1 מבוא למשוואות דיפרנציאליות חלקיות מד"ח.

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית חלקית היא משוואה מהצורא:

$$f(x, y, ..., u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{yy}, ...) = 0$$

סדר המד"ח: הוא הסדר של הנגזרת החלקית מהסדר הכי גבוה המופיע בה.

פתרון המשוואה: הוא פונקציה $u = u(x, y, z, ...)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר המד"ח, שע"י הצבתה, המשוואה תתקיים זהותית.

המד"ח ליניארית : כשליניארית במשתנים u ונגזרותיה $u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{yy}, ...$

תרגילים מראים כיצד ניתן במיקרים מסוימים לפתור משוואות חלקיות בשיטות של משוואות רגילות.

1.1 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$$

פתרון:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = u_x(x,y)$$

$$u = \int u_x(x,y)dx = f(y)$$

$\bigcirc$

1.2 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = x + y$$

פתרון:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = u_x(x,y)$$

$$u(x,y) = \int u_x(x,y)dx = \int (x+y)dx = \frac{x^2}{2} + xy + f(y)$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + f(y)$$

○

1.3 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + u(x,y) = 0$$

פתרון:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = u_x(x,y)$$

נתייחס ל $u(x,y)$ כאל פונקציה של x בלבד כאשר y פרמטר, נפתור משוואה ליניארית מסדר ראשון.

$$\frac{du}{dx} = -u$$

$$\frac{du}{u} = -dx$$

$$\ln u = -x + f(y)$$

$$u(x,y) = e^{-x} e^{f(y)} = \tilde{f(y)} e^{-x}$$

למשל פתרון פרטי $\tilde{f(y)} = \cos y$

$$\Rightarrow u = \cos y \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow u_x = -\cos y \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow u_x + u = -\cos y \cdot e^{-x} + \cos y \cdot e^{-x} = 0$$

○

1.4 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$$

פתרון:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$$

$$u_x = \int u_{xy} dy = \int 0 \cdot dy = \varphi(x)$$

$$u = \int u_x dx = \int \varphi(x) \cdot dx = \tilde{\varphi}(x) + \psi(y)$$

○

1.5 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 6y$$

פתרון:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}$$

$$u_y = \int u_{yy} dy = \int 6y dy = 3y^2 + \varphi(x)$$

$$u = \int u_y dy = \int \left[3y^2 + \varphi(x)\right] dy = y^3 + y\varphi(x) + \psi(x)$$

○

1.6 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$u_{xx} + 2u_x + 2u = 0$$

פתרון: נתייחס ל $u(x,y)$ כאל פונקציה של x בלבד כאשר y פרמטר, נפתור משוואה ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים.

פולינום אופייני:

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

ערכים עצמיים:

$$r_{1,2} = -1 \pm i$$

פתרון כללי:

$$u(x,y) = c_1(y)e^{-x}\sin x + c_2(y)e^{-x}\cos x$$

○

1.7 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$u_{xy} + u_y = 0$$

פתרון: נגדיר:

$$u_y(x,y) = v(x,y)$$

ותפתור:

$$\Rightarrow v_x(x,y) + v(x,y) = 0$$

נתייחס ל $v(x,y)$ כאל פונקציה של x בלבד כאשר y פרמטר, נפתור משוואה ליניארית מסדר ראשון.

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\frac{dv}{v} = -dx$$

$$\ln v = -x + f(y)$$

$$v(x,y) = e^{-x}e^{f(y)} = \tilde{f}(y)e^{-x}$$

$$\Rightarrow u_y = \tilde{f}(y)e^{-x}$$

$$u = \int u_y dy = \int \left(\tilde{f}(y)e^{-x}\right) dy = \tilde{\tilde{f}}(y)e^{-x} + g(x)$$

○

1.8 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$u_{xy} - 2u_y + u_x - 2u = 0$$

פתרון: נגדיר:

$$u_x(x,y) - 2u(x,y) = v(x,y)$$

ותפתור:

$$\Rightarrow v_y(x,y) + v(x,y) = 0$$

נתייחס ל $v(x,y)$ כאל פונקציה של y בלבד כאשר x פרמטר, נפתור משוואה ליניארית מסדר ראשון.

$$\frac{dv}{dy} = -v$$

$$\frac{dv}{v} = -dy$$

$$\ln v = -y + f(x)$$

$$v(x,y) = e^{-y}e^{f(x)} = \tilde{f}(x)e^{-y}$$

$$\Rightarrow u_x(x,y) - 2u(x,y) = \tilde{f}(x)e^{-y}$$

נתייחס ל $u(x,y)$ כאל פונקציה של x בלבד כאשר y פרמטר, נפתור משוואה ליניארית מסדר ראשון. נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(x)$ כך ש:

$$\mu(x)\left[u_x - 2u\right] = \left[\mu(x)u\right]_x$$

$$\mu(x)\left(u_x - 2u\right) = \mu(x)u_x + \mu_x(x)u$$

$$-2\mu(x) = \mu_x(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -2dx \Rightarrow \ln\mu = -2x$$

$$\mu(x) = e^{-2x}$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu = e^{-2x}$

$$e^{-2x}\left[u_x(x,y) - 2u(x,y)\right] = e^{-2x}\tilde{f}(x)e^{-y}$$

$$\left[e^{-2x}u(x,y)\right]_x = e^{-2x}\tilde{f}(x)e^{-y}$$

$$e^{-2x}u(x,y) = \int e^{-2x-y}\tilde{f}(x)dx + g(y) = e^{-y}F(x) + g(y)$$

פתרון כללי:

$$u(x,y) = e^{-y}\Phi(x) + e^{2x}g(y)$$

○

1.9 תרגיל.

פתור את המשוואה:

$$u_x + u = x$$

פתרון: נתייחס ל $u(x,y)$ כאל פונקציה של x בלבד כאשר y פרמטר, נפתור משוואה ליניארית מסדר ראשון. נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(x)$ כך ש:

$$\mu(x)\left[u_x + u\right] = \left[\mu(x)u\right]_x$$

$$\mu(x)\left(u_x + u\right) = \mu(x)u_x + \mu_x(x)u$$

$$\mu(x) = \mu_x(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = dx \Rightarrow \ln\mu = x$$

$$\mu(x) = e^x$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu = e^x$

$$e^x\left[u_x(x,y) + u(x,y)\right] = e^x x$$

$$[e^x u(x,y)]_x = e^x x$$

$$e^x u(x,y) = \int e^x x dx + f(y) = e^x x - e^x + f(y)$$

פתרון כללי:

$$u(x,y) = x - 1 + e^{-x} f(y)$$

○

1.10 תרגיל.

1.10.1 א. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_{xy} + u_x = y \\ u_x(x,1) = x \\ u(0,y) = y. \end{cases}$$

1.10.2 ב. עבור איזו פונקציה $\Phi(x)$ קיים פתרון לבעיה?

$$\begin{cases} u_{xy} + u_x = y \\ u_x(x,1) = x \\ u(x,1) = \Phi(x). \end{cases}$$

פתרון: א. נגדיר:

$$u_x(x,y) = v(x,y)$$

ותפתור:

$$\Rightarrow v_y(x,y) + v(x,y) = y$$

כאשר נתייחס למשוואה כאל מד"ר רגילה, כלומר מחפשים פונקציה של y כאשר x הוא פרמטר. מד"ר ליניארית מסדר ראשון: נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(y)$ כך ש:

$$\mu(y)\left[v_y + v\right] = \left[\mu(y) v\right]_y$$

$$\mu(y)\left(v_y+v\right)=\mu(y)v_y+\mu_y(y)v$$

$$\mu(y)=\mu_y(y)\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=dy\Rightarrow\ln\mu=y$$

$$\mu(y)=e^y$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu=e^y$

$$e^y\left[v_y(x,y)+v(x,y)\right]=e^y y$$

$$\left[e^y v(x,y)\right]_y=e^y y$$

$$e^y v(x,y)=\int e^y y dy+f(x)=e^y y-e^y+f(x)$$

$$v(x,y)=y-1+e^{-y}f(x)$$

נציב את תנאי $u_x(x,1)=x$ השקול לתנאי $v(x,1)=x$ ונקבל

$$u_x(x,1)=x\Rightarrow v(x,1)=x$$

$$v(x,1)=1-1+e^{-1}f(x)=x$$

$$f(x)=ex$$

$$v(x,y)=y-1+e^{-y}ex=y-1+e^{1-y}x$$

$$\Rightarrow u_x=y-1+e^{1-y}x$$

$$u=\int u_x dx=\int\left(y-1+e^{1-y}x\right)dx=yx-x+e^{1-y}\frac{x^2}{2}+g(y)$$

נציב את התנאי השני $u(0,y)=y$ ונקבל:

$$u(0,y)=y\Rightarrow g(y)=y$$

לכן פתרון למשוואה המקורית עם שני התנאים יהיה:

$$u(x,y) = xy - x + y + \frac{x^2}{2}e^{1-y}$$

בדיקה:

$$u_x = y - 1 + xe^{1-y}$$

$$u_{xy} = 1 - xe^{1-y}$$

$$u_{xy} + u_x = 1 - xe^{1-y} + y - 1 + xe^{1-y} = y$$

$$u_x(x,1) = 1 - 1 + xe^{1-1} = x$$

$$u(0,y) = 0 \cdot y - 0 + y + \frac{0^2}{2}e^{1-y} = y$$

$$\bigcirc$$

פתרון:ב מצאנו בסעיף א:

$$\Rightarrow u_x = y - 1 + e^{1-y}x$$

$$u = \int u_x dx = \int \left(y - 1 + e^{1-y}x\right) dx = yx - x + e^{1-y}\frac{x^2}{2} + g(y)$$

נציב את התנאי השני $u(x,1) = \Phi(x)$ **ונקבל:**

$$u(x,1) = \Phi(x) = x - x + e^{1-1}\frac{x^2}{2} + g(1)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \Phi(x) = \frac{x^2}{2} + c \\ c = g(1) \end{array}$$

$$\bigcirc$$

1.11 תרגיל.

מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_{xy} + yu_y = 2xy \\ u_y(0,y) = -\frac{2}{y} \\ u(x,1) = x. \end{cases}$$

פתרון: נגדיר:

$$u_y(x,y) = v(x,y)$$

ותפתור:

$$\Rightarrow v_x(x,y) + yv(x,y) = 2xy$$

כאשר נתייחס למשוואה כאל מד"ר רגילה, כלומר מחפשים פונקציה של x כאשר y הוא פרמטר. מד"ר ליניארית מסדר ראשון: נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(x)$ **כך ש:**

$$\mu(x)\left[v_x + yv\right] = \left[\mu(x)v\right]_x$$

$$\mu(x)\left(v_x + yv\right) = \mu(x)v_x + \mu_x(x)v$$

$$y\mu(x) = \mu_x(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = ydx \Rightarrow \ln\mu = xy$$

$$\mu(x) = e^{xy}$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu = e^{xy}$

$$e^{xy}\left[v_x(x,y) + yv(x,y)\right] = e^{xy} \cdot 2xy$$

$$\left[e^{xy}v(x,y)\right]_x = 2xye^{xy}$$

$$e^{xy}v(x,y) = 2y\int xe^{xy}dx + f(y) = 2y\left[\frac{xe^{xy}}{y} - \int \frac{e^{xy}}{y}dx\right] + f(y)$$

$$e^{xy}v(x,y) = 2xe^{xy} - \frac{2e^{xy}}{y} + f(y)$$

$$v(x,y) = 2x - \frac{2}{y} + e^{-xy} f(y)$$

נציב את תנאי $u_y(0,y) = -\frac{2}{y}$ השקול לתנאי $v(0,y) = -\frac{2}{y}$ ונקבל

$$u_y(0,y) = -\frac{2}{y} \Rightarrow v(0,y) = -\frac{2}{y}$$

$$v(0,y) = -\frac{2}{y} + e^0 f(y) = -\frac{2}{y}$$

$$f(y) = 0$$

$$v(x,y) = 2x - \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow u_y = 2x - \frac{2}{y}$$

$$u(x,y) = \int u_y(x,y)dy = \int \left(2x - \frac{2}{y}\right) dy = 2xy - 2\ln|y| + g(x)$$

נציב את התנאי השני $u(x,1) = x$ ונקבל:

$$u(x,1) = 2x + g(x) = x \Rightarrow g(x) = -x$$

לכן פתרון למשוואה המקורית עם שני התנאים יהיה:

$$u(x,y) = 2xy - 2\ln|y| - x$$

בדיקה:

$$u_x = 2y - 1$$

$$u_y = 2x - \frac{2}{y}$$

$$u_{xy} = 2$$

$$u_{xy} + yu_y = 2 + 2xy - y\frac{2}{y} = 2xy$$

$$u_y(0, y) = 2 \cdot 0 - \frac{2}{y} = -\frac{2}{y}$$

$$u(x, 1) = 2x - 2\ln|1| - x = x$$

○

1.12 תרגיל.

מצא פתרון למשוואה:

$$u_{xxy} - u_y = 0$$

פתרון: נגדיר:

$$u_y(x, y) = v(x, y)$$

ותפתור:

$$\Rightarrow v_{xx}(x, y) - v(x, y) = 0$$

נתייחס ל $v(x, y)$ כאל פונקציה של x בלבד כאשר y פרמטר, נפתור משוואה ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים. פולינום אופייני:

$$r^2 - 1 = 0$$

ערכים עצמיים:

$$r_{1,2} = \pm 1$$

פתרון כללי:

$$v(x, y) = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}$$

$$\Rightarrow u_y(x, y) = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}$$

$$u(x, y) = \int u_y(x, y)dy = \int \left(c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}\right) dy = \tilde{c}_1(y)e^x + \tilde{c}_2(y)e^{-x} + g(x)$$

בדיקה:

$$u_y = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}$$

$$u_{yx} = c_1(y)e^x - c_2(y)e^{-x}$$

$$u_{yxx} = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}$$

$$u_{xxy} - u_y = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x} - c_1(y)e^x - c_2(y)e^{-x} = 0$$

○

1.13 תרגיל.

מצא פתרון למשוואה:

$$u_{xyy} + 2u_{xy} + u_x = e^y$$

פתרון: נגדיר:

$$u_x(x,y) = v(x,y)$$

ותפתור:

$$\Rightarrow v_{yy}(x,y) + 2v_y(x,y) + v(x,y) = e^y$$

נתייחס ל $v(x,y)$ כאל פונקציה של y בלבד כאשר x פרמטר, נפתור משוואה ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים. פולינום אופייני:

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

ערכים עצמיים:

$$r_{1,2} = -1$$

פתרון הומוגני:

$$v_h(x,y) = c_1(x)e^{-y} + c_2(x)ye^{-y}$$

$$v_p = Ae^y \to Ae^y + 2Ae^y + Ae^y = e^y \to A = \frac{1}{4} \to v_p = \frac{1}{4}e^y$$

פתרון כללי:

$$v(x,y) = c_1(x)e^{-y} + c_2(x)ye^{-y} + \frac{1}{4}e^y$$

$$u_x(x,y) = c_1(x)e^{-y} + c_2(x)ye^{-y} + \frac{1}{4}e^y$$

$$u(x,y) = \int u_x(x,y)dx = \int \left(c_1(x)e^{-y} + c_2(x)ye^{-y} + \frac{1}{4}e^y\right) dx$$

$$u(x,y) = \tilde{c}_1(x)e^{-y} + \tilde{c}_2(x)ye^{-y} + \frac{x}{4}e^y + g(y)$$

בדיקה:

$$u_x = c_1(x)e^{-y} + c_2(x)ye^{-y} + \frac{1}{4}e^y$$

$$u_{xy} = -c_1(x)e^{-y} + c_2(x)e^{-y} - c_2(x)ye^{-y} + \frac{1}{4}e^y$$

$$u_{xyy} = c_1(x)e^{-y} - 2c_2(x)e^{-y} + c_2(x)ye^{-y} + \frac{1}{4}e^y$$

$$\begin{gathered} u_{xyy} + 2u_{xy} + u_x = \\ c_1(x)e^{-y} - 2c_2(x)e^{-y} + c_2(x)ye^{-y} + \tfrac{1}{4}e^y \\ +2\left[-c_1(x)e^{-y} + c_2(x)e^{-y} - c_2(x)ye^{-y} + \tfrac{1}{4}e^y\right] \\ +c_1(x)e^{-y} + c_2(x)ye^{-y} + \tfrac{1}{4}e^y \\ = e^y \end{gathered}$$

$\bigcirc$

1 המד"ח ליניארית מסדר ראשון.

הגדרה: המד"ח ליניארית - כשליניארית במשתנים u ונגזרותיה $u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{yy}, ...$

הצורה הכללית של המד"ח ליניארית מסדר ראשון היא:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$$

a, b לא שתיהן 0. כדי לפתור את המד"ח נעקוב אחרי השלבים הבאים:

נפתור:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

ונקבל פתרון: $s(x,y) = c_1$

מגדירים את החלפת המשתנים :

$$\begin{cases} s(x,y) = s \\ t(x,y) = x \end{cases}$$

נקבל $w_t + \frac{c}{a}w = \frac{d}{a}$ כאשר a, b, c, d פונקציות של s, t

לא לשכוח לחזור למשתנים המקוריים.

