תרגילים בטורי פורייה
מרחבי מכפלה פנימית ומערכות אורתונורמליות
סימסטר חורף 2003-2004
הערות ורמזים לפתרון

1. יהי $U=span\{1,x,x^2,x^3\}$ מעל הממשים. אם במרחב הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[-1,1]$ מוגדרת "מכפלה" ע"י:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

א. לבדוק שזאת מכפלה פנימית במרחב זה

<u>הערה:</u> פרט לבדיקת שלוש הדרישות שבהגדרת המכפלה הפנימית, שהיא ישירה ופשוטה, יש עוד קודם לכן לוודא שהאינטגרל הנ"ל אכן מוגדר עבור כל שתי פונקציות ממשיות רציפות, שכן זהו אינטגרל שנראה כאינטגרל לא אמיתי (לפי המינוח של חדו"א 1) כאשר $f(x),g(x)$ אינן מתאפסות בקצוות הקטע. אך כשמציבים בתוך האינטגרל $x=cos(t)$ נוכחים שהפונקציה בפנים האינטגרל היא פונקציה רציפה בכל קטע האינטגרציה, ולפיכך האינטגרל מוגדר ובהתאם לכך אכן מגדיר מכפלה פנימית בכל מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[-1,1]$.

ב. למצוא ב- U פונקציה $g(x)$ המקטינה למינימום את ערך האינטגרל:

$$\int_{-1}^{1}\frac{(x+|x|-g(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ופונקציה $h(x)$ שעבורה מתקבל המינימום של האינטגרל:

$$\int_{-1}^{1}\frac{(x^5-x^2+2+h(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\ .$$

<u>הסבר:</u> במקרה הראשון יש למצוא את ההיטל האורתוגונלי של $x+|x|$ על U ובשני את ההיטל האורתוגונלי של $-x^5+x^2-2$. בכל מקרה נדרשים למצוא בסיס אורתונורמלי לתת המרחב U הנפרש ע"י $1,x,x^2,x^3$. זאת עושים כמובן בעזרת תהליך גרם-שמידט. הביצוע של התהליך בידיכם. שימו לב ששנים מארבעת איברי הבסיס האורתונורמלי $e_1(x),e_2(x),e_3(x),e_4(x)$ יהיו פונקציות זוגיות והשניים האחרים פונקציות אי-זוגיות.

כמו כן כדאי לשים שבפונקציה הראשונה $x+|x|$, החלק x כבר שייך ל- U כך שהוא הקירוב הכי טוב של עצמו, ולכן אם נסמן $g(x)=x+g_1(x)$, אזי $g_1(x)$ נדרשת להיות הקירוב הטוב ביותר ל- $|x|$ בנורמה, כלומר, $g_1(x)$ צריכה להיות ההיטל האורתוגונלי של $|x|$ על U. מאותו שיקול, החלק x^2-2 בפונקציה השניה $-x^5+x^2-2$ כבר שייך ל- U ולפיכך $h(x)=x^2-2-h_1(x)$ כאשר $h_1(x)$ היא ההיטל האורתוגונלי של x^5 על U.

והערה אחרונה: מכיוון ש- $|x|$ פונקציה זוגית, היטלה האורתוגונלי ב- U הוא זוגי ומאחר ש- x^5 אי-זוגית, היטלה ב- U הוא אי זוגי. בהתאם לכך, אם בבסיס האורתונורמלי של U $e_1(x),e_3(x)$ הן זוגיות ו- $e_2(x),e_4(x)$ הן אי-זוגיות, אזי:

$$g_1(x)=<|x|,e_1>e_1(x)+<|x|,e_3>e_3(x),\quad h_1(x)=<x^5,e_2>e_2(x)+<x^5,e_4>e_4(x).$$

ג. להראות שקיימת סדרת קבועים $\{c_n\}_{n=0,1,2,...}$ כך שסדרת הפונקציות $\{c_n cos(narcosx)\}_{n=0,1,2,...}$ יוצרת מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית שלעיל ולמצוא את הקבועים c_n. למצוא במפורש את ארבע הפונקציות הראשונות (עבור $n=0,1,2,3$) במערכת זאת ולהראות שהן מהוות בסיס אורתונורמלי של תת המרחב U.

