<u>תרגילים בטורי פורייה</u>
<u>מרחבי מכפלה פנימית ומערכות אורתונורמליות</u>
סימסטר חורף 2003-2004

1. יהי $U=span\{1,x,x^2,x^3\}$ מעל הממשים. אם במרחב הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[a,b]$ מוגדרת "מכפלה" ע"י:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

א. לבדוק שזאת מכפלה פנימית במרחב זה

ב. למצוא ב- U פונקציה $g(x)$ המקטינה למינימום את ערך האינטגרל:

$$\int_{-1}^{1}\frac{(x+|x|-g(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ופונקציה $h(x)$ שעבורה מתקבל המינימום של האינטגרל:

$$\int_{-1}^{1}\frac{(x^5-x^2+2+h(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\,.$$

ג. להראות שקיימת סדרת קבועים $\{c_n\}_{n=0,1,2,...}$ כך שסדרת הפונקציות $\{c_n cos(n arcos x)\}_{n=0,1,2,...}$ יוצרת מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית שלעיל ולמצוא את הקבועים c_n. למצוא במפורש את ארבע הפונקציות הראשונות (עבור $n=0,1,2,3$) במערכת זאת ולהראות שהן מהוות בסיס אורתונורמלי של תת המרחב U.

2. א. במרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין על הקטע $[0,1]$ עם המכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle=\int_{0}^{1}f(x)g(x)\,dx$$

נתונה סדרת הפונקציות $\{\varphi_n\}$, כאשר

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n(n+1)}, & \frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n}\\ 0, & x\notin[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\end{cases}\qquad n=1,2,3,...$$

לקבוע האם סדרה זאת מתכנסת נקודתית לגבול כלשהו בקטע $[0,1]$ והאם היא מתכנסת בנורמה לאותו גבול?

ב) הקטע $[0,1]$ מכוסה ע"י הקטעים $[a_j,b_j]$, כאשר עבור j טבעי, $2^n-1\le j<2^{n+1}-1$ נקבע ש $a_j=(j-2^n+1)2^{-n}$ ו- $b_j=a_j+2^{-n}$. נתבונן בסדרת הפונקציות $\{\chi_j\}$ המוגדרות כך:

$$\chi_j(x)=\begin{cases}1, & a_j\le x\le b_j\\ 0, & x\notin[a_j,b_j]\end{cases}.$$

לקבוע האם סדרה זאת מתכנסת נקודתית לגבול כלשהו בקטע $[0,1]$ והאם היא מתכנסת בנורמה לגבול כלשהו?

ג) מה המסקנה שניתן להסיק מסעיפים א,ב ביחס לקיום או אי-קיום קשר בין התכנסות נקודתית והתכנסות בנורמה?

3. תהי $\{u_n\}$ מערכת אורתוגונלית סגורה במרחב מכפלה פנימית כלשהו, כאשר $\|u_n\|=\sqrt{n(n+1)}$ לכל n טבעי. יהיו f,g שני איברים באותו מרחב המקיימים $<f,u_n>=n2^{-n}$ ו- $<g,u_n>=(n+1)2^{-n}$. לחשב את $\|f-g\|$ ואת $<f,g>$.

4. יהי V אוסף כל הפונקציות המרוכבות והרציפות $f:[0,\infty)\text{—>}\mathbb{C}$ המספקות את שתי הדרישות הבאות:

i. לכל פונקציה f ב- V קיים קבוע חיובי M המקיים את אי-השוויון $|f(x)|\leq M$ עבור כל x ב- $[0,\infty)$.

ii. כל פונקציה f ב- V היא אינטגרבילית בהחלט על $[0,\infty)$, כלומר האינטגרל המוכלל של $|f(x)|$ על $[0,\infty)$ הוא סופי.

להוכיח את התוצאות הבאות:

א. V הוא מרחב ליניארי לא ריק.

ב. דרישה א. אינה נובעת מדרישה ב, כלומר, קיימת פונקציה מרוכבת רציפה $f:[0,\infty)\text{—>}\mathbb{C}$ המקיימת את דרישה ב אך לא מקיימת את דרישה א.

ג. לכל זוג פונקציות f,g ב- V האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx$ סופי וה"מכפלה" המוגדרת ע"י $\langle f,g\rangle=\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx$ היא מכפלה פנימית ב- V.

ד. תהי $\mu:[0,\infty)\text{—>}\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ומחזורית בעלת אורך מחזור 1: $\mu(x+1)=\mu(x)$ לכל x אי-שלילי, ו- $\mu(0)=0$. תהי W קבוצת כל הפונקציות $f:[0,\infty)\text{—>}\mathbb{C}$ מהצורה $f(x)=\alpha_{[x]+1}\mu(x)$ כאשר $\{\alpha_k\}_{k\epsilon\mathbb{N}}$ היא סדרת מספרים מרוכבים המקיימת $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|<\infty$ ואילו $[x]$ הוא החלק השלם של המספר החיובי x.

להוכיח ש- W הוא תת מרחב של V. להראות שאם $\mu(x)\neq 0$ לכל x בקטע $(0,1)$ אזי סדרת הפונקציות $\{\phi_k\}_{k\epsilon\mathbb{N}}$ הנתונות ע"י $\phi_k=\mu\chi_{[k-1,k)}$ לכל k טבעי, מהווה מערכת אורתוגונלית ב- W ביחס למכפלה הפנימית שהוגדרה ב- V בסעיף הקודם, כאשר $\chi_{[a,b)}(x)=\begin{cases}1, & a\leq x<b\\ 0, & x\notin[a,b)\end{cases}$. מהו התנאי שעל הפונקציה μ לקיים על מנת שזאת תהיה מערכת אורתונורמלית.

ה. האם המערכת $\{\phi_k\}_{k\epsilon\mathbb{N}}$ שלמה ב- W? האם היא סגורה ב- W?

האם המערכת $\{\phi_k\}_{k\epsilon\mathbb{N}}$ שלמה ב- V?

ו. אם $\mu(x)=sin(2m\pi x)$ עבור m טבעי מסוים. מהו המרחק (ע"פ הנורמה ב- V) בין $f(x)=e^{-sx}$ לבין W כאשר s חיובי כלשהו?

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל הממשים ותהי $\{u_n\}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V. יהיו f,g שני איברים השייכים ל- V עם מקדמי פורייה המוכללים $f_n=<f,u_n>$ ו- $g_n=<g,u_n>$. יהיו f^* ו- g^* עוד שני איברים ב- V המקיימים: $f^*{}_n=<f^*,u_n>=nf_n$ וכן $g^*{}_n=<g^*,u_n>=ng_n$ נסמן: $A=<f,g^*>$ ו- $L=||f^*||^2+||g^*||^2$. להוכיח שמתקיים אי- השוויון: $L\geq 2A$. מה התנאים שעל f ו- g לקיים על מנת שעבורם יתקיים השוויון.

6. תהי $\{u_n\}$ מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב מכפלה פנימית V. נגדיר:

$$v_n=\begin{cases}\dfrac{u_{2k}+u_{2k\text{-}1}}{\sqrt{2}}, & n=2k\\[2mm] \dfrac{u_{2k}-u_{2k\text{-}1}}{\sqrt{2}}, & n=2k\text{-}1\end{cases}$$

א. להוכיח שהסדרה $\{v_n\}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V.

ב. למצוא את הקשרים בין מקדמי פורייה המוכללים של איבר כלשהו f ב- V ביחס למערכת $\{u_n\}$ לבין מקדמיו של f ביחס ל- $\{v_n\}$.