עבור $f \in G$,

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega}dx$$

זה התמרת פוריה של f.

<u>שאלה 1:</u> נתון $f, f' \in G$, ו- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

א. נתון $F(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^4}$, חשב $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

ב. נתון $F(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^4}$, חשב $f'(0)$ (בטא את התשובה בצורה אינטגרלית).

ג. נתון $F(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|^3}$, חשב $\int_{-\infty}^{\infty} |f*f'|^2(x)dx$, כאשר $*$ מסמן קונוולוציה.

<u>פתרון:</u>

א.

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 2\pi i\frac{d}{d\omega}\left(F(\omega)\right)|_{\omega=0}=2\pi i$$

ב.

$$f'(0)=\int_{-\infty}^{\infty} F(f')(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega^2}{1+\omega^4}d\omega$$

ג.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f*f'|^2(x)dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|F(f*f')|^2(\omega)d\omega=(2\pi)^3\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^4(\omega)\omega^2d\omega=\frac{16\pi^3}{9}$$

<u>שאלה 2:</u>

א. חשב

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx.$$

ב. חשב

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx.$$

ג. תהי

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\sin(a(x-y))}{\pi(x-y)}dy, \quad 0<a.$$

חשב את התמרת פוריה של g.

ד. הראה

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ay)}{(y)}\frac{\sin(x-y)}{(x-y)}dy=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & 1\le a\\ \frac{\sin(ax)}{x}, & 0<a\le 1\end{cases}$$

על מנת לפתור תרגילים אלו יש לחשב את התמרת פוריה של

$$P_a(x)=\begin{cases}1, & |x|\le a\\ 0, & a<|x|\end{cases}$$

ו-

$$.Q_a(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{a}, & 0\le x\le a\\ 1+\frac{x}{a}, & -a\le x<0\\ 0, & a<|x|\end{cases}$$

<u>**פתרון:**</u> תחילה נחשב

$$F(P_a)(\omega)=\frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega}$$

ו-

$$.F(Q_a)(\omega)=\frac{2\sin^2(\frac{a\omega}{2})}{a\pi\omega^2}$$

א.

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3\omega}{\omega^3}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q_2(x)P_1(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1(1-\frac{x}{2})dx=\frac{3}{\pi 4}$$

ב.

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4\omega}{\omega^4}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q_2^2(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^2(1-\frac{x}{2})^2dx=\frac{4}{\pi}$$

ג. נציב $f(x)=\frac{\sin(ax)}{x}$ ו- $h(x)=\frac{\sin(x)}{x}$, אז $F(f)(\omega)=\frac{1}{2}P_a(\omega)$, $F(f)(\omega)=\frac{1}{2}P_1(\omega)$ ו- $g(x)=\frac{1}{\pi}(f*h)(x)$. לכן

$$F(g)=2F(f)F(h)=\begin{cases}\frac{1}{2}P_1, & 1\le a\\ \frac{1}{2}P_a, & 0<a\le 1\end{cases}$$

על ידי העתקה הפוכה נקבל את התוצאה.

שאלה 3:

נתונה פונקציה $u(x,t)$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר שני רציפות עבור כל (x,t). הפונקציה u מקיימת $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ ו- $u(x,0) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$. מצא את $u(x,t)$.

פתרון:

נציב $f(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\omega}dx$ ו $\Phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. נשתמש בעובדות הבאות:
$F(\Phi)(\omega) = \sqrt{2\pi}\Phi(\omega)$, ו- $F(\Phi_a)(\omega) = \frac{1}{a}F(\Phi)(\frac{\omega}{a})$, כאשר $\Phi_a(x) = \Phi(ax)$ ו- $a > 0$.
המשוואה

$$u_t = u_{xx}$$

עוברת למשוואה

$$\frac{d}{dt} f(\omega,t) = -\omega^2 f(\omega,t).$$

פתרון המשוואה השניה הוא

$$f(\omega,t) = ce^{-t\omega^2},$$

כאשר

$$f(\omega,0) = c = F\left(\sqrt{\pi}\Phi_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2}.$$

לפיכך

$$f(\omega,t) = \sqrt{2\pi}e^{-(1+t)\omega^2},$$

ומכאן

$$F\left(\sqrt{\pi}\Phi_{\frac{1}{\sqrt{2(1+t)}}}\right)(\omega) = \sqrt{2(1+t)} f(\omega,t).$$

לכן

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2(1+t)}}\Phi_{\frac{1}{\sqrt{2(1+t)}}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+t)}}e^{-\frac{x^2}{4(1+t)}}.$$