<u>הסבר:</u> עבור כל שני מספרים טבעיים n,m נקבל ע"י ההצבה $x=cos(t)$:

$$\int_{-1}^{1}\frac{cos(narcosx)\,cos(marcosx)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{0}^{\pi}cos(nt)\,cos(mt)\,dt$$

ומזהויות טריגונומטריות ידועות נובע שהאינטגרל מימין שווה לאפס בכל מקרה ש- m,n שונים זה מזה. מצד שני אם $m=n=0$ האינטגרל הנ"ל שווה ל- π ואילו עבור $1\leq m=n$ האינטגרל הנ"ל שווה ל- $\pi/2$. מכאן, בעזרת תנאי הנירמול אפשר לחשב את הקבועים c_n.

מזהויות טריגונומטריות בסיסיות מוצאים ש-

$cos(0arcosx)=1,\qquad cos(arcosx)=x,\qquad cos(2arcosx)=2x^2-1,$

$cos(3arcosx)=4x^3-3x$

ומייד נוכחים שארבעתם שייכים ל- U ומאחר שהם מהווים מערכת אורתוגונלית, הם בת"ל ולפיכך הם מהווים בסיס אורתוגונלי של U, ולאחר נירמול מקבלים מהם בסיס אורתונורמלי עבור U.

2. א. במרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין על הקטע $[0,1]$ עם המכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

נתונה סדרת הפונקציות $\{\varphi_n\}$, כאשר

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n(n+1)}, & \frac{1}{n+1}\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0, & x\notin[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\end{cases}\qquad n=1,2,3,...$$

לקבוע האם סדרה זאת מתכנסת נקודתית לגבול כלשהו בקטע $[0,1]$ והאם היא מתכנסת בנורמה לאותו גבול?

<u>הסבר:</u> מכיוון שכל נקודה x בקטע $[0,1]$ שייכת לכל היותר לשני קטעים מסדרת הקטעים $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$, יש לכל היותר שתי פונקציות מהסדרה $\varphi_n(x)$ שאינן מתאפסות בנקודה x ולכן נובע מייד שסדרת הפונקציות הללו שואפת נקודתית לאפס בכל נקודה בקטע $[0,1]$. מצד שני, על פי הגדרת הנורמה במרחב הנתון נקבל:

$$\|\varphi_n-0\|^2=\int_0^1\varphi_n^{\,2}(x)dx=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}n(n+1)\,dx=1$$

מה שמוכיח שסדרת פונקציות אלו איננה שואפת ל-0 בנורמה הנ"ל.

ב) הקטע $[0,1]$ מכוסה ע"י הקטעים $[a_j,b_j]$, כאשר עבור j טבעי, $2^n-1\leq j<2^{n+1}-1$ נקבע ש $a_j=(j-2^n+1)2^{-n}$ ו- $b_j=a_j+2^{-n}$. נתבונן בסדרת הפונקציות $\{\chi_j\}$ המוגדרות כך:

$$\chi_j(x)=\begin{cases}1, & a_j\leq x\leq b_j\\ 0, & x\notin[a_j,b_j]\end{cases}.$$

לקבוע האם סדרה זאת מתכנסת נקודתית לגבול כלשהו בקטע $[0,1]$ והאם היא מתכנסת בנורמה לגבול כלשהו?

