# תרגילים בטורי פורייה והתמרות אינטגרליות

# טורי פורייה

### סימסטר חורף 2003-2004

## הערות ורמזים לפתרון

**תרגיל 1:**

**א.** טור פורייה הממשי של הפונקציה

$$f(x)=3cos7x+2sin5x+7cos3x+sinx$$

הוא הפונקציה עצמה. כמו כן, ע"פ הזהויות:

$$2cosx=e^{ix}+e^{-ix}, \qquad 2isinx=e^{ix}-e^{-ix},$$

נובע מייד שטור פורייה המרוכב של $f(x)$ הוא:

$$f(x)=1.5e^{7ix}+1.5e^{-7ix}-ie^{5ix}+ie^{-5ix}+3.5e^{3ix}+3.5e^{-3ix}-0.5ie^{ix}+0.5ie^{-ix}.$$

**ב.**

$$f(x)=e^{-7ix}+e^{-4ix}+e^{ix}+3e^{5ix}+e^{6ix}=$$

$$cos7x-isin7x+cos6x+isin6x+3cos5x+3isin5x+cos4x-isin4x+cosx+isinx$$

**ג.**

$$f_b(x)\sim\frac{b}{\pi}+\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty}\frac{sinnb}{\pi n}e^{inx}=$$

$$=\frac{b}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2sinnb}{\pi n}cosnx$$

**ד.**

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}e^{(1-in)x}\,dx=\left.\frac{e^{(1-in)x}}{2\pi(1-in)}\right|_0^{\pi}=\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{2\pi(1-in)}$$

ולפיכך

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{2\pi(1-in)}e^{inx}=\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{\pi(1+n^2)}cos\,nx+\frac{n((-1)^n e^{\pi}-1)}{\pi(1+n^2)}sinnx\right]$$

**תרגיל 2:**

**א.**

$$g(x)=f(x)\,sinx\sim\frac{1}{2i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(c_{n+1}-c_{n-1})\,e^{inx}$$

מכיוון ש-

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,sinx\;e^{inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{e^{i(n+1)x}-e^{i(n-1)x}}{2i}dx=\frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{2i}.$$

**ב.**

$$g(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt = c_0(x+\pi)+\sum_{\substack{n\neq 0\\ n=-\infty}}^{\infty}\frac{c_n}{in}(e^{inx}-(-1)^n)=$$

$$=[c_0\pi-\sum_{\substack{n\neq 0\\ n=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^n c_n}{in}]+\sum_{\substack{n\neq 0\\ n=-\infty}}^{\infty}\frac{c_n-(-1)^n c_0}{in}e^{inx}$$

כאשר במעבר מהשורה הראשונה לשניה משתמשים בפיתוח $x$ לטור פורייה.

ג. מהמחזוריות נובע ש- $f(-\pi)=f(\pi)$ ולכן מקבלים:

$$g(x)=f'(x)\sim\sum_{\substack{n\neq 0\\ n=-\infty}}^{\infty} inc_n e^{inx}$$

**ד.**

$$g(x)=f(x+\lambda)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}(c_n e^{in\lambda})e^{inx}$$

**ה.**

$$g(x)=f(Nx)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inNx}$$

**ו.** ע"פ זהות פרסבאל המוכללת

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)\,dx=\langle f,x\rangle=\sum_{\substack{n\neq 0\\ n=-\infty}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{in}c_n$$

כאשר מצד אחד הצמוד המרוכב של פונקציה הממשית $g(x)=x$ הוא הפונקציה הזאת עצמה, ומצד שני הצמוד המרוכב של מקדם פורייה ה- $n$-י שלה הוא $(-1)^n/in$.

**ז.** כאשר $0<b<\pi$ אזי לפי חלק ג. בתרגיל 1 מקבלים:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=\langle f,f_b\rangle=\frac{b}{\pi}c_0+\sum_{\substack{n\neq 0\\ n=-\infty}}^{\infty}\frac{sinnb}{\pi n}c_n$$

**ח.** ע"י חישוב דומה לזה שבחלק ד. של תרגיל 1 מוצאים שמקדמי פורייה של $g(x)$ ביחס למערכת המרוכבת הם:

$$\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1-in)}=\frac{(-1)^n sinh\pi}{\pi(1-in)}$$

ובהתאם לכך

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x f(x)\,dx=\langle f,e^x\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n sinh\pi}{\pi(1+in)}c_n$$

**ט.** כאן נשתמש בחלקים ג. ד. של תרגיל זה:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x+\lambda)}f'(x)\,dx=\langle f',f(x+\lambda)\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}ine^{-in\lambda}|c_n|^2 .$$

**תרגיל 3:**

א. הטור הנתון $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sinkx}{\sqrt{k}}$ מתכנס נקודתית בכל הקטע $[-\pi,\pi]$, כי בנקודה $x=0$ זהו טור של אפסים, ועבור כל $x$ שונה מאפס הוא מקיים את תנאי קריטריון ההתכנסות של אבל-דיריכלה, לפיהם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k$ מתכנס כאשר הסדרה $\{a_k\}$ מונוטונית יורדת שואפת לאפס ואילו הסדרה $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ היא סדרה חסומה, כאשר במקרה שלנו $a_k=1/\sqrt{k}$ היא אכן סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס ואילו

$$|B_n|=|\sum_{k=1}^{n}sinkx|=|\frac{sin(\frac{1}{2}x)-sin(n+\frac{1}{2})x}{2sin(\frac{1}{2}x)}|\le\frac{1}{|sin(\frac{1}{2}x)|}\le\frac{1}{|sin(\frac{1}{2}\delta)|}=M$$

עבור כל נקודה $x$ ב- $\{x|\ \ \delta<|x|<\pi\}$ עבור כל $0<\delta$. בהתאמה הטור הנתון אפילו מתכנס במידה שווה ב- $\{x|\ \ \delta<|x|<\pi\}$ עבור כל $0<\delta$.

**ב.** אין אף פונקציה $f(x)$ במרחב $E$ שהטור בחלק א. עשוי להיות טור פורייה שלה כי אילו הייתה פונקציה כזאת אזי ע"פ זהות פרסבאל היינו מקבלים

$$\|f\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty .$$

העובדה שאין כזאת פונקציה ב- $E$ שהטור של חלק א. הוא טור פורייה שלה אינה מהווה סתירה לכך שטור זה מתכנס נקודתית, מפני שהפונקציה $f(x)$ שהטור מתכנס אליה אמנם רציפה מחוץ לקרבת $x=0$, אך באפס אין לה אף אחד מהגבולות החד צדדיים, כך שבאפס יש לה אי-רציפות גרועה מנקודת קפיצה ולפיכך היא איננה שייכת ל- $E$.