הסבר: נבצה החלפת המשתנים

$$\begin{cases} s = s(x,y) \\ t = t(x,y) \\ w(s,t) = u(x,y) \end{cases}$$

$$u_x = w_s s_x + w_t t_x$$

$$u_y = w_s s_y + w_t t_y$$

$$a\left[w_s s_x + w_t t_x\right] + b\left[w_s s_y + w_t t_y\right] + cw = d$$

$$w_s\left[as_x+bs_y\right]+w_t\left[at_x+bt_y\right]+cw=d$$

נרצה למצוא משטח $s(x,y)=const$ המקיים

$$\Rightarrow a(x,y)s_x+b(x,y)s_y=0$$

$$\Rightarrow \frac{s_x}{s_y}=-\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

מניחים שהמשוואה $s(x,y)=const$ מגדירה פונקציה סתומה $y=y(x)$, וגוזרים את המשוואה לפי x

$$\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{s_x}{s_y}=-\frac{dy}{dx}$$

כלומר פתרון המשוואה:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

נותן $s(x,y)=const$ כך ש- $a(x,y)s_x+b(x,y)s_y=0$ והמשוואה החדשה אחרי שינוי משתנים

$$\begin{cases} s(x,y)=s \\ t(x,y)=x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_x=1 \\ t_y=0 \end{cases}$$

$$w_t\left[at_x+t_y\right]+cw=d$$

$$aw_t+cw=d$$

$$w_t+\tfrac{c}{a}w=\tfrac{d}{a}$$

למצוא פתרון פרטי משמעותו למצוא משטח אינטגרלי (פתרון) המכיל עקום נתון $\mathcal{C}$ במרחב xyu. נניח ש- $\mathcal{C}$ נתון בצורה פרמטרית ע"י

$$\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \\ u=\phi(s) \end{cases}$$

כדי למצוא את f מציבים את $x(s), y(s)$ בפתרון הכללי ומשווים את u ל- ϕ.
אם זה אפשרי נקבל את הפתרון היחיד של הבעיה. תנאי הכרחי ומספיק לקיום ויחידות הוא שהעקום C הוא לא בכוון של קו אופייני באף נקודה.

אם זה לא מתקיים , אזי הפתרון לא קיים או קיימים אינסוף פתרונות.

1.1 תרגיל. מצא 3 פתרונות למשוואה:

$$\begin{cases} u_x + \pi u_y = 0 \\ u(x, \pi x - 7) = 3 \end{cases}$$

פתרון:

כותבים את המד"ר:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pi$$

פותרים אותה:

$$\Rightarrow \int dy = \int \pi dx$$

$$y = \pi x + c$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$y - \pi x = c$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow s(x,y) = y - \pi x$$

נבצה החלפת המשתנים

$$\Rightarrow \begin{cases} s(x,y) = y - \pi x \\ t(x,y) = x \\ w(s,t) = u(x,y) \end{cases}$$

מקבלים ע"י כלל השרשרת:

$$u_x = w_s s_x + w_t t_x$$

$$u_y = w_s s_y + w_t t_y$$

מציבים בתוך המשוואה הנתונה ומקבלים:

$$[w_s s_x + w_t t_x] + \pi [w_s s_y + w_t t_y] = 0$$

$$w_s [s_x + \pi s_y] + w_t [t_x + \pi t_y] = 0$$

$$w_s [-\pi + \pi \cdot 1] + w_t [1 + \pi \cdot 0] = 0$$

$$w_t = 0 \Rightarrow w(s,t) = \int w_t(s,t) dt = \int 0 \cdot dt = f(s)$$

אבל קיבלנו קודם:

$$s = y - \pi x$$

פתרון כללי:

$$\Rightarrow u(x,y) = f(y - \pi x)$$

פתרון פרטי:

$$u(x, \pi x - 7) = 3 \Rightarrow f(\pi x - 7 - \pi x) = 3$$

$$f(-7) = 3$$

אז מתאימה כל פונקציה f שעוברת דרך נקודה : $(-7,3)$

.1

$$f_1 = 3 \Rightarrow u_1(x,y) = 3$$

.2

$$z = y - \pi x \Rightarrow f_2(z) = -\frac{3}{7} z$$

$$\Rightarrow u_2(x,y) = -\frac{3}{7}(y - \pi x)$$

$$u(x, \pi x - 7) = -\frac{3}{7}(\pi x - 7 - \pi x) = 3$$

.3

$$f_3(z) = z + 10 \Rightarrow u_3(x,y) = y - \pi x + 10$$

$$u(x, \pi x - 7) = \pi x - 7 - \pi x + 10 = 3$$

1.2 תרגיל.

1.2.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(0,y) = 2y \end{cases}$$

1.2.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(2y,y) = \sin y^2 \end{cases}$$

1.2.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(y,y) = e^y \end{cases}$$

1.2.4 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(-y,y) = \pi \end{cases}$$

1.2.5 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(x, -\sqrt{5+x^2}) = \tan x \end{cases}$$

1.2.6 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(x, \sqrt{5+x^2}) = -5 \end{cases}$$

פתרון:

כותבים את המד"ר:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

פותרים אותה:

$$\Rightarrow \int ydy = \int xdx$$

$$y^2 = x^2 + c$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$y^2 - x^2 = c$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow s(x,y) = y^2 - x^2$$

נבצה החלפת המשתנים

$$\Rightarrow \begin{cases} s(x,y) = y^2 - x^2 \\ t(x,y) = x \\ w(s,t) = u(x,y) \end{cases}$$

$y > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{s+t^2} \\ x = t \end{cases}$$

מקבלים ע"י כלל השרשרת:

$$u_x = w_s s_x + w_t t_x = w_s \cdot (-2x) + w_t \cdot 1 = -2tw_s + w_t;$$

$$u_y = w_s s_y + w_t t_y = w_s \cdot (2y) + w_t \cdot 0 = 2\sqrt{s+t^2} w_s$$

מציבים בתוך המשוואה הנתונה ומקבלים:

$$\sqrt{s+t^2}\left[w_s \cdot (-2t) + w_t \cdot 1\right] + t\left[w_s \cdot (2\sqrt{s+t^2}) + w_t \cdot 0\right] = 0$$

$$w_s\left[-2t\sqrt{s+t^2} + 2t\sqrt{s+t^2}\right] + w_t\left[\sqrt{s+t^2}\right] = 0$$

$$\sqrt{s+t^2} w_t = 0$$

$$w_t = 0 \Rightarrow w(s,t) = \int w_t(s,t)dt = \int 0 \cdot dt = f(s)$$

אבל קיבלנו קודם:

$$s = y^2 - x^2$$

פתרון כללי:

$$\Rightarrow u(x,y) = f(y^2 - x^2)$$

1.2.1 נחפש פתרון פרטי:

$$u(0,y) = 2y \Rightarrow f(y^2) = 2y$$

$$y^2 = z \Rightarrow y = \sqrt{z}, y > 0 \Rightarrow f(z) = 2\sqrt{z}$$

$$f(y^2 - x^2) = 2\sqrt{y^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = 2\sqrt{y^2 - x^2}$$

1.2.2 נחפש פתרון פרטי:

$$u(2y,y) = \sin y^2 \Rightarrow f(y^2 - 4y^2) = \sin y^2$$

$$-3y^2 = z \Rightarrow f(z) = -\sin\frac{z}{3}$$

$$f(y^2-x^2) = -\sin\frac{y^2-x^2}{3}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -\sin\frac{y^2-x^2}{3}$$

1.2.3 נחפש פתרון פרטי:

$$u(y,y) = e^y \Rightarrow f(y^2-y^2) = e^y$$

$$\Rightarrow f(0) = e^y$$

לא קיים פיתרון המקיים את התנאי.

1.2.4 נחפש פתרון פרטי:

$$u(-y,y) = \pi \Rightarrow f(y^2-y^2) = \pi$$

$$\Rightarrow f(0) = \pi$$

קיימים אינסוף פיתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $f(0) = \pi$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(0,\pi)$ תתאים.

1.2.5 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,-\sqrt{5+x^2}) = \tan x \Rightarrow f(5+x^2-x^2) = \tan x$$

$$\Rightarrow f(5) = \tan x$$

לא קיים פיתרון המקיים את התנאי.

1.2.6 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,\sqrt{5+x^2}) = -5 \Rightarrow f(5+x^2-x^2) = -5$$

$$\Rightarrow f(5) = -5$$

קיימים אינסוף פיתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $f(5) = -5$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(5, -5)$ תתאים.

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.3 תרגיל.

1.3.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(2, y) = y - 4 \end{cases}$$

1.3.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(x, x^2 + cx) = e^x \end{cases}$$

1.3.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(x, x^2 + cx) = x \end{cases}$$

1.3.4 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(x, x^2 + cx) = 2 \end{cases}$$

פתרון:

כותבים את המד"ר:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y+x^2}{x}$$

פותרים אותה:

$$\Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=x$$

נמצא גורם אינטגרציה $\mu=\mu(x)$ כך ש:

$$\mu(x)\left[y'-\frac{1}{x}y\right]=[\mu(x)y]'$$

$$\mu(x)\left[y'-\frac{1}{x}y\right]=\mu'(x)y+\mu(x)y'$$

$$-\frac{\mu(x)}{x}=\mu'(x)$$

$$\Rightarrow \mu(x)=\frac{1}{x}$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu(x)=\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\left[y'-\frac{1}{x}y\right]=\frac{1}{x}x$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{x}y\right]'=1$$

$$\frac{y}{x}=x+c$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\frac{y-x^2}{x}=c$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow s(x,y)=\frac{y-x^2}{x}$$

נבצע החלפת המשתנים

$$\Rightarrow \begin{cases} s(x,y) = \frac{y-x^2}{x} \\ t(x,y) = x \\ w(s,t) = u(x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = st + t^2 \\ x = t \end{cases}$$

מקבלים ע"י כלל השרשרת:

$$u_x = w_s s_x + w_t t_x = w_s \cdot (-\frac{y+x^2}{x^2}) + w_t \cdot 1 = -\frac{s+2t}{t} w_s + w_t;$$

$$u_y = w_s s_y + w_t t_y = w_s \cdot (\frac{1}{x}) + w_t \cdot 0 = \frac{1}{t} w_s$$

מציבים בתוך המשוואה הנתונה ומקבלים:

$$t\left[-\frac{s+2t}{t} w_s + w_t\right] + (st + t^2 + t^2)\left[\frac{1}{t} w_s\right] - w = 0$$

$$t w_t - w = 0$$

$$\frac{dw}{w} = \frac{dt}{t}$$

$$\ln|w(s,t)| = \ln|t| + f(s)$$

$$\Rightarrow w(s,t) = tF(s)$$

אבל קיבלנו קודם:

$$s = \frac{y-x^2}{x}$$

פתרון כללי:

$$\Rightarrow u(x,y) = xF(\frac{y-x^2}{x})$$

1.3.1 נחפש פתרון פרטי:

$$u(2,y)=y-4\Rightarrow u(2,y)=2F(\frac{y-2^2}{2})=y-4$$

$$\frac{y-4}{2}=z\Rightarrow F(z)=z$$

$$F(\frac{y-x^2}{x})=\frac{y-x^2}{x}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=x\frac{y-x^2}{x}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=y-x^2$$

1.3.2 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2+cx)=e^x\Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(\frac{x^2+cx-x^2}{x})=e^x$$

$$\Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(c)=e^x$$

$$\Rightarrow F(c)=\frac{e^x}{x}$$

לא קיים פיתרון המקיים את התנאי.

1.3.3 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2+cx)=x\Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(\frac{x^2+cx-x^2}{x})=x$$

$$\Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(c)=x$$

$$\Rightarrow F(c)=1$$

קיימים אינסוף פיתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $F(c)=1$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(c,1)$ תתאים.

1.3.4 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2+cx)=2 \Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(\frac{x^2+cx-x^2}{x})=2$$

$$\Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(c)=2$$

$$\Rightarrow F(c)=\frac{2}{x}$$

לא קיים פיתרון המקיים את התנאי.

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.4 תרגיל.

1.4.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x+2xu_y+u=x \\ u(1,y)=y \end{cases}$$

1.4.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x+2xu_y+u=x \\ u(x,x^2)=x-1 \end{cases}$$

1.4.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x+2xu_y+u=x \\ u(x,x^2)=x \end{cases}$$

פתרון:

כותבים את המד"ר:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1}$$

פותרים אותה:

$$\Rightarrow \int dy=\int 2xdx$$

$$y=x^2+c$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$y-x^2=c$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow s(x,y)=y-x^2$$

נבצה החלפת המשתנים

$$\Rightarrow \begin{cases} s(x,y)=y-x^2 \\ t(x,y)=x \\ w(s,t)=u(x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=s+t^2 \\ x=t \end{cases}$$

מקבלים ע"י כלל השרשרת:

$$u_x=w_s s_x+w_t t_x=w_s\cdot(-2x)+w_t\cdot 1=-2tw_s+w_t;$$

$$u_y=w_s s_y+w_t t_y=w_s\cdot 1+w_t\cdot 0=w_s$$

מציבים בתוך המשוואה הנתונה ומקבלים:

$$[-2tw_s+w_t]+2tw_s+w=t$$

$$w_t+w=t$$

נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(t)$ כך ש:

$$\mu(t)\left[w_t + w\right] = \left[\mu(t)w\right]_t$$

$$\mu(t)\left[w_t + w\right] = \mu_t(t)w + \mu(t)w_t$$

$$\mu(t) = \mu_t(t)$$

$$\Rightarrow \mu(t) = e^t$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu(t) = e^t$

$$\Rightarrow e^t\left[w_t + w\right] = e^t t$$

$$\Rightarrow \left[e^t w\right]_t = te^t$$

$$e^t w(s,t) = \int te^t dt + f(s) = te^t - e^t + f(s)$$

$$w(s,t) = t - 1 + e^{-t} f(s)$$

אבל קיבלנו קודם:

$$s = y - x^2$$

פתרון כללי:

$$\Rightarrow u(x,y) = x - 1 + e^{-x} f(y - x^2)$$

1.4.1 נחפש פתרון פרטי:

$$u(1,y) = y \Rightarrow u(1,y) = 1 - 1 + e^{-1} f(y-1) = y$$

$$f(y-1) = ey$$

$$y - 1 = z \Rightarrow f(z) = e(z+1)$$

$$f(y - x^2) = e(y - x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x - 1 + e^{-x}e(y - x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x - 1 + e^{1-x}(y - x^2 + 1)$$

1.4.2 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2) = x - 1 \Rightarrow u(x,x^2) = x - 1 + e^{-x}f(x^2 - x^2) = x - 1$$

$$f(0) = 0$$

קיימים אינסוף פיתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $f(0) = 0$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(0,0)$ תתאים.

1.4.3 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2) = x \Rightarrow u(x,x^2) = x - 1 + e^{-x}f(x^2 - x^2) = x$$

$$f(0) = e^x$$

לא קיים פיתרון המקיים את התנאי.

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.5 תרגיל.

1.5.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} (1+x^2)u_x + (1+y^2)u_y = x - y \\ u(0,y) = 1 + y^2 \end{cases}$$

1.5.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} (1+x^2)u_x + (1+y^2)u_y = x - y \\ u(x,x) = 0 \end{cases}$$

1.5.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} (1+x^2)u_x + (1+y^2)u_y = x - y \\ u(x,x) = x \end{cases}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

פתרון:

כותבים את המד"ר:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

פותרים אותה:

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$c + \arctan y = \arctan x$$

$$x = \tan\left(c + \arctan y\right) = \frac{\tan c + \tan\arctan y}{1 - \tan\arctan y \cdot \tan c} = \frac{c+y}{1-cy}$$

$$x - cxy = c + y$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\frac{x-y}{1+xy} = c$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow s(x,y)=\frac{x-y}{1+xy}$$

נבצה החלפת המשתנים

$$\Rightarrow \begin{cases} s(x,y)=\frac{x-y}{1+xy} \\ t(x,y)=x \\ w(s,t)=u(x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{t-s}{1+st} \\ x=t \end{cases}$$

מקבלים ע"י כלל השרשרת:

$$u_x=w_s s_x+w_t t_x=w_s\cdot(\frac{1+y^2}{(1+xy)^2})+w_t\cdot 1=\frac{1+s^2}{1+t^2}w_s+w_t;$$

$$u_y=w_s s_y+w_t t_y=w_s\cdot\left(-\frac{1+x^2}{(1+xy)^2}\right)+w_t\cdot 0=\left(-\frac{(1+st)^2}{1+t^2}\right)w_s$$

מציבים בתוך המשוואה הנתונה ומקבלים:

$$(1+t^2)\left[\frac{1+s^2}{1+t^2}w_s+w_t\right]+\left[1+\left(\frac{t-s}{1+st}\right)^2\right]\left(-\frac{(1+st)^2}{1+t^2}\right)w_s=t-\frac{t-s}{1+st}$$

$$w_t=\frac{s}{1+st}$$

$$w(s,t)=\int w_t dt=\int\frac{s}{1+st}dt+f(s)$$

$$w(s,t)=\ln|1+st|+f(s)$$

אבל קיבלנו קודם:

$$s=\frac{x-y}{1+xy}$$

פתרון כללי:

$$\Rightarrow u(x,y)=\ln|\frac{1+x^2}{1+xy}|+f(\frac{x-y}{1+xy})$$

1.5.1 נחפש פתרון פרטי:

$$u(0,y)=1+y^2 \Rightarrow u(0,y)=\ln|\frac{1}{1}|+f(\frac{-y}{1})=1+y^2$$

$$f(-y)=1+y^2$$

$$-y=z \Rightarrow f(z)=1+z^2$$

$$f(\frac{x-y}{1+xy})=1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\ln|\frac{1+x^2}{1+xy}|+1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2$$

1.5.2 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x)=0 \Rightarrow u(x,x)=\ln|\frac{1+x^2}{1+x^2}|+f(\frac{x-x}{1+x^2})=0$$

$$f(0)=0$$

קיימים אינסוף פיתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $f(0)=0$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(0,0)$ תתאים.