<u>הסבר</u>: הפעם, כל נקודה x שייכת לאין סוף מהקטעים הנ"ל ואינה שייכת לאין סוף קטעים אחרים מהם, ולפיכך על כל נקודה x יש תת-סדרה של הפונקציות הנ"ל שכולן שוות ל- 1 ב x ויש תת-סדרה אחרת של הפונקציות הנ"ל שכולן שוות ל- 0 ב- x. בהתאם לכך, סדרת הפונקציות הזאת אינה שואפת לגבול בשום נקודה. מצד שני, עבור j טבעי כלשהו, יהי n שעבורו $2^n-1\leq j<2^{n+1}-1$ נקבל:

$$\left\|\chi_j\right\|^2=\int_0^1\chi_j(x)^2dx=b_j-a_j=2^{-n}$$

וכאשר $j\to\infty$ גם $n\to\infty$ ונוכחים שסדרת הפונקציות הללו שואפת ל- 0 בנורמה.

ג) מה המסקנה שניתן להסיק מסעיפים א,ב ביחס לקיום או אי-קיום קשר בין התכנסות נקודתית והתכנסות בנורמה?

<u>שבאופן כללי אין קשר בין התכנסות נקודתית להתכנסות בנורמה!!!</u>

3. תהי $\{u_n\}$ מערכת אורתוגונלית סגורה במרחב מכפלה פנימית כלשהו, כאשר $\|u_n\|=\sqrt{n(n+1)}$ לכל n טבעי. יהיו f,g שני איברים באותו מרחב המקיימים $<f,u_n>=n2^{-n}$ ו- $<g,u_n>=(n+1)2^{-n}$. לחשב את $||f-g||$ ואת $<f,g>$.

<u>פתרון</u>: מנרמלים את המערכת הנתונה ע"י $e_n=u_n/||u_n||$ ובהתאמה מקבלים

$$\left\langle f,e_n\right\rangle=\frac{n2^{-n}}{\sqrt{n(n+1)}},\qquad \left\langle g,e_n\right\rangle=\frac{(n+1)2^{-n}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

מכיוון שהמערכת סגורה, מתקיימת זהות פרסוול ולפיכך:

$$\|f-g\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle f-g,e_n\right\rangle^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-(n+1))^2}{n(n+1)}2^{-2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-2n}}{n(n+1)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)4^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{-n}}{n}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{-(n+1)}}{n+1}=-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{-n}}{n}+1=$$

$$=1-3ln(4/3)=0.1369537826...$$

ולפיכך $||f-g||=0.3700726721$.

לשם חישוב המכפלה הפנימית $<f,g>$ נשתמש בזהות פרסוול המוכללת שלפיה:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,e_n\rangle\overline{\langle g,e_n\rangle}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-2n}=\frac{1}{3}$$

4. יהי V אוסף כל הפונקציות המרוכבות והרציפות $f:[0,\infty)\text{—>}\mathbb{C}$ המספקות את שתי הדרישות הבאות:

i. לכל פונקציה f ב-V קיים קבוע חיובי M המקיים את אי-השוויון $|f(x)|\leq M$ עבור כל x ב-$[0,\infty)$.

ii. כל פונקציה f ב-V היא אינטגרבילית בהחלט על $[0,\infty)$, כלומר האינטגרל המוכלל של $|f(x)|$ על $[0,\infty)$ הוא סופי.

להוכיח את התוצאות הבאות:

א. V הוא מרחב ליניארי לא ריק.

<u>**הסבר:**</u> כי האוסף V סגור ביחס לסכום ולמכפלה בקבוע, ופרט לפונקצית האפס הוא כולל גם פונקציות כגון $1/x^2$ ו-e^{-x}.

ב. דרישה א. אינה נובעת מדרישה ב, כלומר, קיימת פונקציה מרוכבת רציפה $f:[0,\infty)\text{—>}\mathbb{C}$ המקיימת את דרישה ב אך לא מקיימת את דרישה א.

