

תרגיל בית 2 - טורי פוריה

תרגיל 1. כתוב את טורי פוריה הממשי והמרוכב של הפונקציות :

א. $f(x) = 3 \cos 7x + 2 \sin 5x + 7 \cos 3x + \sin x$.

ב. $f(x) = e^{-i7x} + e^{-i4x} + e^{ix} + 3e^{i5x} + e^{i6x}$.

ג. $f_b(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| \leq b \\ 0 & ; b < |x| \end{cases}$, כאשר b קבוע ממשי $0 \leq b < \pi$.

ד. $f(x) = \begin{cases} e^x & ; 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; -\pi \leq x < 0 \end{cases}$.

תרגיל 2. תהא $f(x)$ רציפה, מחזורית $f(x+2\pi) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ובעלת פיתוח פוריה $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. מצא את פיתוח פוריה של הפונקציה $g(x)$ כאשר :

א. $g(x) = f(x) \cdot \sin x$.

ב. $g(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

ג. $g(x) = f'(x)$ (בהנחה שהנגזרת השנייה קיימת).

ד. $g(x) = f(x + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ה. $g(x) = f(Nx)$ N טבעי .

בטא בעזרת המקדמים c_n את הביטויים הבאים :

ו. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot f(x) dx$.

ז. $\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b f(x) dx$.

ח. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot f(x) dx$.

ט. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x + \lambda)} \cdot f'(x) dx$.

תרגיל 3. יהי נתון הטור הטריגונומטרי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$.

- א. לקבוע האם הטור הזה מתכנס נקודתית בקטע $[-\pi, \pi]$.
- ב. האם קיימת במרחב E פונקציה שזהו הטור פוריה שלה? אם קיימת אין צורך למצוא אותה, ואם לא הסבירו כיצד זה מתאים לתוצאה של חלק א'?