1.5.3 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x)=x \Rightarrow u(x,x)=\ln|\frac{1+x^2}{1+x^2}|+f(\frac{x-x}{1+x^2})=x$$

$$f(0)=x$$

לא קיים פיתרון המקיים את התנאי.

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.6 תרגיל.

נתונה המשוואה
$$u_x + b(x,y)u_y + 2x(y^2 - x^2)e^y u = x,$$
ונתונים הקווים האופייניים שלה
$$ce^{-y} = x^2 - y^2$$
.

1.6.1

חשב את $b(x,y)$.

1.6.2

מצא פיתרון כללי של המישווה עבור $b(x,y)$ אשר מצאת בסעיף 1.6.1

1.6.3

איזה תנאים חייבים לדרוש עבור $u(x,y)$ על העקום $x^2 - y^2 = e^{-y}$ אם ידוע שקיים פיתרון אך אינו יחיד?

פתרון:

1.6.1 כותבים את המד"ר:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{1}$$
משפחת קווים אופיניים $ce^{-y} = x^2 - y^2$ היא פתרון של המד"ר. לכן עלינו למצוא מד"ר המתאים לפתרון הזה. לשם כך נגזור את מישפחת העקומים הזו לפי x. ונקבל מד"ר שמגדיר לנו מקדם $b(x,y)$. כותבים הפתרון בצורה סתומה:
$$c = \left(x^2 - y^2\right)e^y$$
נגזור:
$$0 = \left(x^2 - y^2\right)e^y y' + (2x - 2yy')\, e^y$$
ונקבל מד"ר:
$$y' = -\frac{2x}{x^2 - y^2 - 2y}$$

ונקבל מקדם $b(x,y)$:

$$b(x,y) = -\frac{2x}{x^2 - y^2 - 2y}$$

1.6.2 מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow s(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) e^y$$

נבצה החלפת המשתנים

$$\Rightarrow \begin{cases} s(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) e^y \\ t(x,y) = x \\ w(s,t) = u(x,y) \end{cases}$$

מקבלים ע"י כלל השרשרת:

$$u_x = w_s s_x + w_t t_x = w_s \cdot (2xe^y) + w_t \cdot 1;$$

$$u_y = w_s s_y + w_t t_y = w_s \cdot \left[\left(x^2 - y^2\right) e^y - 2ye^y\right] + w_t \cdot 0$$

מציבים בתוך המשוואה הנתונה ומקבלים:

$$w_s \cdot (2xe^y) + w_t - \frac{2x}{x^2 - y^2 - 2y} w_s \cdot \left[\left(x^2 - y^2\right) e^y - 2ye^y\right] + 2x(y^2 - x^2)e^y w = x$$

$$w_t + 2x(y^2 - x^2)e^y w = x$$

$$w_t - 2stw = t$$

נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(t)$ כך ש:

$$\mu(t)\left[w_t - 2stw\right] = \left[\mu(t)w\right]_t$$

$$\mu(t)\left[w_t - 2stw\right] = \mu_t(t)w + \mu(t)w_t$$

$$-2st\mu(t) = \mu_t(t)$$

$$\Rightarrow \mu(t) = e^{-st^2}$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu(t) = e^{-st^2}$

$$\Rightarrow e^{-st^2}\left[w_t - 2stw\right] = e^{-st^2}t$$

$$\Rightarrow \left[e^{-st^2}w\right]_t = te^{-st^2}$$

$$e^{-st^2}w(s,t) = \int te^{-st^2}dt + f(s) = -\frac{1}{2s}e^{-st^2} + f(s)$$

$$w(s,t) = -\frac{1}{2s} + e^{st^2}f(s)$$

אבל קיבלנו קודם:

$$s = \left(x^2 - y^2\right)e^y$$

פתרון כללי:

$$\Rightarrow u(x,y) = -\frac{1}{2\left(x^2-y^2\right)e^y} + e^{x^2\left(x^2-y^2\right)e^y}f\left(\left[x^2-y^2\right]e^y\right)$$

1.6.3

$$u = -\frac{1}{2e^ye^{-y}} + e^{x^2e^ye^{-y}}f\left(e^{-y}e^y\right) = -\frac{1}{2} + e^{x^2}f\left(1\right)$$

$$f(1) = \left[u + \frac{1}{2}\right]e^{-x^2} = const = c$$

$$\Rightarrow u = ce^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

u חייב ליהיות מהצורה: $u = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$.

1 מד"ח קוזוי-לינארית מסדר ראשון

הצורה הכללית של מד"ח קוזוי-לינארית מסדר ראשון היא:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u),$$

בתחום Ω במרחב xyu כאשר b,a ו- c הן פונקציות רציפות עם נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון ב- Ω ו- a ו- b הן לא שתיהן 0. כמובן מד"ח ליניארית מסדר ראשון היא מקרה פרטי, כאשר a ו- b לא תלויות ב- u ו- c היא פונקציה ליניארית של u.

ניתן להתבונן במשוואה באופן:

$$(a,b,c)\cdot(u_x,u_y,-1) = 0$$

מכיוון ש $(u_x,u_y,-1)$ הוא נורמל למשטח u , הווקטור (a,b,c) נמצא במישור המשיק למשטח הפתרון. מכאן מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,u) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u) \\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u) \end{cases}$$

מגדירה משפחה של עקומים מרחביים הנמצעים על משטח הפתרון המבוקש (כמובן בתנאי שתנאי ההתחלה של כל עקום על המשטח). זוהי מערכת משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון הנקראת מערכת משוואות האופיינים.

כדי לקבוע את הקו האופייני אנו נדרשים לתנאי התחלה,כלומר עלינו לדעת מהיכן "יוצא" העקום. נדרוש שתנאי ההתחלה לכל עקום אופייני ימצא על העקום ההתחלתי. על מנת להדגיש את העובדה שכל אחד מהעקומים $(x(t),y(t),u(t))$ יוצא מנקודה s שונה לאורך העקום ההתחלתי, נציין במפורש את העקומים באופן $(x(t,s),y(t,s),u(t,s))$ ונרשום את תנאי ההתחלה באופן:

$$\begin{cases} x(0,s) = x_0(s) \\ y(0,s) = y_0(s) \\ u(0,s) = u_0(s) \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t=0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

כדי לפתור את בעיית ההתחלה אנחנו "מעבירים" קו אופיני של המשווה דרך כל נקודה ב-$\mathcal{C}$. את משפחת הקווים האופיניים אנחנו מקבלים ע"י פתרון של

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,u) \Rightarrow x = x(s,t) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u) \Rightarrow y = y(s,t) \\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u) \Rightarrow u = u(s,t) \end{cases}$$

כאשר s הוא פרמטר של העקום $\mathcal{C}$.

<u>תנאי הטרנסברסליות :</u>

נגדיר

$$\triangle = a\frac{dy_0}{ds} - b\frac{dx_0}{ds}$$

אפשר להוכיח שאם $\triangle \neq 0$ בכל נקודה על $\mathcal{C}$, אזי לבעיית ההתחלה קיים פתרון אחד ויחיד בסביבת קו ההתחלה. אם $\triangle = 0$ בכל נקודה על $\mathcal{C}$, אזי לבעיית ההתחלה אין פתרון אלא אם כן $\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

1.1 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x + \pi u_y = 0 \\ u(x, \pi x - 7) = 3 \end{cases}$$

פתרון:

מערכת <u>משוואות האופייניים:</u>

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,u) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u) = \pi \\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow x = t + c_1 \\ \frac{dy}{dt} = \pi \Rightarrow y = \pi t + c_2 \\ \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u = c_3 \end{cases}$$

נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(x,\pi x-7)=3$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s)=s \\ y(0,s)=\pi s-7 \\ u(0,s)=3 \end{cases}$$

$$u=3$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי.

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{1}(\pi s-7)_s - \overbrace{(\pi)}(s)_s = \pi - \pi = 0$$

$\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.
משוואות האופיינים:

$$\begin{cases} x=t+c_1 \\ y=\pi t+c_2 \\ u=c_3 \end{cases}$$

משוואת $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x(0,s)=s \\ y(0,s)=\pi s-7 \\ u(0,s)=3 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

1.2 תרגיל.

1.2.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x+xu_y=0, y>0 \\ u(0,y)=2y \end{cases}$$

1.2.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x+xu_y=0, y>0 \\ u(2y,y)=\sin y^2 \end{cases}$$

1.2.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(y, y) = e^y \end{cases}$$

1.2.4 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(-y, y) = \pi \end{cases}$$

1.2.5 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(x, -\sqrt{5 + x^2}) = \tan x \end{cases}$$

1.2.6 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(x, \sqrt{5 + x^2}) = -5 \end{cases}$$

פתרון:

מערכת <u>משוואות האופייניים</u>:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, u) = y \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, u) = x \\ \frac{du}{dt} = c(x, y, u) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \to x' = y \to x'' = y' \\ \frac{dy}{dt} = x \to y' = x = x'' \\ \frac{du}{dt} = 0 \to u = c_3 \end{cases}$$

$$x'' = x \Rightarrow x'' - x = 0$$

נפתור משוואה ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים.
פולינום אופייני:

$$r^2 - 1 = 0$$

ערכים עצמיים:

$$r_{1,2} = \pm 1$$

פתרון כללי:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

$$y' = x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \Rightarrow y = \int \left(c_1 e^{-t} + c_2 e^t \right) dt$$

$$y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ u = c_3 \end{cases}$$

1.2.1 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(0, y) = 2y$ באופן:

$$\begin{cases} x(0, s) = 0 \\ y(0, s) = s \\ u(0, s) = 2s \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t = 0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0, s) = c_1 e^{-0} + c_2 e^0 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{1}{2} s \\ y(0, s) = -c_1 e^{-0} + c_2 e^0 = s \rightarrow c_1 = -\frac{1}{2} s \\ u(0, s) = c_3 = 2s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} s e^{-t} + \frac{1}{2} s e^t \\ y = \frac{1}{2} s e^{-t} + \frac{1}{2} s e^t \\ u = 2s \end{cases}$$

$$x + y = s e^t, x - y = -s e^{-t} \Rightarrow (x + y) \cdot (x - y) = -s^2$$

$$y^2 - x^2 = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{y^2 - x^2}$$

$$+ \Leftarrow y = \frac{1}{2}s(e^{-t}+e^{t}) > 0, (e^{-t}+e^{t}) > 0 \Rightarrow s > 0$$

$$u = 2s \Rightarrow u(x,y) = 2\sqrt{y^2 - x^2}$$

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{s}(s)_s - \overbrace{(0)}(0)_s = s \cdot 1 = s > 0 \Rightarrow \triangle \neq 0$$

1.2.2 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(2y,y)=\sin y^2$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s) = 2s \\ y(0,s) = s \\ u(0,s) = \sin s^2 \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t=0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0,s) = c_1e^{-0} + c_2e^{0} = 2s \rightarrow c_2 = \frac{3}{2}s \\ y(0,s) = -c_1e^{-0} + c_2e^{0} = s \rightarrow c_1 = \frac{1}{2}s \\ u(0,s) = c_3 = \sin s^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}se^{-t} + \frac{3}{2}se^{t} \\ y = -\frac{1}{2}se^{-t} + \frac{3}{2}se^{t} \\ u = \sin s^2 \end{cases}$$

$$x + y = 3se^{t}, x - y = se^{-t} \Rightarrow (x+y)\cdot(x-y) = 3s^2$$

$$x^2 - y^2 = 3s^2 \Rightarrow s^2 = \frac{1}{3}(x^2 - y^2)$$

$$u = \sin s^2 \Rightarrow u(x,y) = \sin\left[\frac{1}{3}(x^2-y^2)\right]$$

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{s}(s)_s - \overbrace{(2s)}(2s)_s = -3s \Rightarrow \triangle \neq 0$$

1.2.3 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(y,y)=e^y$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s)=s \\ y(0,s)=s \\ u(0,s)=e^s \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t=0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x(0,s)=c_1e^{-0}+c_2e^0=s \to c_2=s \\ y(0,s)=-c_1e^{-0}+c_2e^0=s \to c_1=0 \\ u(0,s)=c_3=e^s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=se^t \\ y=se^t \\ u=e^s \end{cases}$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{s}(s)_s - \overbrace{(s)}(s)_s = 0$$

משוואות האופיינים:

$$\begin{cases} x=c_1e^{-t}+c_2e^t \\ y=-c_1e^{-t}+c_2e^t \\ u=c_3 \end{cases}$$

משוואת $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x(0,s)=s \\ y(0,s)=s \\ u(0,s)=e^s \end{cases}$$

אם $\Delta=0$ בכל נקודה על $\mathcal{C}$, אזי לבעיית ההתחלה אין פתרון אלא אם כן $\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

1.2.4 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(-y,y)=\pi$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s)=-s \\ y(0,s)=s \\ u(0,s)=\pi \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t=0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

$$t=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x(0,s)=c_1e^{-0}+c_2e^{0}=-s \to c_2=0 \\ y(0,s)=-c_1e^{-0}+c_2e^{0}=s \to c_1=-s \\ u(0,s)=c_3=\pi \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=-se^{-t} \\ y=se^{-t} \\ u=\pi \end{array} \right.$$

$$u=\pi$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי.

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{s}(s)_s - \overbrace{(-s)}(-s)_s = 0$$

$\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

משוואות האופיינים:

$$\left\{ \begin{array}{c} x=c_1e^{-t}+c_2e^{t} \\ y=-c_1e^{-t}+c_2e^{t} \\ u=c_3 \end{array} \right.$$

משוואת $\mathcal{C}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x(0,s)=-s \\ y(0,s)=s \\ u(0,s)=\pi \end{array} \right.$$

אם $\triangle=0$ בכל נקודה על $\mathcal{C}$, אזי לבעיית ההתחלה אין פתרון אלא אם כן $\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

1.2.5 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(x,-\sqrt{5+x^2}) = \tan x$ באופן:

$$\left\{ \begin{array}{c} x(0,s)=s \\ y(0,s)=-\sqrt{5+s^2} \\ u(0,s)=\tan s \end{array} \right.$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t=0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

$$t=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x(0,s)=c_1e^{-0}+c_2e^{0}=s \to c_2=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sqrt{5+s^2} \\ y(0,s)=-c_1e^{-0}+c_2e^{0}=-\sqrt{5+s^2} \to c_1=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sqrt{5+s^2} \\ u(0,s)=c_3=\tan s \end{array} \right.$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{-\sqrt{5+s^2}}(-\sqrt{5+s^2})_s - \overbrace{(s)}(s)_s = 0$$

משוואות האופיינים:

$$\begin{cases} x = c_1e^{-t} + c_2e^t \\ y = -c_1e^{-t} + c_2e^t \\ u = c_3 \end{cases}$$

משוואת $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = -\sqrt{5+s^2} \\ u(0,s) = \tan s \end{cases}$$

אם $\Delta = 0$ בכל נקודה על $\mathcal{C}$, אזי לבעיית ההתחלה אין פתרון אלא אם כן $\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

1.2.6 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(x,\sqrt{5+x^2}) = -5$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = \sqrt{5+s^2} \\ u(0,s) = -5 \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t=0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0,s) = c_1e^{-0} + c_2e^0 = s \to c_2 = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{5+s^2} \\ y(0,s) = -c_1e^{-0} + c_2e^0 = \sqrt{5+s^2} \to c_1 = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sqrt{5+s^2} \\ u(0,s) = c_3 = -5 \end{cases}$$

$$u = -5$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי.

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{-\sqrt{5+s^2}}(-\sqrt{5+s^2})_s - \overbrace{(s)}(s)_s = 0$$

$\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.3 תרגיל.