שאלה 4:

נתונות $f,g \in G$ כך ש- $|f(x)| \le 1$, $|g(x)| \le \frac{M}{(1+|x|)^2}$, $g' \in G$ ו- $|g'(x)| \le \frac{M}{(1+|x|)^2}$ עבור כל x וכאשר $M > 0$. יהיו $\widehat{f}(\omega)$ ו- $\widehat{g}(\omega)$ התמרות פוריה של f ו- g בהתאמה. נניח ש $\widehat{f}$ ו $\omega\widehat{g}$ אינטגרביליות בהחלט. הפונקציה u מוגדרת על ידי

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega.$$

א. הוכח ש- u חסומה.

ב. הוכח ש- u' חסומה.

פתרון: נציג את הפתרון של סעיף ב. הפתרון של סעיף א. דומה.

$$u'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega\widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega\widehat{g}(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\omega}dy\right)e^{ix\omega}d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} i\omega\widehat{g}(\omega)e^{i(x-y)\omega}d\omega\right)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g'(x-y)dy$$

לכן

$$.|u'(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|g'(x-y)|dy \le \frac{M}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+|y-x|)^2}dy = \frac{M}{2}$$

שאלה 5:

יהי V מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $(-\infty,\infty)$, עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

וכך ש־

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx < \infty$$

עבור כל f ב־ V.

נתונה סדרת פונקציות

$$.n \in \mathbf{Z} \quad , \varphi_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\pi x}e^{inx}$$

א. הראה $\{\varphi_n\}$ מערכת אורתוגונלית ב־ V.

ב. מצא קבועים $\{c_n\}$ כך ש

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\varphi_n(x) \mid^2 dx$$

יהי מינימלי.

פתרון:

א. יהיו m n שלמים, $n \ne m$, אז

$$,\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\pi x}\right)^2 e^{ix(n-n)}dx = Q_1(n-m)$$

כאשר

$$,Q_a(t) = \begin{cases} 1-\frac{t}{a},\ 0\le t\le a \\ 1+\frac{t}{a},\ -a\le t<0 \\ 0,\ a<|t| \end{cases}$$

זאת על סמך החישוב של $F(Q_a)$ בשאלה 2. נשים לב ש $F(Q_a)$ אנטגרבילית בהחלט ו Q_a רציפה, לכן התמרת פוריה הפוכה מתכנסת בכל נקודה. מכיוון שעבור כל שני שלמים שונים n ו m מתקיים $|n-m|\ge 1$, אז

$$.\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle = \frac{1}{2\pi}Q_1(n-m) = 0$$

ב.

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\langle(\frac{1}{1+x^2}),\varphi_n\rangle$$

באמצעות נוסחת פלנשראל נקבל

$$.\|\varphi_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\pi x}\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}$$

$$\langle(\tfrac{1}{1+x^2}),\varphi_n\rangle = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\frac{sin(\frac{x}{2})}{\pi x}e^{-inx}dx$$

$$= 2\pi F\left(\tfrac{1}{1+x^2}\tfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\pi x}\right)(n) = 2\pi\left(F\left(\tfrac{1}{1+x^2}\right)*F\left(\tfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\pi x}\right)\right)(n)$$

$$= 2\pi\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|t|}\frac{1}{2\pi}P_{\frac{1}{2}}(n-t)dt = \frac{1}{2}\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}e^{-|t|}dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-|n|}(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}), & n\neq 0 \\ (1-e^{-\frac{1}{2}}), & n=0 \end{cases}$$

שאלה 6:

נתונה הפונקציה

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1+\omega^2}, & \omega\geq 0 \\ 0, & \omega<0 \end{cases}$$

א. הראה

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$$

מתכנס.

ב. האם קיימת $f\in G$ כך ש g היא התמרת פוריה שלה?

פתרון:

א.

$$.|\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega x}d\omega| \leq \int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2}$$

ב. לא! לכל $f\in G$, $F(f)$ פונקציה רציפה.

<u>שאלה 7:</u>

נתונות הפונקציות $f_1(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$, $f_2(x)=\frac{1}{b^2+x^2}$, כאשר $a,b>0$. חשב את הקונוולוציה $f_1*f_2(x)$.

<u>פתרון:</u> באמצעות התמרת פוריה והתמרה הפוכה מקבלים

$$f_1*f_2(x)=\frac{1}{2}\frac{a+b}{ab}\frac{1}{(a+b)^2+x^2}.$$