<u>**למשל**</u>, הפונקציה $f(x)$ שהגרף שלה מורכב מהשוקיים של משולשים שוי שוקיים שבסיסיהם הם הקטעים $[n\text{-}1/(2n^3),n+1/(2n^3)]$ על ציר x וגובהם n, בהתאמה, לכל n טבעי, כלומר $f(n)=n$, לכל n טבעי, ומקטעי ציר x שבין המשולשים הללו, כלומר $f(x)=0$ בקטעים $[n+1/(2n^3),(n+1)\text{-}1/(n+1)^3]$ לכל n טבעי. פונקציה זאת אינה חסומה אך האינטגרל המוכלל שלה על $[0,\infty)$ שווה לסכום שטחי המשולשים הנ"ל שהוא טור מתכנס.

ג. לכל זוג פונקציות f,g ב-V האינטגרל המוכלל $\int_0^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx$ סופי וה"מכפלה" המוגדרת ע"י $\langle f,g\rangle=\int_0^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx$ היא מכפלה פנימית ב-V.

הסבר: ואמנם, לפי תנאי i קיים M חיובי כך ש- $|f(x)|\leq M$ לכל x ב- $[0,\infty)$. מצד שני $g(x)$ מקיימת את תנאי ii ומכאן נוכחים שהאינטגרל המוכלל של $|f(x)g(x)|$ קיים וסופי. מכאן נובע שהאינטגרלים המוכללים של החלקים הממשי והמדומה של $f(x)\overline{g(x)}$ סופיים ולפיכך גם האינטגרל המוכלל של $f(x)\overline{g(x)}$ סופי והבדיקה שהוא מקיים את שלוש הדרישות של מכפלה פנימית היא ישירה.

ד. תהי $\mu:[0,\infty)\text{—>}\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ומחזורית בעלת אורך מחזור 1: $\mu(x+1)=\mu(x)$ לכל x אי-שלילי, ו- $\mu(0)=0$. תהי W קבוצת כל הפונקציות $f:[0,\infty)\text{—>}\mathbb{C}$ מהצורה $f(x)=\alpha_{[x]+1}\mu(x)$ כאשר $\{\alpha_k\}_{k\epsilon\mathbb{N}}$ היא סדרת מספרים מרוכבים המקיימת $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|<\infty$ ואילו $[x]$ הוא החלק השלם של המספר החיובי x.

להוכיח ש- W הוא תת מרחב של V. להראות שאם $\mu(x)\neq 0$ לכל x בקטע $(0,1)$ אזי סדרת הפונקציות $\{\phi_k\}_{k\epsilon\mathbb{N}}$ הנתונות ע"י $\phi_k=\mu\chi_{[k\text{-}1,k)}$ לכל k טבעי, מהווה מערכת אורתוגונלית ב- W ביחס למכפלה הפנימית שהוגדרה ב- V בסעיף הקודם, כאשר

$\chi_{[a,b)}(x)=\begin{cases}1, & a\le x<b\\ 0, & x\notin[a,b)\end{cases}$. מהו התנאי שעל הפונקציה μ לקיים על מנת שזאת תהיה מערכת אורתונורמלית.

<u>הסבר</u>: כל פונקציה $f(x)$ ב- W מוגדרת בכל קטע $(n\text{-}1,n)$ כמכפלת הפונקציה המחזורית הנתונה $\mu(x)$ בקבוע α_n מתוך סדרה $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|<\infty$, ולפיכך זאת סדרה חסומה: $|\alpha_n|\le M$ עבור M חיובי מסוים, ומכיוון שגם הפונקציה $\mu(x)$ חסומה, בהיותה רציפה ומחזורית, גם $f(x)$ חסומה בכל $[0,\infty)$, כלומר תנאי i. מתמלא. כמו כן בגלל מחזוריות $\mu(x)$:

$$(*)\qquad \|f\|^2=\int_0^\infty|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\text{-}1}^{n}|\alpha_n\mu(x)|^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\int_0^1|\mu(x)|^2\,dx<\infty$$

כך שגם תנאי ii מקוים ע״י כל פונקציה ב- W. פרט לכך הבדיקה ש- W סגורה לחיבור ולכפל בקבועים היא ישירה ופשוטה, ולפיכך W הוא תת-מרחב ב- V.