1.3.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(2, y) = y - 4 \end{cases}$$

1.3.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(x, x^2 + cx) = e^x \end{cases}$$

1.3.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(x, x^2 + cx) = x \end{cases}$$

1.3.4 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(x, x^2 + cx) = 2 \end{cases}$$

פתרון:

מערכת <u>משוואות האופיינים:</u>

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, u) = x \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, u) = y + x^2 \\ \frac{du}{dt} = c(x, y, u) = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int dt \Rightarrow \ln|x| = t + c_1 \Rightarrow x = c_1 e^t \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y + (c_1 e^t)^2 \\ \frac{du}{dt} = u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int dt \Rightarrow \ln|u| = t + c_3 \Rightarrow u = c_3 e^t \end{cases}$$

$$2 \to y' = y + (c_1 e^t)^2 \Rightarrow y' - y = c_1^2 e^{2t}$$

נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(t)$ כך ש:

$$\mu(t)\left[y' - y\right] = \left[\mu(t) y\right]'$$

$$\mu(t)\left[y' - y\right] = \mu'(t) y + \mu(t) y'$$

$$-\mu(t) = \mu'(t)$$

$$\Rightarrow \mu(t) = e^{-t}$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu(t) = e^{-t}$

$$e^{-t}\left[y' - y\right] = e^{-t} c_1^2 e^{2t}$$

$$\Rightarrow \left[e^{-t} y\right]' = c_1^2 e^t$$

$$e^{-t} y = \int c_1^2 e^t dt + c_2$$

$$y = c_1^2 e^{2t} + e^t c_2$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1^2 e^{2t} + e^t c_2 \\ u = c_3 e^t \end{cases}$$

1.3.1 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(2, y) = y - 4$ באופן:

$$\begin{cases} x(0, s) = 2 \\ y(0, s) = s \\ u(0, s) = s - 4 \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t = 0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^0 = 2 \Rightarrow c_1 = 2 \\ y = c_1^2 e^0 + e^0 c_2 = s \Rightarrow c_2 = s - 4 \\ u = c_3 e^0 = s - 4 \Rightarrow c_3 = s - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2e^t \\ y = 4e^{2t} + (s-4)e^t \\ u = (s-4)e^t \end{cases}$$

$$2 \rightarrow (s-4)e^t = y - 4e^{2t} = y - x^2$$

$$u = (s-4)e^t = y - x^2 \Rightarrow u(x,y) = y - x^2$$

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{2}(s)_s - \overbrace{(s+4)}(2)_s = 2 - 0 \Rightarrow \triangle \neq 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = y - x^2$$

1.3.2 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(x, x^2 + cx) = e^x$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = s^2 + cs \\ u(0,s) = e^s \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t = 0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי. כמובן שכל בחירה אחרת לגיטימית באותה מידה.

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^0 = s \Rightarrow c_1 = s \\ y = c_1^2 e^0 + e^0 c_2 = s^2 + cs \Rightarrow c_2 = cs \\ u = c_3 e^0 = e^s \Rightarrow c_3 = e^s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = se^t \\ y = s^2 e^{2t} + cse^t \\ u = e^s e^t \end{cases}$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{s}(s^2 + cs)_s - \overbrace{[(s^2 + cs) + s^2]}(s)_s = 2s^2 + cs - [(s^2 + cs) + s^2] = 0$$

משוואות האופיינים:

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1^2 e^{2t} + e^t c_2 \\ u = c_3 e^t \end{cases}$$

משוואת $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = s^2 + cs \\ u(0,s) = e^s \end{cases}$$

אם $\Delta = 0$ בכל נקודה על $\mathcal{C}$, אזי לבעיית ההתחלה אין פתרון אלא אם כן $\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

1.3.3 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(x, x^2 + cx) = x$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = s^2 + cs \\ u(0,s) = s \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^0 = s \Rightarrow c_1 = s \\ y = c_1^2 e^0 + e^0 c_2 = s^2 + cs \Rightarrow c_2 = cs \\ u = c_3 e^0 = s \Rightarrow c_3 = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = se^t \\ y = s^2 e^{2t} + cse^t \\ u = se^t \end{cases}$$

$$u = se^t = x$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי.

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{s}(s^2+cs)_s - \overbrace{[(s^2+cs)+s^2]}(s)_s = 2s^2+cs-[(s^2+cs)+s^2] = 0$$

$\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות. משוואות האופיינים:

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1^2 e^{2t} + e^t c_2 \\ u = c_3 e^t \end{cases}$$

משוואת $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = s^2 + cs \\ u(0,s) = s \end{cases}$$

אם $\Delta = 0$ בכל נקודה על $\mathcal{C}$, אזי לבעיית ההתחלה אין פתרון אלא אם כן $\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

1.3.4 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(x, x^2 + cx) = 2$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = s^2 + cs \\ u(0,s) = 2 \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^0 = s \Rightarrow c_1 = s \\ y = c_1^2 e^0 + e^0 c_2 = s^2 + cs \Rightarrow c_2 = cs \\ u = c_3 e^0 = 2 \Rightarrow c_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = se^t \\ y = s^2 e^{2t} + cse^t \\ u = 2e^t \end{cases}$$

$$u = 2e^t \neq 2$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{s}(s^2+cs)_s - \overbrace{[(s^2+cs)+s^2]}(s)_s = 2s^2+cs-[(s^2+cs)+s^2] = 0$$

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.4 תרגיל.

1.4.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x + 2xu_y + u = x \\ u(1,y) = y \end{cases}$$

1.4.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x + 2xu_y + u = x \\ u(x,x^2) = x - 1 \end{cases}$$

1.4.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x + 2xu_y + u = x \\ u(x, x^2) = x \end{cases}$$

פתרון:

מערכת <u>משוואות האופיינים:</u>

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,u) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u) = 2x \\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u) = -u + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow x = t + c_1 \\ \frac{dy}{dt} = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2(t + c_1) \Rightarrow y = t^2 + 2c_1 t + c_2 \\ \frac{du}{dt} = -u + x \Rightarrow \frac{du}{dt} = -u + t + c_1 \end{cases}$$

$$3 \to u_t + u = t + c_1$$

נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(t)$ כך ש:

$$\mu(t)\left[u_t + u\right] = \left[\mu(t)u\right]_t$$

$$\mu(t)\left[u_t + u\right] = \mu_t(t)u + \mu(t)u_t$$

$$\mu(t) = \mu_t(t)$$

$$\Rightarrow \mu(t) = e^t$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu(t) = e^t$

$$e^t\left[u_t + u\right] = e^t(t + c_1)$$

$$\Rightarrow \left[e^t u\right]_t = e^t t + c_1 e^t$$

$$e^t u = \int (e^t t + c_1 e^t)dt + c_3$$

$$e^t u = e^t t - e^t + c_1 e^t + c_3$$

$$u = t - 1 + c_1 + e^{-t} c_3$$

$$\begin{cases} x = t + c_1 \\ y = t^2 + 2c_1 t + c_2 \\ u = t - 1 + c_1 + e^{-t} c_3 \end{cases}$$

1.4.1 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(1,y) = y$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s) = 1 \\ y(0,s) = s \\ u(0,s) = s \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ y = c_2 = s \Rightarrow c_2 = s \\ u = -1 + c_1 + e^0 c_3 = s \Rightarrow c_3 = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 2t + s \\ u = t + se^{-t} \end{cases}$$

$$1 \to t = x - 1$$

$$2 \to s = y - (t^2 + 2t + 1 - 1) = y - (t+1)^2 + 1 = y - x^2 + 1$$

$$3 \to u = t + se^{-t} = x - 1 + (y - x^2 + 1)e^{1-x}$$

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{1}(s)_s - \overbrace{(2)}(1)_s = 1 - 0 \Rightarrow \triangle \neq 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x - 1 + e^{1-x}(y - x^2 + 1)$$

1.4.2 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(x,x^2)=x-1$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s)=s \\ y(0,s)=s^2 \\ u(0,s)=s-1 \end{cases}$$

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=c_1=s \Rightarrow c_1=s \\ y=c_2=s^2 \Rightarrow c_2=s^2 \\ u=-1+c_1+e^0c_3=s-1 \Rightarrow c_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t+s \\ y=t^2+2st+s^2 \Rightarrow y=(s+t)^2 \\ u=t-1+s+0\cdot e^{-t} \Rightarrow u=t+s-1 \end{cases}$$

$$u=t+s-1=x-1$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי.

$$\triangle = ay_s-bx_s=\overbrace{1}(s^2)_s-\overbrace{(2s)}(s)_s=2s-2s=0$$

$\mathcal{C}$ הוא עקום אופייני ואז קיימים אינסוף פתרונות.

1.4.3 נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(x,x^2)=x$ באופן:

$$\begin{cases} x(0,s)=s \\ y(0,s)=s^2 \\ u(0,s)=s \end{cases}$$

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=c_1=s \Rightarrow c_1=s \\ y=c_2=s^2 \Rightarrow c_2=s^2 \\ u=-1+c_1+e^0c_3=s \Rightarrow c_3=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t+s \\ y=t^2+2st+s^2 \Rightarrow y=(s+t)^2 \\ u=t-1+s+1\cdot e^{-t} \end{cases}$$

$$u=t+s-1+e^{-t}\neq x$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

$$\triangle = ay_s-bx_s=\overbrace{1}(s)_s-\overbrace{(2)}(1)_s=1-0 \Rightarrow \triangle \neq 0$$

1.5 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאי הבא:

$$\begin{cases} (y^2-u^2)u_x - xyu_y = xu \\ u(x,x) = x, x > 0 \end{cases}$$

פתרון:

$x > 0 \Rightarrow x \neq 0$

$$\frac{y^2-u^2}{x}u_x - yu_y = u$$

מערכת <u>משוואות האופיינים</u>:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,u) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u) \\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y^2-u^2}{x} \\ \frac{dy}{dt} = -y \\ \frac{du}{dt} = u \end{cases}$$

$$3 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int dt \Rightarrow \ln|u| = t + c_1$$

$$u = c_1 e^t$$

$$2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dt \Rightarrow \ln|y| = -t + c_2$$

$$y = c_2 e^{-t}$$

$$1 \Rightarrow \int x dx = \int \left[\left(c_2 e^{-t}\right)^2 - \left(c_1 e^t\right)^2\right] dt$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{c_2^2 e^{-2t}}{-2} - \frac{c_1^2 e^{2t}}{2} + c_3$$

$$x^2 = -c_2^2 e^{-2t} - c_1^2 e^{2t} + c_3$$

$$x^2 = -y^2 - u^2 + c_3$$

פתרון כללי:

$$x^2 + y^2 + u^2 = c_3$$

$u(x, x) = x, x > 0$

$$\begin{cases} x(0, s) = s \\ y(0, s) = s \\ u(0, s) = s \end{cases}$$

נשים לב שבחרנו את הפרמטר t כך שעבור $t = 0$ האופיין נמצא על העקום ההתחלתי.

$$\begin{cases} u = c_1 e^0 = s \\ y = c_2 e^{-0} = s \\ x^2 = -c_2^2 e^{-2\cdot 0} - c_1^2 e^{2\cdot 0} + c_3 = s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = c_1 = s \\ y = c_2 = s \\ x^2 = -c_2^2 - c_1^2 + c_3 = s^2 \end{cases}$$

$$-s^2 - s^2 + c_3 = s^2 \Rightarrow c_3 = 3s^2$$

$$\begin{cases} u = c_1 e^t \Rightarrow u = se^t \\ y = c_2 e^{-t} \Rightarrow y = se^{-t} \\ x^2 + y^2 + u^2 = c_3 \Rightarrow x^2 + y^2 + u^2 = 3s^2 = 3uy \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + u^2 - 3uy = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2 - 4x^2 - 4y^2}}{2} = \frac{3y \pm \sqrt{5y^2 - 4x^2}}{2}$$

$u(x, x) = x, x > 0$

$$u_{1,2} = \frac{3x \pm \sqrt{x^2}}{2} = \frac{3x \pm x}{2} = x$$

$\Rightarrow \pm \to -$

$$\Rightarrow u = \frac{3y \pm \sqrt{5y^2 - 4x^2}}{2}$$

1.6 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_t + cu_x + u^2 = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

כאשר $c-$ מהירות קבועה , t מסמן זמן , ו x מסמן מרחק.

פתרון:

מערכת משוואות האופייניים:

$$\begin{cases} \frac{dt}{dr} = 1 \Rightarrow t = r + c_1 \\ \frac{dx}{dr} = c \Rightarrow x = cr + c_2 \\ \frac{du}{dr} = -u^2 \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = -\int dr \Rightarrow \frac{-1}{u} = -r + c_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = r + c_1 \\ x = cr + c_2 \\ u = \frac{1}{r+c_3} \end{cases}$$

נחפש פתרון פרטי: נרשום את תנאי ההתחלה $u(0,x) = x$ באופן:

$$\begin{cases} t(0,s) = 0 \\ x(0,s) = s \\ u(0,s) = s \end{cases}$$

$$r = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ x = c_2 = s \Rightarrow c_2 = s \\ u = \frac{1}{c_3} = s \Rightarrow c_3 = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = r \\ x = cr + s \\ u = \frac{1}{r+\frac{1}{s}} \Rightarrow u = \frac{s}{rs+1} \end{cases}$$

$$1 \rightarrow r = t$$

$$2 \rightarrow s = x - cr = x - ct$$

$$3 \rightarrow u = \frac{x - ct}{t(x-ct)+1}$$

$$\triangle = ax_s - bt_s = \overbrace{1}(s)_s - \overbrace{(c)}(0)_s = 1 - 0 \Rightarrow \triangle \neq 0$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{x - ct}{t(x - ct) + 1}$$

1.7 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} uu_x + u_y = -\frac{1}{2}u \\ u(x,0) = \sin x \end{cases}$$

פתרון:

מערכת <u>משוואות האופייניים:</u>

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,u) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u) \\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow y = t + c_2 \\ \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}u \end{cases}$$

$$3 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int dt \Rightarrow \ln|u| = -\frac{1}{2}t + c_3$$

$$u = c_3 e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\frac{dx}{dt} = u \Rightarrow \frac{dx}{dt} = c_3 e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$x = -2c_3 e^{-\frac{1}{2}t} + c_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2c_3 e^{-\frac{1}{2}t} + c_1 \\ y = t + c_2 \\ u = c_3 e^{-\frac{1}{2}t} \end{cases}$$

$$u(x,0)=\sin x$$

$$\begin{cases} x(0,s)=s \\ y(0,s)=0 \\ u(0,s)=\sin s \end{cases}$$

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2c_3e^0+c_1=s \Rightarrow c_1=s+2c_3=s+2\sin s \\ y=0+c_2=0 \Rightarrow c_2=0 \\ u=c_3e^0=\sin s \Rightarrow c_3=\sin s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2\sin s e^{-\frac{1}{2}t}+s+2\sin s \\ y=t \\ u=e^{-\frac{1}{2}t}\sin s \end{cases}$$

$$\triangle = ay_s-bx_s=\overbrace{\sin s}(0)_s-\overbrace{(1)}(s)_s=0-1 \Rightarrow \triangle \neq 0$$

1.8 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x+uu_y=x \\ u(x,x)=-2x \end{cases}$$

פתרון:

מערכת <u>משוואות האופייניים</u>:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=a(x,y,u) \\ \frac{dy}{dt}=b(x,y,u) \\ \frac{du}{dt}=c(x,y,u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y \Rightarrow x'=y \Rightarrow x''=y' \\ \frac{dy}{dt}=u \Rightarrow y'=u=x'' \Rightarrow u'=x''' \\ \frac{du}{dt}=x \Rightarrow u'=x=x''' \end{cases}$$

$$x'''-x=0$$

נפתור משוואה ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים.
פולינום אופייני:

$$r^3-1=0$$

ערכים עצמיים:

$$r_{1,2,3}=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{(\cos 0+i\sin 0)}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3};$$

$$k=0,1,2;$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 1\\ r_2 &= \cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3}=-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\ r_3 &= \cos\tfrac{4\pi}{3}+i\sin\tfrac{4\pi}{3}=-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

פתרון כללי:

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$y=x'=c_1e^t+e^{-t/2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_3-\frac{1}{2}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$u=y'=c_1e^t+e^{-t/2}\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_3-\frac{1}{2}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2-\frac{1}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$\begin{cases} x=c_1e^t+c_2e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=c_1e^t+e^{-t/2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_3-\frac{1}{2}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]\\ u=c_1e^t+e^{-t/2}\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_3-\frac{1}{2}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2-\frac{1}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]\end{cases}$$

$$u(x,x)=-2x$$

$$\begin{cases} x(0,s)=s\\ y(0,s)=s\\ u(0,s)=-2s\end{cases}$$

$$t=0\Rightarrow\begin{cases} x=c_1+c_2=s\\ y=c_1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_3-\frac{1}{2}c_2\right)=s\\ u=c_1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_3+\frac{1}{2}c_2\right)=-2s\Rightarrow\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1=0\\ c_2=s\\ c_3=\sqrt{3}s\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=se^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}se^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=e^{-t/2}\left[s\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}s\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]\\ u=-2se^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$$

$$-x-y=-2se^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t=u$$

$$u(x,y)=-x-y$$

$$\triangle=ay_s-bx_s=\overbrace{s}(s)_s-\overbrace{(-2s)}(s)_s=s-(-2s)=3s\Rightarrow\triangle\neq0$$

1.9 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xuu_x+yuu_y=x^2+y^2, x>0, y>0 \\ u(x,1)=\sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

פתרון:

$$x>0\Rightarrow x\neq0, y\neq0$$

$$\Rightarrow u(xu_x+yu_y)\neq0\Rightarrow u\neq0$$

$$\Rightarrow xu_x+yu_y=\frac{x^2+y^2}{u}$$

מערכת משוואות האופיינים:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=a(x,y,u)=x \\ \frac{dy}{dt}=b(x,y,u)=y \\ \frac{du}{dt}=c(x,y,u)=\frac{x^2+y^2}{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x\Rightarrow\ln x=t+c_1\Rightarrow x=c_1e^t \\ \frac{dy}{dt}=y\Rightarrow\ln y=t+c_2\Rightarrow y=c_2e^t \\ \frac{du}{dt}=\frac{x^2+y^2}{u} \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{x^2+y^2}{u}=\frac{c_1^2e^{2t}+c_2^2e^{2t}}{u}$$

$$\frac{u^2}{2} = \left(c_1^2 + c_2^2\right)\frac{e^{2t}}{2} + c_3$$

$$u = \pm\sqrt{\left(c_1^2 + c_2^2\right)e^{2t} + c_3}$$

פתרון כללי:

