דף תרגילים מס. 4
בטורי פורייה והתמרות אינטגרליות
<u>התמרת לפלס</u>

1. תהיינה נתונות $x>0 \quad g(x)=\frac{sin^2(x)}{x^2}, \quad f(x)=\frac{sin(x)}{x}$. נסמן את התמרות לפלס של שתי פונקציות אלו ב- $F(s)$ וב- $G(s)$, בהתאמה.

(א) ללא חישוב $F(s)$ ו- $G(s)$ למצוא a כך ששתי ההתמרות האלו קיימות לכל $a<s$.

(ב) לחשב את $F'(s)$ ואת $G''(s)$ וע״י אינטגרציות של שתיהן למצוא את $F(s)$ ואת $G(s)$. (רמז: להיעזר בכך שהגבולות של $F(s),\ G(s),\ G'(s)$ באין-סוף הם 0)

(ג) לחשב את שני האינטגרלים המוכללים

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{sin^2(x)}{x^2}dx,$$

ע״י שימוש בפתרון של חלק (ב) של התרגיל.

2. (א) לחשב את התמרת לפלס של פונקצית החלק השלם $f(x)=[x]$ ושל $g(x)=(-1)^{[x]}$ (רמז: בטאו את $f(x)$ ו- $g(x)$ כטור מתאים של פונקציות הביסייד $u_n(x)$).

(ב) לחשב את התמרת לפלס של $f(x)=exp(-x^2)$ (לבטא אותה באמצעות פונקצית השגיאה $err(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt$) ולקבוע מהו תחום ההגדרה של ההתמרה של פונקציה זאת.

3. למצוא את הפתרונות של המשוואות הבאות המקיימים את תנאי ההתחלה המצורפים, תוך שימוש בהתמרת לפלס:

$$i) \quad y''-3y'+2y=(x-[x])e^x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=-1.$$

$$ii) \quad y''+\pi^2 y=(-1)^{[x]}, \qquad y(0)=y'(0)=0.$$

$$iii) \quad y''+2y'+5y=\delta_\pi(x)-\delta_{2\pi}(x), \quad y(0)-y'(0)=0.$$

$iv)\quad y'''-8y=\chi_{[\pi,2\pi]}(x),\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y''(0)=-1$

כאשר $\chi_{[\pi,2\pi]}(x)=\{1,\ \pi\le x\le 2\pi;\quad 0,\ x\notin[\pi,2\pi]\}$.

$v)\ y'''-y''+4y'-4y=68e^{x}sin(2x),\ y(0)=1,\ y'(0)=-19,\ y''(0)=-37.$

4. למצוא את הפתרונות של המשוואות האינטגרליות הבאות:

$$i)\quad f(x)-2\int_0^x f(t)\,sin(2x-2t)\,dt=e^{-x}$$

$$ii)\quad f(x)-\frac{1}{6}\int_0^x f(t)\,(x-t)^3=cos(x)$$

$$iii)\quad \int_0^x f'(x-t)f(t)\,dt=x-cos(x)-\frac{1}{2}xsin(x),\quad f(0)=0,\quad f'(0)<0$$

$$iv)\quad \int_0^x f(t)\sqrt{x-t}\,dt=x-x^2+x^3$$

5. תהי $f{:}[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציה רציפה למקוטעין שהתמרת לפלס של $F(s)$ מוגדרת גם כפונקציה של משתנה מרוכב.

(א) להוכיח את הזהויות הבאות:

$$\mathcal{L}[cos(ax)f(x)](s)=Re\{F(s-ia)\}$$

$$\mathcal{L}[sin(ax)f(x)](s)=Im\{F(s-ia)\}$$

עבור קבוע חיובי כלשהו a.

(ב) לחשב את התמרות לפלס של $\frac{sin(x)}{\sqrt{x}},\ \frac{cos(ax)}{\sqrt{x}}$ עבור קבוע חיובי כלשהו a.

(להיעזר בחלק הקודם, עבור $f(x)=x^{-1/2}$, בהכרת התמרת לפלס של פונקציה זאת וביטוי אלגברי של השורש הריבועי של המספר המרוכב $s+ia$ הנמצא ברביע הראשון של המישור המרוכב (כלומר, למצוא $u+iv$ עם $u>0,\ v>0$ המקיים את המשוואה $(u+iv)^2=s+ia$ עבור $s>0,\ a>0$).

(ג) לחשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^\infty \frac{cos(ax)}{\sqrt{x}}dx,\quad \int_0^\infty \frac{sin(ax)}{\sqrt{x}}dx,\quad \int_0^\infty cos(t^2)dt,\quad \int_0^\infty sin(t^2)dt$$