נבחין כעת שכל אחת מהפונקציות $\phi_n=\mu\chi_{[n\text{-}1,n)}$ היא מהצורה $\phi_n(x)=\alpha_{[x]+1}\mu(x)$ כאשר הסדרה $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ המתאימה מוגדרת ע״י: $\alpha_k=0$ לכל $k\neq n$ ו- $\alpha_n=1$. לכן כל הפונקציות $\phi_n=\mu\chi_{[n\text{-}1,n)}$ אכן שייכות ל- W. כמו כן, לא קשה לראות שלכל $k\neq n$ המכפלה $\phi_k(x)\overline{\phi_n(x)}$ מתאפסת בכל $[0,\infty)$ ולכן המכפלה הפנימית $<\phi_k,\phi_n>$ שווה אפס לכל $k\neq n$, מה שמוכיח שזאת אכן מערכת אורתוגונלית.

מצד שני, מהשוויון $(*)$ שלעיל יוצא ש-

$$\|\phi_n\|^2=\int_0^1|\mu(x)|^2\,dx$$

ולפיכך, על מנת שזאת תהיה מערכת אורתונורמלית האינטגרל האחרון צריך להיות שווה ל- 1.

ה. האם המערכת $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ שלמה ב- W? האם היא סגורה ב- W?
האם המערכת $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ שלמה ב- V?

<u>תשובה</u>: אין שום קושי להיווכח שלכל פונקציה $f(x)=\alpha_{[x]+1}\mu(x)$ ב- W מתקיים השוויון

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n(x)$$

כאשר עבור כל מספר טבעי k מתקיים השוויון:

$$\langle f,\phi_n\rangle=\alpha_n\int_0^1|\mu(x)|^2\,dx$$

ולפי השוויון $(*)$ נוכחים ש-

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\int_0^1|\mu(x)|^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\left\langle f,\phi_n\right\rangle\right|^2}{\int_0^1|\mu(x)|^2dx}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle f,\frac{\phi_n}{\sqrt{\int_0^1|\mu(x)|^2dx}}\right\rangle\right|^2$$

כלומר זהות פרסוול בתוקף עבור כל הפונקציות ב- W, מה שמוכיח שהמערכת הנ״ל סגורה ולפיכך גם שלמה ב- W. לעומת זאת המערכת הזאת איננה שלמה, ולפיכך גם אינה סגורה בכל המרחב V שכן ב- V יש לא מעט פונקציות שאינן שייכות לתת-המרחב W כך שההפרש בין כל אחת מהן להיטלה הניצב על W יהיה אורתוגונלי לכל איברי המערכת האורתוגונלית הנ״ל.

ו. אם $\mu(x)=sin(2m\pi x)$ עבור m טבעי מסוים. מהו המרחק (ע״פ הנורמה ב- V) בין $f(x)=e^{-sx}$ לבין W כאשר s חיובי כלשהו?

<u>פיתוח:</u> עבור כל מספר טבעי n מקבלים (לאחר שתי אינטגרציות בחלקים):

$$\left\langle f,\phi_n\right\rangle=\int_n^{n-1}f(x)\mu(x)\,dx=\int_{n-1}^{n}e^{-sx}sin(2m\pi x)\,dx=\int_0^1 e^{-s(x+n-1)}sin(2m\pi x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 e^{-sx}sin(2m\pi x)\,dx\,e^{-(n-1)s}=\frac{2m\pi(1-e^{-s})}{4m^2\pi^2+s^2}e^{-(n-1)s}$$