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_2 e^t \\ u = \pm\sqrt{\left(c_1^2 + c_2^2\right)e^{2t} + c_3} \end{cases}$$

$u(x,1) = \sqrt{x^2+1}$

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = 1 \\ u(0,s) = \sqrt{s^2+1} \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 = s \\ y = c_2 = 1 \\ u = \pm\sqrt{\left(c_1^2 + c_2^2\right) + c_3} = \sqrt{s^2+1} \Rightarrow c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = s \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = se^t \\ y = e^t \\ u = \sqrt{\left(s^2+1\right)e^{2t}} \end{cases}$$

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\triangle = ay_s - bx_s = \overbrace{s\sqrt{s^2+1}}(1)_s - \overbrace{(\sqrt{s^2+1})}(s)_s = \sqrt{s^2+1} \Rightarrow \triangle \neq 0$$

1.10 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיימים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1, x < 2 \\ u(x,x) = \frac{x}{2} \end{cases}$$

פתרון:

מערכת משוואות האופיינים:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,u) = u \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u) = 1 \\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow y = t + c_2 \\ \frac{du}{dt} = 1 \Rightarrow u = t + c_3 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = u = t + c_3 \Rightarrow x = \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_1$$

פתרון כללי:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_1 \\ y = t + c_2 \\ u = t + c_3 \end{cases}$$

$u(x,x) = \frac{x}{2}$

$$\begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = s \\ u(0,s) = \frac{s}{2} \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 = s \\ y = c_2 = s \\ u = c_3 = \frac{s}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + \frac{s}{2} t + s \\ y = t + s \\ u = t + \frac{s}{2} \end{cases}$$

$$t = y - s \Rightarrow 2x = y^2 - 2ys + s^2 + sy - s^2 + 2s \Rightarrow 2x = y^2 - ys + 2s$$

$$s = \frac{2x - y^2}{2 - y} \Rightarrow u = y - \frac{s}{2} = y - \frac{2x - y^2}{2(2-y)}$$

$$u(x,y) = y - \frac{2x - y^2}{2(2-y)}$$

$$\triangle = a y_s - b x_s = \overbrace{\frac{s}{2}}(s)_s - \overbrace{(1)}(s)_s = \frac{s}{2} - 1 \Rightarrow \triangle \neq 0, s \neq 2$$

1 שיטת לגרנג'

פתרון של-
$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u),$$
לפי הגישה הזאת ,נתון ע"י $F(\phi,\psi)=0$, כאשר ϕ ו-ψ הם משטחים אינטגרליים בלתי תלויים של
$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)}.$$
במסגרת זו אי-תלות משמעותה שהנורמלים למשטחים $\phi=c_1$ ו-$\psi=c_2$, עם c_1 ו- c_2 קבועים , הם לא מקבילים בשום נקודת חיתוך. החיתוך בין שני המשטחים
$$\phi=c_1, \psi=c_2,$$
נותן מערכת דו-פרמטרית של עקומים . קביעת התנאי $F(c_1,c_2)=0$ נותן משפחה חד- פרמטרית של עקומים אופיינים.

אין שיטה כללית כדי למצוא את ϕ ו-ψ אבל יש שתי שיטות שבדרך כלל עובדות: 1) עם לאחד משלושת זוגות המשוואות יש פתרון (ϕ למשל) התלוי רק בשני משתנים (xו-y לדוגמא) אז אם נכתוב y במונחים של x ו- ϕ בזוג השני , נקבל מד"ר שבה מעורבים רק uו-y וממנה אפשר לקבל את ψ .

2) ניתן להראות שלכל α,β,γ מתקיים
$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)} = \frac{\alpha dx+\beta dy+\gamma du}{\alpha a(x,y,u)+\beta b(x,y,u)+\gamma c(x,y,u)},$$
ואז אפשר לקבוע את α,β,γ בכדי למצוא פתרון פשוט . הבחירה $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$ נותנת $\alpha dx+\beta dy+\gamma du=0$ שלפעמים ניתן לפתור ישירות.

1.1 תרגיל. מצא 3 פתרונות למשוואה:

$$\begin{cases} u_x+\pi u_y=0 \\ u(x,\pi x-7)=3 \end{cases}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:
$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\pi} = \frac{du}{0}$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \pi dx$$

$$y = \pi x + c$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$y - \pi x = c_1$$

$$du = 0 \Rightarrow u = c_2$$

פתרון כללי:

$$F\left(u, y - \pi x\right) = 0$$

$$\Rightarrow u(x, y) = f(y - \pi x)$$

בכדי שהמשטח יכלול את העקום הנתון אנחנו מציבים את התנאי בפתרון הכללי ומקבלים. פתרון פרטי:

$$u(x, \pi x - 7) = 3 \Rightarrow f(\pi x - 7 - \pi x) = 3$$

$$f(-7) = 3$$

אז מתאימה כל פונקציה f שעוברת דרך נקודה : $(-7, 3)$

.1

$$f_1 = 3 \Rightarrow u_1(x, y) = 3$$

.2

$$z = y - \pi x \Rightarrow f_2(z) = -\frac{3}{7}z$$

$$\Rightarrow u_2(x, y) = -\frac{3}{7}(y - \pi x)$$

$$u(x, \pi x - 7) = -\frac{3}{7}(\pi x - 7 - \pi x) = 3$$

.3

$$f_3(z) = z + 10 \Rightarrow u_3(x,y) = y - \pi x + 10$$

$$u(x, \pi x - 7) = \pi x - 7 - \pi x + 10 = 3$$

1.2 תרגיל.

1.2.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(0,y) = 2y \end{cases}$$

1.2.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(2y,y) = \sin y^2 \end{cases}$$

1.2.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(y,y) = e^y \end{cases}$$

1.2.4 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(-y,y) = \pi \end{cases}$$

1.2.5 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(x, -\sqrt{5 + x^2}) = \tan x \end{cases}$$

1.2.6 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0, y > 0 \\ u(x, \sqrt{5+x^2}) = -5 \end{cases}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{0}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow \begin{cases} y \int dy = \int x dx & \Rightarrow & y^2 = x^2 + c_1 \Rightarrow y^2 - x^2 = c_1 \\ du = 0 & \Rightarrow & u = c_2 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$F\left(u, y^2 - x^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = f(y^2 - x^2)$$

בכדי שהמשטח יכלול את העקום הנתון אנחנו מציבים את התנאי בפתרון הכללי ומקבלים.

1.2.1 נחפש פתרון פרטי:

$$u(0,y) = 2y \Rightarrow f(y^2) = 2y$$

$$y^2 = z \Rightarrow y = \sqrt{z}, y > 0 \Rightarrow f(z) = 2\sqrt{z}$$

$$f(y^2 - x^2) = 2\sqrt{y^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = 2\sqrt{y^2 - x^2}$$

1.2.2 נחפש פתרון פרטי:

$$u(2y,y)=\sin y^2 \Rightarrow f(y^2-4y^2)=\sin y^2$$

$$-3y^2=z \Rightarrow f(z)=-\sin\frac{z}{3}$$

$$f(y^2-x^2)=-\sin\frac{y^2-x^2}{3}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=-\sin\frac{y^2-x^2}{3}$$

1.2.3 נחפש פתרון פרטי:

$$u(y,y)=e^y \Rightarrow f(y^2-y^2)=e^y$$

$$\Rightarrow f(0)=e^y$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

1.2.4 נחפש פתרון פרטי:

$$u(-y,y)=\pi \Rightarrow f(y^2-y^2)=\pi$$

$$\Rightarrow f(0)=\pi$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $f(0)=\pi$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(0,\pi)$ תתאים.

1.2.5 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,-\sqrt{5+x^2})=\tan x \Rightarrow f(5+x^2-x^2)=\tan x$$

$$\Rightarrow f(5)=\tan x$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

1.2.6 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,\sqrt{5+x^2})=-5\Rightarrow f(5+x^2-x^2)=-5$$

$$\Rightarrow f(5)=-5$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $f(5)=-5$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(5,-5)$ תתאים.

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.3 תרגיל.

1.3.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x+(y+x^2)u_y-u=0 \\ u(2,y)=y-4 \end{cases}$$

1.3.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x+(y+x^2)u_y-u=0 \\ u(x,x^2+cx)=e^x \end{cases}$$

1.3.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x+(y+x^2)u_y-u=0 \\ u(x,x^2+cx)=x \end{cases}$$

1.3.4 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xu_x + (y + x^2)u_y - u = 0 \\ u(x, x^2 + cx) = 2 \end{cases}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+x^2} & \Rightarrow \quad y + x^2 = xy' & \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = x \\ \frac{dx}{x} = \frac{du}{u} & \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|x| + c_2 & \Rightarrow u = c_2 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = x$$

נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(x)$ כך ש:

$$\mu(x)\left[y' - \frac{1}{x}y\right] = [\mu(x)y]'$$

$$\mu(x)\left[y' - \frac{1}{x}y\right] = \mu'(x)y + \mu(x)y'$$

$$-\frac{\mu(x)}{x} = \mu'(x)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x}$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\left[y' - \frac{1}{x}y\right] = \frac{1}{x}x$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{x}y\right]' = 1$$

$$\frac{y}{x} = x + c_1$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} - x = c_1 \\ \frac{u}{x} = c_2 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$G\left(\frac{u}{x}, \frac{y}{x} - x\right) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = xF(\frac{y - x^2}{x})$$

בכדי שהמשטח יכלול את העקום הנתון אנחנו מציבים את התנאי בפתרון הכללי ומקבלים.

1.3.1 נחפש פתרון פרטי:

$$u(2,y) = y - 4 \Rightarrow u(2,y) = 2F(\frac{y - 2^2}{2}) = y - 4$$

$$\frac{y-4}{2} = z \Rightarrow F(z) = z$$

$$F(\frac{y - x^2}{x}) = \frac{y - x^2}{x}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x\frac{y - x^2}{x}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = y - x^2$$

1.3.2 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x, x^2 + cx) = e^x \Rightarrow u(x, x^2 + cx) = xF(\frac{x^2 + cx - x^2}{x}) = e^x$$

$$\Rightarrow u(x, x^2 + cx) = xF(c) = e^x$$

$$\Rightarrow F(c) = \frac{e^x}{x}$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

1.3.3 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2+cx)=x \Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(\frac{x^2+cx-x^2}{x})=x$$

$$\Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(c)=x$$

$$\Rightarrow F(c)=1$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $F(c)=1$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(c,1)$ תתאים.

1.3.4 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2+cx)=2 \Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(\frac{x^2+cx-x^2}{x})=2$$

$$\Rightarrow u(x,x^2+cx)=xF(c)=2$$

$$\Rightarrow F(c)=\frac{2}{x}$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.4 תרגיל.

1.4.1 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x+2xu_y+u=x \\ u(1,y)=y \end{cases}$$

1.4.2 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x+2xu_y+u=x \\ u(x,x^2)=x-1 \end{cases}$$

1.4.3 מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_x + 2xu_y + u = x \\ u(x, x^2) = x \end{cases}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2x} = \frac{du}{x-u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{1} = \frac{dy}{2x} & \Rightarrow & \int dy = \int 2x dx & \Rightarrow y = x^2 + c_1 \\ \frac{dx}{1} = \frac{du}{x-u} & \Rightarrow & x - u = u' & \Rightarrow u' + u = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u' + u = x$$

נמצא גורם אינטגרציה $\mu = \mu(x)$ כך ש:

$$\mu(x)\left[u' + u\right] = \left[\mu(x)u\right]'$$

$$\mu(x)\left[u' + u\right] = \mu'(x)u + \mu(x)u'$$

$$\mu(x) = \mu'(x)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^x$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב $\mu(x) = e^x$

$$\Rightarrow e^x\left[u' + u\right] = e^x x$$

$$\Rightarrow \left[e^x u\right]' = e^x x$$

$$e^x u = e^x x - e^x + c_2$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow \begin{cases} y-x^2=c_1 \\ e^x\left(u-x+1\right)=c_2 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$F\left(e^x\left(u-x+1\right), y-x^2\right)=0$$

$$e^x\left(u-x+1\right)=f\left(y-x^2\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=x-1+e^{-x}f\left(y-x^2\right)$$

בכדי שהמשטח יכלול את העקום הנתון אנחנו מציבים את התנאי בפתרון הכללי ומקבלים.

1.4.1 נחפש פתרון פרטי:

$$u(1,y)=y \Rightarrow u(1,y)=1-1+e^{-1}f(y-1)=y$$

$$f(y-1)=ey$$

$$y-1=z \Rightarrow f(z)=e(z+1)$$

$$f(y-x^2)=e(y-x^2+1)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=x-1+e^{-x}e(y-x^2+1)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=x-1+e^{1-x}(y-x^2+1)$$

1.4.2 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2)=x-1 \Rightarrow u(x,x^2)=x-1+e^{-x}f(x^2-x^2)=x-1$$

$$f(0)=0$$

קיימים אינסוף פתרונות המקיימים את התנאי כיוון שהאילוץ היחיד הוא ש- $f(0)=0$. כלומר כל פונקציה שעוברת דרך הנקודה $(0,0)$ תתאים.

1.4.3 נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,x^2)=x\Rightarrow u(x,x^2)=x-1+e^{-x}f(x^2-x^2)=x$$

$$f(0)=e^x$$

לא קיים פתרון המקיים את התנאי.

מה ההבדל בין מקרים שעבורם יש פתרון יחיד ,לבין מקרים שעבורם אין קיום ויחידות?

במקרים האחרונים תנאי ההתחלה נתונים על קו אופייני.

1.5 תרגיל.מצא את הפיתרון הכללי של:

$$uu_x+u_y=-\frac{1}{2}u$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{1}=\frac{du}{-\frac{1}{2}u}$$

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{1}=\frac{2du}{-u}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{u}=\frac{2du}{-u} & \Rightarrow \quad \frac{dx+2du}{u+(-u)}=\frac{dx+2du}{0} & \Rightarrow x+2u=c_1\\ dy=\frac{2du}{-u} & \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}y=\ln|u|+c_2 & \Rightarrow u=c_2e^{-\frac{1}{2}y}\end{cases}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow\begin{cases}x+2u=c_1\\ ue^{\frac{1}{2}y}=c_2\end{cases}$$

פתרון כללי:

$$F\left(x+2u,ue^{\frac{1}{2}y}\right)=0$$

1.6 תרגיל.מצא את הפיתרון הכללי של:

$$u_x + \frac{x-u}{u-y}u_y = \frac{y-x}{u-y}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\frac{x-u}{u-y}} = \frac{du}{\frac{y-x}{u-y}}$$

$$\frac{dx}{u-y} = \frac{dy}{x-u} = \frac{du}{y-x}$$

$$\frac{dx}{u-y} = \frac{dy}{x-u} = \frac{du}{y-x} = \frac{dx+dy+du}{\underbrace{u-y}_{}+\underbrace{x-u}_{}+\underbrace{y-x}_{}} = \frac{dx+dy+du}{0}$$

$$= \frac{d(x+y+u)}{0} \Rightarrow x+y+u = c_1$$

$$\frac{2xdx}{2x(u-y)} = \frac{2ydy}{2y(x-u)} = \frac{2udu}{2u(y-x)} = \frac{2xdx+2ydy+2du}{\underbrace{2x(u-y}_{}+\underbrace{2y(x-u)}_{}+\underbrace{2u(y-x)}_{}}$$

$$= \frac{d(x^2+y^2+u^2)}{0} \Rightarrow x^2+y^2+u^2 = c_1$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+u = c_1 \\ x^2+y^2+u^2 = c_2 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$F\left(x+y+u, x^2+y^2+u^2\right) = 0$$

1.7 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} xuu_x + yuu_y = x^2+y^2, x>0, y>0 \\ u(x,1) = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{x^2+y^2}$$

$$\frac{xdx}{x^2u} = \frac{ydy}{y^2u} = \frac{-udu}{-u\left(x^2+y^2\right)} = \frac{xdx+ydy-udu}{\underbrace{x^2u}+\underbrace{y^2u}-\underbrace{u\left(x^2+y^2\right)}} =$$

$$= \frac{xdx+ydy-udu}{0} = \frac{d(x^2+y^2-u^2)}{0} \Rightarrow x^2+y^2-u^2 = c_1$$

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 \Rightarrow y = c_2 x$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-u^2 = c_1 \\ \frac{y}{x} = c_2 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$F\left(x^2+y^2-u^2, \frac{y}{x}\right) = 0$$

$$x^2+y^2-u^2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

בכדי שהמשטח יכלול את העקום הנתון אנחנו מציבים את התנאי בפתרון הכללי ומקבלים. $u(x,1) = \sqrt{x^2+1}$

$$u^2(x,1) = x^2+1^2+f\left(\frac{1}{x}\right) = (\sqrt{x^2+1})^2$$

$$x^2+1^2+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+1$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow f\left(z\right)=0$$

$$x^2+y^2-u^2=0\Rightarrow u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

בוחרים סימן "+" כי נתון ש- $u(x,1)=\sqrt{x^2+1}$ ז.א. $u(x,1)>0$

1.8 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} uu_x+u_y=1, x<2 \\ u(x,x)=\frac{x}{2} \end{cases}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{1}=\frac{du}{1}$$

$$\frac{du}{1}=\frac{-dy}{-1}=\frac{du-dy}{\underbrace{1}+\underbrace{(-1)}}=\frac{du-dy}{0}=\frac{d(u-y)}{0}\Rightarrow u-y=c_1$$

$$u=y+c_1\Rightarrow \frac{dx}{u}=\frac{dy}{1}\Rightarrow \frac{dx}{y+c_1}=\frac{dy}{1}$$

$$\int dx=\int(y+c_1)dy\Rightarrow x=\frac{y^2}{2}+c_1y+c_2\Rightarrow x=\frac{y^2}{2}+(u-y)y+c_2$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow\begin{cases} u-y=c_1 \\ x-\frac{y^2}{2}-(u-y)y=c_2\Rightarrow x+\frac{y^2}{2}-uy=c_2 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$F\left(u-y,x+\frac{y^2}{2}-uy\right)=0$$

$$u-y=f\left(x+\frac{y^2}{2}-uy\right)$$

בכדי שהמשטח יכלול את העקום הנתון אנחנו מציבים את התנאי בפתרון הכללי ומקבלים. $u(x,x)=\frac{x}{2}$

$$u(x,x)=x+f\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}x\right)=\frac{x}{2}$$

$$f\left(x\right)=\frac{x}{2}-x\Rightarrow f\left(x\right)=-\frac{x}{2}$$

$$u-y=-\frac{x+\frac{y^2}{2}-uy}{2}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\frac{4y-2x-y^2}{2(2-y)}$$

1.9 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} \left(1+\sqrt{u-x-y}\right)u_x+u_y=2 \\ u(x,0)=2x \end{cases}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{\left(1+\sqrt{u-x-y}\right)}=\frac{dy}{1}=\frac{du}{2}$$

$$\frac{du}{2}=\frac{-2dy}{-2}=\frac{du-2dy}{\underbrace{2}+\underbrace{(-2)}}=\frac{du-2dy}{0}=\frac{d(u-2y)}{0}\Rightarrow u-2y=c_1$$

$$\frac{du}{2}=\frac{-dy}{-1}=\frac{-dx}{-\left(1+\sqrt{u-x-y}\right)}=$$

$$= \frac{du - dy - dx}{\underbrace{2} - \underbrace{1} - \underbrace{\left(1 + \sqrt{u - x - y}\right)}} = \frac{d(u - y - x)}{-\sqrt{u - x - y}} = \frac{dy}{1}$$

$$\int \frac{d(z)}{-\sqrt{z}} = \int \frac{dy}{1}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{z} = y + c_2 \Rightarrow 2\sqrt{u - y - x} = -y + c_2$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow \begin{cases} u - 2y = c_1 \\ 2\sqrt{u - y - x} + y = c_2 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$F\left(u - 2y, 2\sqrt{u - y - x} + y\right) = 0$$

$$u - 2y = f\left(2\sqrt{u - y - x} + y\right)$$

בכדי שהמשטח יכלול את העקום הנתון אנחנו מציבים את התנאי בפתרון הכללי ומקבלים. $u(x, 0) = 2x$

$$u(x, 0) = 2 \cdot 0 + f\left(2\sqrt{2x - 0 - x} + 0\right) = 2x$$

$$f\left(2\sqrt{x}\right) = 2x \Rightarrow z = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{z^2}{4} \Rightarrow f(z) = 2\frac{z^2}{4} \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{2}$$

$$u - 2y = \frac{\left(2\sqrt{u - y - x} + y\right)^2}{2}$$

1.10 תרגיל.מצא את הפיתרון הכללי של:

$$u_x + \left(1 - \frac{1}{u}\right) u_y = \frac{1}{y - x}$$

פתרון:

הקווים האופייניים מוגדרים ע"י:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\left(1 - \frac{1}{u}\right)} = \frac{du}{\frac{1}{y-x}}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{udy}{u-1} = \frac{(y-x)du}{1}$$

$$\frac{udx}{u} = \frac{-udy}{-(u-1)} = \frac{udx - udy}{\underbrace{u}\underbrace{-(u-1)}} = \frac{u(dx-dy)}{1} = \frac{(y-x)du}{1}$$

$$-\frac{d(y-x)}{y-x} = \frac{du}{u} \Rightarrow -\int \frac{dz}{z} = \int \frac{du}{u}$$

$$uz = c_1 \Rightarrow (y-x)u = c_1$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{(y-x)du}{1} = \frac{(\frac{c_1}{u})du}{1}$$

$$\int \frac{dx}{1} = \int \frac{c_1 du}{u} \Rightarrow \frac{x}{c_1} = \ln|u| + c_2 \Rightarrow \frac{x}{(y-x)u} = \ln|u| + c_2$$

כותבים פתרון בצורה סתומה:

$$\Rightarrow \begin{cases} (y-x)u = c_1 \\ \frac{x}{(y-x)u} - \ln|u| = c_2 \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$F\left((y-x)u, \frac{x}{(y-x)u} - \ln|u|\right) = 0$$

1 מד"ח ליניארית מסדר שני. מעבר לצורה קנונית.

הצורה הכללית של מד"ח ליניארית מסדר שני היא:

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g$$

כאשר x,y נקודה בתחום D, מניחים כי המקדמים a,b,c,d,e,f והפונקציה g הן פונקציות רציפות של המשתנים x,y עם נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בתחום D וכאשר הפונציות a,b,c לא שלושתן 0.

החלק של המשוואה המכיל את הגורמים מסדר שני:

$$L_0[u]=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}$$

נקרא החלק העיקרי של המשוואה. מתברר כי תכונות יסודיות של הפתרונות נקבעות על פי החלק העיקרי, וליתר דיוק, לפי הסימן של

$$\delta(L)=b^2-ac$$

כלומר סימן הדיסקרימיננטה של המשוואה. ממיינים את המשוואה לפי גודל זה:

הגדרה: המשוואה נקראת <u>היפרבולית</u> בתחום Ω אם

$$\delta(L)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0$$

$w(s,t)=u(x(s,t),y(s,t))$ הצורה הקנונית שלה:

$$w_{st}+F\left(s,t,w,w_s,w_t\right)=0$$

היא נקראת <u>פרבולית</u> בתחום Ω אם

$$\delta(L)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=0$$

הצורה הקנונית שלה:

$$w_{ss}+F\left(s,t,w,w_s,w_t\right)=0$$

ונקראת אליפטית בתחום Ω אם

$$\delta(L)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)<0$$

הצורה הקנונית שלה:

$$w_{ss}+w_{tt}+F\left(s,t,w,w_s,w_t\right)=0$$

$$(x,y)\in\Omega.$$

הטרנספורמציה $(s,t)=(s(x,y),t(x,y))$ נקראת חילוף משתנים אם יעקוביאן הטרנספורמציה $J=s_xt_y-s_yt_x$ איננו מתאפס בשום נקודה (x,y).

ע"י הצבת משתנים חדשים בדרך כלל אפשר להעביר משוואה מסדר שני לאחת הצורת הקנוניות. נבצע חילוף משתנים:

$$\begin{cases} s=s(x,y)\\ t=t(x,y)\\ w(s,t)=u(x,y)\end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y)=w(s(x,y),t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x=w_ss_x+w_tt_x\\ u_y=w_ss_y+w_tt_y\\ u_{xx}=w_{ss}s_x^2+2w_{st}s_xt_x+w_{tt}t_x^2+w_ss_{xx}+w_tt_{xx}\\ u_{xy}=w_{ss}s_xs_y+w_{st}\left(s_xt_y+t_xs_y\right)+w_{tt}t_xt_y+w_ss_{xy}+w_ts_xt_{xy}\\ u_{yy}=w_{ss}s_y^2+2w_{st}s_yt_y+w_{tt}t_y^2+w_ss_{yy}+w_tt_{yy}\end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל כי w מקיימת את המשוואה הלינארית:

$$Aw_{ss}+2Bw_{st}+Cu_{tt}+Dw_s+Ew_t+Fw=G$$

כאשר מקדמי המשוואה הם:

$$\begin{cases} A(s,t)=as_x^2+2bs_xs_y+cs_y^2\\ B(s,t)=as_xt_x+b\left(s_xt_y+s_yt_x\right)+cs_yt_y\\ C(s,t)=at_x^2+2bt_xt_y+ct_y^2\\ D(s,t)=as_{xx}+2bs_{xy}+cs_{yy}+ds_x+es_y\\ E(s,t)=at_{xx}+2bt_{xy}+ct_{yy}+dt_x+et_y\end{cases}$$

כדי לקבל צורה כנונית, רוצים לאפס חלק מהמקדמים. נחלק לשלושה מקרים:

המקרה <u>היפרבולי</u>

$$\delta(L) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0$$

1. נניח תחילה $a \neq 0$, רוצים לאפס את המקדמים: הראשון והשלישי.

$$\begin{cases} A(s,t) = as_x^2 + 2bs_xs_y + cs_y^2 = 0 \\ C(s,t) = at_x^2 + 2bt_xt_y + ct_y^2 = 0 \end{cases}$$

המשוואה שקיבלנו עבור הפונציה t היא אותה משוואה כמו עבור s,כלומר עלינו לפתור רק משוואה אחת. זו משוואה מסדר ראשון, אך היא אינה קוואזי-לינארית. אבל בהיותה תבנית ריבועית בפונקציה s ניתן לרשום את המשוואה כמכפלת שני גורמים לינאריים:

$$\left[as_x + \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right) s_y\right] \left[as_x + \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right) s_y\right] = 0$$

$$s_x = \frac{-bs_y \pm \sqrt{b^2 s_y^2 - acs_y^2}}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} s_y$$

כדי לקבל חילוף משתנה $(s(x,y), t(x,y))$ עם יעקוביאן שונה מאפס, נבחר כי s תהיה הפתרון של המשוואה

$$\left[as_x + \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right) s_y\right] = 0$$

ו t תפתור את

$$\left[at_x + \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right) t_y\right] = 0$$

לכן הפיתרון s קבוע על היטל הקווים האופייניים שמשוואתם היא :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

ו t קבוע על היטל הקווים האופייניים שמשוואתם היא

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

2.

המקרה <u>פרבולי</u>

$$\delta(L) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0$$

נניח תחילה $a \neq 0$, רוצים לאפס את המקדם $C = 0$.

$$C(s,t) = at_x^2 + 2bt_xt_y + ct_y^2 = \frac{1}{a}\left(at_x + bt_y\right)^2 = 0$$

$b^2 = ac$

$$at_x + bt_y = 0$$

t קבוע על היטל הקווים האופייניים שמשוואתם היא

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

המקרה <u>אליפטי</u>

$$\delta(L) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0$$

נניח תחילה $a \neq 0$, רוצים לאפס את המקדם $A = C, B = 0$.

$$\begin{cases} B(s,t) = as_xt_x + b\left(s_xt_y + s_yt_x\right) + cs_yt_y = 0 \\ A(s,t) = as_x^2 + 2bs_xs_y + cs_y^2 = C(s,t) = at_x^2 + 2bt_xt_y + ct_y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(s_x^2 - t_x^2) + 2b(s_xs_y - t_xt_y) + c(s_y^2 - t_y^2) = 0 \\ as_xit_x + b\left(s_xit_y + s_yit_x\right) + cs_yit_y = 0 \end{cases}$$

$\phi = s + it$

$$a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0$$

$$a\phi_x + (b \pm i\sqrt{ac - b^2})\phi_y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

$$\begin{cases} s = Re\phi \\ t = Im\phi \end{cases}$$

1.1 תרגיל.מצאו טרנספורמציה, המביאה את המשוואה לצורתה הקנונית, ומצאו את הצורה הקנונית.

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0$$

מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u(x,8x) = 0 \\ u_x(x,8x) = 4e^{-2x} \end{cases}$$

פתרון:

$$a = 1, 2b = 4, c = 0$$

$$\Rightarrow b^2 - ac = 2^2 - 0 = 4 > 0$$

זאות משוואה היפרבולית, משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{1} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = c_1 \\ y - 4x = c_2 \end{cases}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\begin{cases} s = y \\ t = y - 4x \end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y) = w(s(x,y), t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x = w_s s_x + w_t t_x = w_s(0) + w_t(-4) = -4w_t \\ u_y = w_s s_y + w_t t_y = w_s(1) + w_t(1) = w_s + w_t \\ u_{xx} = w_{ss}s_x^2 + 2w_{st}s_x t_x + w_{tt}t_x^2 + w_s s_{xx} + w_t t_{xx} = 16w_{tt} \\ u_{xy} = w_{ss}s_x s_y + w_{st}\left(s_x t_y + t_x s_y\right) + w_{tt}t_x t_y + w_s s_{xy} + w_t s_x t_{xy} = -4w_{tt} - 4w_{st} \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$[16w_{tt}] + 4\left[-4w_{tt} - 4w_{st}\right] + [-4w_t] = 0$$

$$4w_{st} + w_t = 0$$

נגדיר:

$$w_t(s,t) = v(s,t)$$

ותפתור:

$$\Rightarrow 4v_s + v = 0$$

כאשר נתייחס למשוואה כאל מד"ר רגילה, כלומר מחפשים פונקציה של s כאשר t הוא פרמטר. נפתור משוואה ליניארית מסדר ראשון.

$$4\frac{dv}{ds} = -v$$

$$4\frac{dv}{v} = -ds$$

$$\ln|v(s,t)| = -\frac{1}{4}s + f(t)$$

$$v(s,t) = e^{-\frac{1}{4}s}e^{f(t)} = \tilde{f}(t)e^{-\frac{1}{4}s}$$

$$\Rightarrow w_t(s,t) = \tilde{f}(t)e^{-\frac{1}{4}s}$$

$$w(s,t) = \int w_t(s,t)dt = \int \left(\tilde{f}(t)e^{-\frac{1}{4}s}\right)dt = \tilde{\tilde{f}}(t)e^{-\frac{1}{4}s} + g(s)$$

פתרון כללי:

$$w(s,t) = F(t)e^{-\frac{1}{4}s} + g(s) \Rightarrow u(x,y) = F(y-4x)e^{-\frac{y}{4}} + g(y)$$

נחפש פתרון פרטי:

$$u(x,8x) = 0 \Rightarrow u(x,8x) = 0 = F(8x-4x)e^{-\frac{8x}{4}} + g(8x)$$

$$u_x(x,8x) = 4e^{-2x} \Rightarrow u_x(x,y) = -4F'(y-4x)e^{-\frac{y}{4}}$$

$$\Rightarrow u_x(x,8x) = -4F'(8x-4x)e^{-\frac{8x}{4}} = 4e^{-2x}$$

$$\Rightarrow -4F'(4x)e^{-2x} = 4e^{-2x} \Rightarrow F'(4x) = -1 \Rightarrow F(z) = -z + const$$

$$\Rightarrow F(y-4x) = -(y-4x) + const$$

$$u(x,8x) = 0 \Rightarrow u(x,8x) = 0 = [(4x-y) + const]e^{-2x} + g(8x)$$

$$\Rightarrow g(8x) = -[(4x-8x) + const]e^{-2x}, z = 8x$$

$$\Rightarrow g(z) = [(\frac{z}{2}) - const]e^{-\frac{z}{4}},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(z) = -z + const \\ g(z) = [(\frac{z}{2}) - const]e^{-\frac{z}{4}} \end{cases}$$

$$u(x,y) = F(y-4x)e^{-\frac{y}{4}} + g(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = [-(y-4x) + const]e^{-\frac{y}{4}} + [(\frac{y}{2}) - const]e^{-\frac{y}{4}}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = [4x - y + const + \frac{y}{2} - const]e^{-\frac{y}{4}}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = [4x - \frac{y}{2}]e^{-\frac{y}{4}}$$

1.2 תרגיל.מצאו טרנספורמציה, המביאה את המשוואה לצורתה הקנונית, ומצאו את הצורה הקנונית.