מכאן מקבלים שהנורמה של ההיטל הניצב של $f(x)=e^{-sx}$ על W נתונה ע״י:

$$\left\|\widetilde{e^{-sx}}\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle e^{-sx},\phi_n\right\rangle\right|^2=\left(\frac{2m\pi(1-e^{-s})}{4m^2\pi^2+s^2}\right)^2\sum_{n=1}^{W}e^{-(n-1)s}=\left(\frac{2m\pi(1-e^{-s})}{4m^2\pi^2+s^2}\right)^2\frac{1}{1-e^{-s}}=$$

$$=\left(\frac{2m\pi}{4m^2\pi^2+s^2}\right)^2(1-e^{-s})$$

כשמצד שני:

$$\left\|e^{-sx}\right\|^2=\int_0^{\infty}e^{-2sx}dx=\frac{1}{2}$$

ולפי ״משפט פיתגורס המוכלל״ נקבל שהמרחק (ע״פ הנורמה) בין $f(x)=e^{-sx}$ לבין תת המרחב W נתון ע״י

$$\left\|e^{-sx}-\widetilde{e^{-sx}}\right\|=\sqrt{\left\|e^{-sx}\right\|^2-\left\|\widetilde{e^{-sx}}\right\|^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{2m\pi}{4m^2\pi^2+s^2}\right)^2(1-e^{-s})}$$

כך למשל עבור $s=m=1$ מקבלים שמרחק זה הוא בערך 0.4847695548.

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל הממשים ותהי $\{u_n\}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V. יהיו f,g שני איברים השייכים ל- V עם מקדמי פורייה המוכללים $f_n=\langle f,u_n\rangle$ ו-

$g_n=<g,u_n>$. יהיו f^* ו- g^* עוד שני איברים ב- V המקיימים: $f^*{}_n=<f^*,u_n>=nf_n$ וכן $g^*{}_n=<g^*,u_n>=ng_n$ נסמן: $A=<f,g^*>$ ו- $L=||f^*||^2+||g^*||^2$. להוכיח שמתקיים אי- השוויון: $L\geq 2A$. מה התנאים שעל f ו- g לקיים על מנת שעבורם יתקיים השוויון.

<u>רמז:</u> ע״י שימוש בזהות פרסוול הרגילה (עבור ריבועי הנורמות) והמוכללת (עבור המכפלה הפנימית) להראות ש- $L\text{-}2A$ נתון ע״י טור שכל איבריו אי-שליליים ולפיכך הוא עצמו אי-שלילי והוא שווה לאפס אך ורק אם כל איבריו שווים לאפס

6. תהי $\{u_n\}$ מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב מכפלה פנימית V. נגדיר:

$$v_n=\begin{cases}\dfrac{u_{2k}+u_{2k\text{-}1}}{\sqrt{2}}, & n=2k\\[2ex] \dfrac{u_{2k}-u_{2k\text{-}1}}{\sqrt{2}}, & n=2k\text{-}1\end{cases}$$

א. להוכיח שהסדרה $\{v_n\}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V.

ב. למצוא את הקשרים בין מקדמי פורייה המוכללים של איבר כלשהו f ב- V ביחס למערכת $\{u_n\}$ לבין מקדמיו של f ביחס ל- $\{v_n\}$.

הבדיקה שהמערכת $\{v_n\}$ היא אורתונורמלית היא ישירה ומורכבת מבדיקה בשלושה מקרים: n,m שניהם זוגיים, או שניהם אי-זוגיים או שאחד מהם זוגי והאחר אי-זוגי. להוכחה שהמערכת החדשה סגורה נוח קודם לענות על חלק ב. של השאלה ובעזרת התשובה לחלק ב. אפשר להראות שטורי ריבועי הערכים המוחלטים של מקדמי פורייה של כל איבר f ביחס לשתי המערכות האורתונורמליות הללו זהים, כך שאם אחד מהם מקיים את זהות פרסוול עבור כל איבר f במרחב, כך גם השני, ומכיוון שקיום זהות פרסוול ע״י כל איבר במרחב הוא התנאי לסגירות המערכת האורתונורמלית, נסיק שגם המערכת החדשה סגורה.