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

פתרון:

$$a = x^2, 2b = 0, c = -y^2$$

$$\Rightarrow b^2 - ac = x^2y^2 > 0$$

זאות משוואה היפרבולית, כש $x \neq 0$, גם $y \neq 0$. משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\pm\sqrt{x^2y^2}}{x^2}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln|y| = \ln|x| + c_1 \\ \ln|y| = -\ln|x| + c_2 \end{cases}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,

$$c_1 = y/x, c_2 = xy$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow \begin{cases} s = xy \\ t = y/x \end{cases}$$

נגזור את השווין $u(x,y) = w(s(x,y), t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x = w_s s_x + w_t t_x = w_s(y) + w_t(-y/x^2) \\ u_y = w_s s_y + w_t t_y = w_s(x) + w_t(1/x) \\ u_{xx} = w_{ss}s_x^2 + 2w_{st}s_x t_x + w_{tt}t_x^2 + w_s s_{xx} + w_t t_{xx} \\ = w_{ss}y^2 - 2w_{st}\frac{y^2}{x^2} + w_{tt}\frac{y^2}{x^4} + 2w_t\frac{y}{x^3} \\ u_{yy} = w_{ss}s_y^2 + 2w_{st}s_y t_y + w_{tt}t_y^2 + w_s s_{yy} + w_t t_{yy} \\ = w_{ss}x^2 + 2w_{st} + w_{tt}\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\begin{gathered} x^2\left(w_{ss}y^2 - 2w_{st}\frac{y^2}{x^2} + w_{tt}\frac{y^2}{x^4} + 2w_t\frac{y}{x^3}\right) \\ -y^2\left(w_{ss}x^2 + 2w_{st} + w_{tt}\frac{1}{x^2}\right) = 0 \end{gathered}$$

$$-4w_{st}y^2 + 2w_t\frac{y}{x} = 0$$

$$w_{st} - \frac{1}{2xy}w_t = 0$$

$$w_{st} - \frac{1}{2s}w_t = 0$$

$$v = w_t \Rightarrow v_s - \frac{1}{2s}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{ds}{2s}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|s| + \tilde{f(t)}$$

$$v(s,t) = f(t)\sqrt{|s|}$$

$$w_t(s,t) = v(s,t) = f(t)\sqrt{|s|}$$

$$w(s,t) = \int w_t dt = \int \left[f(t)\sqrt{|s|}\right] dt + g(s)$$

$$w(s,t) = F(t)\sqrt{|s|} + g(s)$$

$$\begin{cases} s = xy \\ t = y/x \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$u(x,y) = F(y/x)\sqrt{|xy|} + g(xy)$$

1.3 תרגיל.מצאו טרנספורמציה, המביאה את המשוואה לצורתה הקנונית, ומצאו את הצורה הקנונית.

$$u_{xx} - 2yu_{xy} + y^2 u_{yy} + u_x = 0$$

פתרון:

$$a = 1, 2b = -2y, c = y^2$$

$$\Rightarrow b^2 - ac = (-y)^2 - y^2 = 0$$

$\Leftarrow$ זאת משוואה פרבולית, משוואת הקווים האופייניים היא:

$$at_x + bt_y = 0 \Rightarrow t_x - yt_y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{1}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln|y| = -x + c \Rightarrow y = ce^{-x}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,

$$c = ye^x$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow \begin{cases} s = x \\ t = ye^x \end{cases}$$

הטרנספורמציה $(s,t) = (s(x,y), t(x,y))$ נקראת <u>חילוף משתנים</u> אם יעקוביאן הטרנספורמציה $J = s_x t_y - s_y t_x$ איננו מתאפס בשום נקודה (x,y).

$$J = s_x t_y - s_y t_x = e^x - 0 \neq 0$$

נגזור את השוויון $u(x,y)=w(s(x,y),t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x = w_s s_x + w_t t_x = w_s(1) + w_t(ye^x) \\ u_y = w_s s_y + w_t t_y = w_s(0) + w_t(e^x) \\ u_{xx} = w_{ss}s_x^2 + 2w_{st}s_x t_x + w_{tt}t_x^2 + w_s s_{xx} + w_t t_{xx} \\ \quad = w_{ss} + 2ye^x w_{st} + y^2 e^{2x} w_{tt} + ye^x w_t \\ u_{xy} = w_{ss}s_x s_y + w_{st}\left(s_x t_y + t_x s_y\right) + w_{tt}t_x t_y + w_s s_{xy} + w_t s_x t_{xy} \\ \quad = e^x w_{ts} + ye^{2x} w_{tt} + e^x w_t \\ u_{yy} = w_{ss}s_y^2 + 2w_{st}s_y t_y + w_{tt}t_y^2 + w_s s_{yy} + w_t t_{yy} = e^{2x} w_{tt} \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$w_{ss} + 2ye^x w_{st} + y^2 e^{2x} w_{tt} + ye^x w_t - 2y\left(e^x w_{ts} + ye^{2x} w_{tt} + e^x w_t\right) \\ +y^2\left(e^{2x} w_{tt}\right) + w_s(1) + w_t(ye^x) = 0$$

$$w_{ss} + w_s = 0$$

$$v = w_s \Rightarrow v_s + v = 0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int ds$$

$$\ln|v(s,t)| = -s + f(t)$$

$$v(s,t) = f(t)e^{-s} \Rightarrow w_s = f(t)e^{-s}$$

$$w(s,t) = \int w_s ds = \int \left(f(t)e^{-s}\right) ds + g(t) = -f(t)e^{-s} + g(t)$$

פתרון כללי:

$$u(x,y) = f(ye^x)e^{-x} + g(ye^x)$$

1.4 תרגיל.מצאו טרנספורמציה, המביאה את המשוואה לצורתה הקנונית, ומצאו את הצורה הקנונית.

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

פתרון:

$$a=1,2b=-2,c=2$$

$$\Rightarrow b^2-ac=1-2=-1<0$$

זאות משוואה אליפטית. משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm i\sqrt{ac-b^2}}{a}=\frac{-1\pm i\sqrt{1}}{1}$$

$$y'=-1\pm i\Rightarrow y=-x\pm ix+const$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,

$$\Rightarrow\begin{cases} y+x-ix=c_1\\ y+x+ix=c_2\end{cases}$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow\begin{cases} s=y+x\\ t=x\end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y)=w(s(x,y),t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x=w_s s_x+w_t t_x=w_s+w_t\\ u_y=w_s s_y+w_t t_y=w_s\\ u_{xx}=w_{ss}s_x^2+2w_{st}s_x t_x+w_{tt}t_x^2+w_s s_{xx}+w_t t_{xx}\\ =w_{ss}+2w_{st}+w_{tt}\\ u_{yy}=w_{ss}s_y^2+2w_{st}s_y t_y+w_{tt}t_y^2+w_s s_{yy}+w_t t_{yy}\\ =w_{ss}\\ u_{xy}=w_{ss}s_x s_y+w_{st}\left(s_x t_y+t_x s_y\right)+w_{tt}t_x t_y+w_s s_{xy}+w_t s_x t_{xy}\\ =w_{ss}+w_{st}\end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\left(w_{ss}+2w_{st}+w_{tt}\right)-2\left(w_{ss}+w_{st}\right)+2\left(w_{ss}\right)=0$$

$$\Rightarrow w_{ss}+w_{tt}=0$$

1.5 תרגיל.מצאו טרנספורמציה, המביאה את המשוואה לצורתה הקנונית, ומצאו את הצורה הקנונית.

$$\frac{1}{x^2}u_{xx}+\frac{1}{y^2}u_{yy}=0$$

פתרון:

$$a=\frac{1}{x^2},2b=0,c=\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow b^2-ac=-\frac{1}{x^2y^2}<0$$

זאות משוואה אליפטית. משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm i\sqrt{ac-b^2}}{a}=\frac{\pm i\sqrt{\frac{1}{x^2y^2}}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$y'=\pm i\frac{x}{y}\Rightarrow\int ydy=\pm ixdx\Rightarrow y^2=\pm ix^2+const$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,

$$\Rightarrow\begin{cases} y^2+ix^2=c_1\\ y^2-ix^2=c_2\end{cases}$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow\begin{cases} s=y^2\\ t=x^2\end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y)=w(s(x,y),t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x=w_ss_x+w_tt_x=2xw_t\\ u_y=w_ss_y+w_tt_y=2yw_s\\ u_{xx}=w_{ss}s_x^2+2w_{st}s_xt_x+w_{tt}t_x^2+w_ss_{xx}+w_tt_{xx}\\ =2w_t+4x^2w_{tt}\\ u_{yy}=w_{ss}s_y^2+2w_{st}s_yt_y+w_{tt}t_y^2+w_ss_{yy}+w_tt_{yy}\\ =2w_s+4y^2w_{ss}\end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\frac{1}{x^2}\left(2w_t+4x^2w_{tt}\right)+\frac{1}{y^2}\left(2w_s+4y^2w_{ss}\right)=0$$

$$\Rightarrow w_{ss}+w_{tt}+\frac{1}{2t}w_t+\frac{1}{2s}w_s=0$$

1.6 תרגיל.מצאו טרנספורמציה, המביאה את המשוואה לצורתה הקנונית, ומצאו את הצורה הקנונית.

$$\sin^2 yu_{xx}-2x\sin yu_{xy}+x^2u_{yy}=0$$

פתרון:

$$a=\sin^2 y, 2b=-2x\sin y, c=x^2$$

$$\Rightarrow b^2-ac=(-x\sin y)^2-x^2\sin^2 y=0$$

$\Leftarrow$ זאת משוואה פרבולית, משוואת הקווים האופייניים היא:

$$at_x+bt_y=0\Rightarrow \sin^2 yt_x-x\sin yt_y=0\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x\sin y}{\sin^2 y}$$

$$\int \sin ydy=-\int xdx$$

$$-\cos y=\frac{x^2}{2}+c\Rightarrow x^2-2\cos y=c$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow\begin{cases} s=x^2-2\cos y\\ t=x\end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y)=w(s(x,y),t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x = w_s s_x + w_t t_x = w_s(2x) + w_t \\ u_y = w_s s_y + w_t t_y = w_s(2\sin y) \\ u_{xx} = w_{ss}s_x^2 + 2w_{st}s_x t_x + w_{tt}t_x^2 + w_s s_{xx} + w_t t_{xx} \\ \quad = 4x^2 w_{ss} + 4x w_{st} + w_{tt} + 2w_s \\ u_{xy} = w_{ss}s_x s_y + w_{st}\left(s_x t_y + t_x s_y\right) + w_{tt}t_x t_y + w_s s_{xy} + w_t s_x t_{xy} \\ \quad = 4x\sin y w_{ss} + 2\sin y w_{st} \\ u_{yy} = w_{ss}s_y^2 + 2w_{st}s_y t_y + w_{tt}t_y^2 + w_s s_{yy} + w_t t_{yy} = 4\sin^2 y w_{ss} + 2\cos y w_s \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\sin^2 y\left(4x^2 w_{ss} + 4x w_{st} + w_{tt} + 2w_s\right) - 2x\sin y\left(4x\sin y w_{ss} + 2\sin y w_{st}\right) + x^2\left(4\sin^2 y w_{ss} + 2\cos y w_s\right) = 0$$

$$\sin^2 y w_{tt} + \left(2\sin^2 y + 2x^2\cos y\right)w_s = 0$$

$$w_{tt} + 2\left(1 + x^2\frac{\cos y}{\sin^2 y}\right)w_s = 0$$

$$2\cos y = x^2 - s = t^2 - s \Rightarrow \cos y = \frac{t^2 - s}{2}$$

$$sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \left(\frac{t^2 - s}{2}\right)^2$$

$$w_{tt} + 2\left(1 + \frac{2t^2\left(t^2 - s\right)}{4 - \left(t^2 - s\right)^2}\right)w_s = 0$$

1.7 תרגיל.מצאו טרנספורמציה, המביאה את המשוואה לצורתה הקנונית, ומצאו את הצורה הקנונית.

$$y u_{xx} + x u_{yy} = 0$$

פתרון:

$$a = y, 2b = 0, c = x$$

$$\Rightarrow b^2 - ac = 0 - xy$$

זאות משוואה היפרבולית, כש

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

זאות משוואה אליפטית, כש

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

זאת משוואה פרבולית,

$$x = 0 \bigcup y = 0$$

- כש-

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\pm\sqrt{-xy}}{y} = \pm\sqrt{-\frac{x}{y}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \sqrt{-y}dy = \int \sqrt{x}dx \\ -\int \sqrt{-y}dy = \int \sqrt{x}dx \end{cases}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + (-y)^{\frac{3}{2}} = c_1 \\ x^{\frac{3}{2}} - (-y)^{\frac{3}{2}} = c_2 \end{cases}$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow \begin{cases} s = x^{\frac{3}{2}} + (-y)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} s_x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ s_y = -\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \\ t = x^{\frac{3}{2}} - (-y)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} t_x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ t_y = \frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y) = w(s(x,y),t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x = w_s s_x + w_t t_x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(w_s + w_t) \\ u_y = w_s s_y + w_t t_y = -\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}(w_s - w_t) \\ u_{xx} = w_{ss}s_x^2 + 2w_{st}s_x t_x + w_{tt}t_x^2 + w_s s_{xx} + w_t t_{xx} \\ = \frac{9}{4}x(w_{ss} + 2w_{st} + w_{tt}) + \frac{3}{4\sqrt{x}}(w_s + w_t) \\ u_{yy} = w_{ss}s_y^2 + 2w_{st}s_y t_y + w_{tt}t_y^2 + w_s s_{yy} + w_t t_{yy} \\ = \frac{9}{4}(-y)(w_{ss} - 2w_{st} + w_{tt}) + \frac{3}{4\sqrt{-y}}(w_s - w_t) \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$y\left[\frac{9}{4}x(w_{ss} + 2w_{st} + w_{tt}) + \frac{3}{4\sqrt{x}}(w_s + w_t)\right] +$$

$$+x\left[\frac{9}{4}(-y)(w_{ss} - 2w_{st} + w_{tt}) + \frac{3}{4\sqrt{-y}}(w_s - w_t)\right] = 0$$

$$9xyw_{st} + \left[\frac{3y}{4\sqrt{x}} + \frac{3x}{4\sqrt{-y}}\right]w_s + \left[\frac{3y}{4\sqrt{x}} - \frac{3x}{4\sqrt{-y}}\right]w_t = 0$$

$$w_{st} + \left[\frac{1}{12x\sqrt{x}} + \frac{1}{12y\sqrt{-y}}\right]w_s + \left[\frac{1}{12x\sqrt{x}} - \frac{1}{12y\sqrt{-y}}\right]w_t = 0$$

$$w_{st} + \left[\frac{1}{12x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{12(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]w_s + \left[\frac{1}{12x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{12(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]w_t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(s+t) \\ (-y)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(s-t) \end{cases}$$

$$w_{st} + \left[\frac{1}{6(s+t)} - \frac{1}{6(s-t)}\right]w_s + \left[\frac{1}{6(s+t)} + \frac{1}{6(s-t)}\right]w_t = 0$$

$$w_{st} + \frac{1}{3(t^2 - s^2)}\left[tw_s - sw_t\right] = 0$$

- כש-

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\pm\sqrt{-xy}}{y} = \pm\sqrt{-\frac{x}{y}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \sqrt{y}dy = \int \sqrt{-x}dx \\ \int \sqrt{y}dy = -\int \sqrt{-x}dx \end{cases}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,

$$\Rightarrow \begin{cases} (-x)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} = c_1 \\ (-x)^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = c_2 \end{cases}$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow \begin{cases} s = (-x)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} s_x = -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} \\ s_y = -\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} \end{cases} \\ t = (-x)^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} t_x = -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} \\ t_y = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y) = w(s(x,y), t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x = w_s s_x + w_t t_x = -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}(w_s + w_t) \\ u_y = w_s s_y + w_t t_y = -\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}(w_s - w_t) \\ u_{xx} = w_{ss}s_x^2 + 2w_{st}s_x t_x + w_{tt}t_x^2 + w_s s_{xx} + w_t t_{xx} \\ = \frac{9}{4}(-x)(w_{ss} + 2w_{st} + w_{tt}) + \frac{3}{4\sqrt{-x}}(w_s + w_t) \\ u_{yy} = w_{ss}s_y^2 + 2w_{st}s_y t_y + w_{tt}t_y^2 + w_s s_{yy} + w_t t_{yy} \\ = \frac{9}{4}y(w_{ss} - 2w_{st} + w_{tt}) - \frac{3}{4\sqrt{y}}(w_s - w_t) \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$y\left[\frac{9}{4}(-x)(w_{ss} + 2w_{st} + w_{tt}) + \frac{3}{4\sqrt{-x}}(w_s + w_t)\right] +$$

$$+x\left[\frac{9}{4}y(w_{ss} - 2w_{st} + w_{tt}) - \frac{3}{4\sqrt{y}}(w_s - w_t)\right] = 0$$

$$-9xyw_{st} + \left[\frac{3y}{4\sqrt{-x}} - \frac{3x}{4\sqrt{y}}\right]w_s + \left[\frac{3y}{4\sqrt{-x}} + \frac{3x}{4\sqrt{y}}\right]w_t = 0$$

$$w_{st} - \left[\frac{1}{12x\sqrt{-x}} - \frac{1}{12y\sqrt{y}}\right] w_s - \left[\frac{1}{12x\sqrt{-x}} + \frac{1}{12y\sqrt{y}}\right] w_t = 0$$

$$w_{st} + \left[\frac{1}{12(-x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{12y^{\frac{3}{2}}}\right] w_s + \left[\frac{1}{12(-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{12y^{\frac{3}{2}}}\right] w_t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(s+t) \\ y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(t-s) \end{cases}$$

$$w_{st} + \left[\frac{1}{6(t-s)} + \frac{1}{6(s+t)}\right] w_s + \left[\frac{1}{6(s+t)} - \frac{1}{6(t-s)}\right] w_t = 0$$

$$w_{st} + \frac{1}{3(t^2-s^2)}\left[tw_s - sw_t\right] = 0$$

- כש-

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac-b^2}}{a} = \frac{\pm i\sqrt{xy}}{y} = \pm i\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{y}dy = \pm i \int \sqrt{x}dx \Rightarrow y^{\frac{3}{2}} = \pm i x^{\frac{3}{2}} + const$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} = c_1 \\ y^{\frac{3}{2}} = c_2 \end{cases}$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow \begin{cases} s = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} s_x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ s_y = 0 \end{cases} \\ t = y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} t_x = 0 \\ t_y = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y) = w(s(x,y),t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x = w_s s_x + w_t t_x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}w_s \\ u_y = w_s s_y + w_t t_y = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}w_t \\ u_{xx} = w_{ss}s_x^2 + 2w_{st}s_x t_x + w_{tt}t_x^2 + w_s s_{xx} + w_t t_{xx} \\ = \frac{9}{4}xw_{ss} + \frac{3}{4\sqrt{x}}w_s \\ u_{yy} = w_{ss}s_y^2 + 2w_{st}s_y t_y + w_{tt}t_y^2 + w_s s_{yy} + w_t t_{yy} \\ = \frac{9}{4}yw_{tt} + \frac{3}{4\sqrt{y}}w_t \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$y\left[\frac{9}{4}xw_{ss} + \frac{3}{4\sqrt{x}}w_s\right] + x\left[\frac{9}{4}yw_{tt} + \frac{3}{4\sqrt{y}}w_t\right] = 0$$

$$\frac{9}{4}xy\left[w_{ss} + w_{tt}\right] + \frac{3y}{4\sqrt{x}}w_s + \frac{3x}{4\sqrt{y}}w_t = 0$$

$$w_{ss} + w_{tt} + \frac{1}{3x^{\frac{3}{2}}}w_s + \frac{1}{3y^{\frac{3}{2}}}w_t = 0$$

$$w_{ss} + w_{tt} + \frac{1}{3s}w_s + \frac{1}{3t}w_t = 0$$

- כש-

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac-b^2}}{a} = \frac{\pm i\sqrt{xy}}{y} = \pm i\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{-y}dy = \pm i\int \sqrt{-x}dx \Rightarrow (-y)^{\frac{3}{2}} = \pm i(-x)^{\frac{3}{2}} + const$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,

$$\Rightarrow \begin{cases} (-x)^{\frac{3}{2}} = c_1 \\ (-y)^{\frac{3}{2}} = c_2 \end{cases}$$

מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\Rightarrow \begin{cases} s=(-x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} s_x=-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} \\ s_y=0 \end{cases} \\ t=(-y)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} t_x=0 \\ t_y=-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(x,y)=w(s(x,y),t(x,y))$ לפי x ו y ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_x=w_s s_x+w_t t_x=-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}w_s \\ u_y=w_s s_y+w_t t_y=-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}w_t \\ u_{xx}=w_{ss}s_x^2+2w_{st}s_x t_x+w_{tt}t_x^2+w_s s_{xx}+w_t t_{xx} \\ =\frac{9}{4}(-x)w_{ss}+\frac{3}{4\sqrt{-x}}w_s \\ u_{yy}=w_{ss}s_y^2+2w_{st}s_y t_y+w_{tt}t_y^2+w_s s_{yy}+w_t t_{yy} \\ =\frac{9}{4}(-y)w_{tt}+\frac{3}{4\sqrt{-y}}w_t \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$y\left[\frac{9}{4}(-x)w_{ss}+\frac{3}{4\sqrt{-x}}w_s\right]+x\left[\frac{9}{4}(-y)w_{tt}+\frac{3}{4\sqrt{-y}}w_t\right]=0$$

$$-\frac{9}{4}xy\left[w_{ss}+w_{tt}\right]+\frac{3y}{4\sqrt{-x}}w_s+\frac{3x}{4\sqrt{-y}}w_t=0$$

$$w_{ss}+w_{tt}+\frac{1}{3(-x)^{\frac{3}{2}}}w_s+\frac{1}{3(-y)^{\frac{3}{2}}}w_t=0$$

$$w_{ss}+w_{tt}+\frac{1}{3s}w_s+\frac{1}{3t}w_t=0$$

1 משוואת הגלים ההומוגנית עבור מיתר אינסופי.

משוואת הגלים היא משוואה מהצורה

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

כאשר $c > 0$. זוהי משוואה היפרבולית.

המשוואה מייצגת תנועת מיתר מתוח בין שני קצוות שהוסט ממצב שיווי משקל.

פתרון כללי יתקבל ע"י מעבר לצורה קנונית .

משוואה אופיינית $x' \pm c = 0$,

קווים אופיינים $x = \pm(ct) + const$,

משתנים חדשים

$$\Rightarrow \begin{cases} s = x + ct \\ r = x - ct \end{cases}$$

פונקציה $w(s, r) = u(t, x)$

הצבה במשוואה נותנת $w_{sr} = 0$,

הפתרון למשוואה זו הוא $w_{sr} = F(s) + G(r)$,

והפתרון הכללי למשוואה המקורית הוא:

$$u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

- גל נסוג וגל מתקדם : $F(x + ct)$ נקרא גל נסוג, כיוון שבזמן t_0 הגרף של $F(x + ct_0)$ הוא הזזה שמאלה ב-ct_0 יחידות את הגרף של $F(x)$, כלומר הגל נסוג (שמאלה) במהירות c.
- $G(x - ct)$ נקרא גל מתקדם, כיוון שבזמן t_0 הגרף של $G(x - ct_0)$ הוא הזזה ימינה ב-ct_0 יחידות של הגרף של $G(x)$, כלומר הגל מתקדם (ימינה) במהירות c.

תחילה נעסוק בבעיית התחלה:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(0,x) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(0,x) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

הבעיה מתאימה למיתר קשור בין קצוות רחוקים מאוד, כשההפרעה מתבצעת קרוב למרכז . $f(x)$ מיצג את המיקום התחילי של המיתר המוזז ,ו-$g(x)$ מיצג את המהירות התחילית שלו.

- פתרון: נציב בפתרון הכללי את התנאים ונקבל

$$\begin{cases} f(x) = u(0,x) = F(x+0) + G(x-0) \\ g(x) = u_t(0,x) = cF'(x+0) - cG'(x-0) \end{cases}$$

אינטגרציה וחלוקה ב-c של המשוואה השניה וחיבור וחיסור המשוואות שמתקבלות נותנים

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + const \\ G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - const \end{cases}$$

- והפתרון לבעיה זו

$$u(t,x) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds$$

- קבלנו את נוסחת דלאמבר לפתרון בעיית הגלים ההומונית על מיתר אינסופי

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

- <u>משפט קיום ויחידות:</u> תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בעלת נגזרות חלקיות רצפות מסדר ראשון ושני ותהי$g(x)$ פונקציה רציפה בעלת ניגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון, לבעיית הגלים ההומוגנית על מיתר אינסופיקיים פתרון אחד ויחיד.

1.1 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,x) = x^2 \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c = 1$. קבלנו את נוסחת דלאמבר לפתרון בעיית הגלים ההומונית על מיתר אינסופי

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$g(x) = 0,$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}$$

$f(x) = x^2$

$$\Rightarrow f(x+ct) = (x+ct)^2, f(x-ct) = (x-ct)^2, c = 1$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2}$$

$$\Rightarrow u(t,x) = x^2 + t^2$$

1.2 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = x \end{cases}$$

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c = 2$. קבלנו את נוסחת דלאמבר לפתרון בעיית הגלים ההומונית על מיתר אינסופי

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$f(x) = 0,$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{4}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$g(x) = x$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{4}\int_{x-ct}^{x+ct} sds = \frac{1}{8}s^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t}$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{(x+2t)^2-(x-2t)^2}{8}$$

$$\Rightarrow u(t,x) = xt$$

1.3 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,x) = \sin x \\ u_t(0,x) = 1 \end{cases}$$

מצא $u(\frac{\pi}{2c}, x)$?

פתרון:

זוהי משוואת הגלים. קבלנו את נוסחת דלאמבר לפתרון בעיית הגלים ההומונית על מיתר אינסופי

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$f(x) = \sin x,$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$g(x) = 1$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 1ds$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}s\Big|_{x-ct}^{x+ct}$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} + t$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \sin x \cos ct + t$$

מצא $u(\frac{\pi}{2c},x)$?

$$\Rightarrow u(\frac{\pi}{2c},x) = \sin x \cos c\frac{\pi}{2c} + \frac{\pi}{2c} = \frac{\pi}{2c}$$

ברגע $t=\frac{\pi}{2c}$ ערך של הפונקציה $u=\frac{\pi}{2c}$ זאת אומרת המיתר מקביל לציר x 4 היא פתרון של

1.4 תרגיל.

- נתונה משוואהת גלים:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

תהיה R מקבילית שקודקודעו הם $A(t_1,x_1), B(t_2,x_2), C(t_3,x_3), D(t_4,x_4)$ כך ש- R נוצרות ע"י ארבעה קווים אופינים של משוואה גלים. הוכח כי כל פתרון $u(x,t)$ של משוואה גלים מקיים:

$$u(t_1,x_1) + u(t_2,x_2) = u(t_3,x_3) + u(t_4,x_4)$$

- נתון ש $u(t,x)$ היא פתרון של

$$u_{tt} = u_{xx}$$

ונתון ש

$$u(t,x) = a(x)$$

על הישר $t+x=0$ ו-

$$u(t,x) = b(x)$$

על הישר $t - x = 0$, כמו כן נתון

$$a(0) = b(0)$$

חשב את $u(t,x)$.

פתרון:

- זוהי משוואת הגלים, ניתן לרשום את $u(t,x)$ כסכום שך גל נסוג וגל מתקדם

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

משוואת קו אופיני העובר דרך A ו- B

$$x + ct = k_1$$

משוואת קו אופיני העובר דרך C ו- D

$$x + ct = k_2$$

משוואת קו אופיני העובר דרך A ו- D

$$x - ct = m_1$$

משוואת קו אופיני העובר דרך C ו- B

$$x - ct = m_2$$

$$\Rightarrow u(A) = F(x+ct) + G(x-ct) = F(k_1) + G(m_1)$$

$$\Rightarrow u(B) = F(x+ct) + G(x-ct) = F(k_1) + G(m_2)$$

$$\Rightarrow u(C) = F(x+ct) + G(x-ct) = F(k_2) + G(m_2)$$

$$\Rightarrow u(D) = F(x+ct) + G(x-ct) = F(k_2) + G(m_1)$$

$$\Rightarrow u(A) + u(C) = F(k_1) + G(m_1) + F(k_2) + G(m_2)$$

$$\Rightarrow u(B) + u(D) = F(k_1) + G(m_2) + F(k_2) + G(m_1)$$

$$\Rightarrow u(B) + u(D) = u(A) + u(C)$$

- זוהי משוואת הגלים $c = 1$. הפתרון הכללי:

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$$

נתון ש

$$u(t,x) = a(x)$$

על הישר $t + x = 0$

$$u(-x,x) = F(x-x) + G(x+x) = F(0) + G(2x) = a(x)$$

$2x = z$

$$\Rightarrow G(z) = a(\frac{z}{2}) - F(0)$$

נתון ש

$$u(t,x) = b(x)$$

על הישר $t - x = 0$

$$u(x,x) = F(x+x) + G(x-x) = F(2x) + G(0) = b(x)$$

$2x = z$

$$\Rightarrow F(z) = b(\frac{z}{2}) - G(0)$$

$$\Rightarrow F(0) = b(0) - G(0)$$

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t) = b(\frac{x+t}{2}) - G(0) + a(\frac{x-t}{2}) - F(0)$$

$$u(t,x) = b(\frac{x+t}{2}) - G(0) + a(\frac{x-t}{2}) - (b(0) - G(0))$$

$$\Rightarrow u(t,x) = b(\frac{x+t}{2}) + a(\frac{x-t}{2}) - b(0)$$

1.5 תרגיל.

נתון ש $u(t,x)$ היא פתרון של

$$u_{tt} = u_{xx}$$

ונתון ש $u_x(t,x)$ קבועה על הישר $x = 1 + t$

כמו כן נתון

$$u(0,x) = 1$$

$$u(1,1) = 3$$

חשב את $u(t,x)$. האם הפתרון שקבלתה יחיד?

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c = 1$. הפתרון הכללי:

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$$

$$\Rightarrow u_x(t,x) = F'(x+t) + G'(x-t)$$

ונתון ש $u_x(t,x)$ קבועה על הישר $x = 1 + t$

$$\Rightarrow u_x(t,t+1) = F'(\underbrace{t+1}+t) + G'(\underbrace{t+1}-t)$$

$$\Rightarrow u_x(t,t+1) = F'(2t+1) + G'(1) = const$$

$$\Rightarrow F'(2t+1) = const \Rightarrow F'(z) = const \Rightarrow F(z) = kz$$

כמו כן נתון

$$u(0,x) = 1$$

$$u(1,1) = 3$$

$$u(0,x) = F(x+0) + G(x-0) = kx + G(x) = 1 \Rightarrow G(x) = 1 - kx$$

$$u(1,1) = F(1+1) + G(1-1) = 2k + \underbrace{1 - k \cdot 0} = 3 \Rightarrow k = 1$$

$$F(z) = z$$

$$G(x) = 1 - x$$

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t) = \underbrace{x+t}+\underbrace{1-(x-t)}$$

$$u(t,x) = 1 + 2t$$

על פי חישוב הפתרון אנו רואים כי הפתרון נקבע באופן יחיד.

1.6 תרגיל.

תהי $u(t,x)$ פתרון של המשוואה

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0$$

נתון ש-$u(t,x)$ קבוע לאורך הישר $\alpha \in \mathcal{R}, x = \alpha + ct$ הוכח

$$u_t + cu_x = 0$$

פתרון:

זוהי משוואת הגלים.נתן לרשום את $u(t,x)$ כסכום שך גל נסוג וגל מתקדם

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

נתון עבור $x = \alpha + ct$, $u(t,x)$ מקבלת ערך קבוע, נציב:

$$u(t,\alpha+ct) = F(\underbrace{\alpha+ct}+ct) + G(\underbrace{\alpha+ct}-ct) = const$$

$$\Rightarrow F(\alpha+2ct) + G(\alpha) = const$$

$$\Rightarrow F(\alpha+2ct) = const \Rightarrow F(z) = const$$

כלומר

$$u(t,x) = const + G(x-ct) \Rightarrow \begin{cases} u_t(t,x) = -cG'(x-ct) \\ u_x(t,x) = G'(x-ct) \end{cases}$$

$$u_t + cu_x = -cG'(x-ct) + cG'(x-ct) = 0$$

1.7 תרגיל.

מצא $u(1,2)$ עבור הבעייה:

$$u_{tt} = u_{xx}, t > 0$$

$$u(0,x) = \begin{cases} 0, & 2 < |x| \\ 2x-1, & 1 < |x| \le 2 \\ 3-x, & |x| \le 1 \end{cases}$$

$$u_t(0,x) = \begin{cases} 0, & 2 < |x| \\ 1, & |x| \le 2 \end{cases}$$

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c = 1$, $x = 2, t = 1$, לפי נוסחאת דלמבר

$$u(t,x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds$$

$$u(1,2) = \frac{f(2+1) + f(2-1)}{2} + \frac{1}{2}\int_{2-1}^{2+1} g(s)ds$$

$$u(1,2) = \frac{f(3) + f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int_{1}^{3} g(s)ds$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = 0 \\ f(1) = 3-1 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 g(s)ds = \frac{1}{2}\int_1^2 g(s)ds + \frac{1}{2}\int_2^3 g(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 1 \cdot ds + \frac{1}{2}\int_2^3 0 \cdot ds = \frac{1}{2}$$

$$u(1,2) = \frac{1}{2}[0+2] + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

1.8 תרגיל.

מצא $u(t,1)$ עבור הבעייה:

$$u_{tt}=9u_{xx}, t>0$$

$$u(0,x)=\begin{cases} 0, & 10<|x| \\ x, & 7<|x|\le 10 \\ 1-x, & |x|\le 7 \end{cases}$$

$$u_t(0,x)=0$$

א. חשב $u(t,1)$ עבור $t=\frac{4}{3},\frac{7}{3},3,4$. ב. עבור איזה זמן t מתקבל המקסימום של $u(t,1)$?

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c=3$, $x=1$, לפי נוסחאת דלמבר: ($g(x)=0$)

$$u(t,1)=\frac{f(1+3t)+f(1-3t)}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}\int_{1-3t}^{1+3t} g(s)ds=\frac{f(1+3t)+f(1-3t)}{2}$$

$$\Rightarrow f(1+3t)=\begin{cases} 0, & 10<|1+3t| \\ 1+3t, & 7<|1+3t|\le 10 \\ 1-(1+3t), & |1+3t|\le 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1+3t)=\begin{cases} 0, & 1+3t<-10 & \Rightarrow t<-\frac{11}{3} \\ 1+3t, & -10\le 1+3t<-7 & \Rightarrow -\frac{11}{3}\le t<-\frac{8}{3} \\ -3t, & -7\le 1+3t\le 7 & \Rightarrow -\frac{8}{3}\le t\le 2 \\ 1+3t, & 7<1+3t\le 10 & \Rightarrow 2<t\le 3 \\ 0, & 1+3t>10 & \Rightarrow t>3 \end{cases}$$

$t\le 0$ לא בתחום

$$\Rightarrow f(1+3t)=\begin{cases} -3t, & 0\le t\le 2 \\ 1+3t, & 2<t\le 3 \\ 0, & t>3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1-3t)=\begin{cases} 0, & 1-3t<-10 & \Rightarrow t>\frac{11}{3} \\ 1-3t, & -10\le 1-3t<-7 & \Rightarrow \frac{8}{3}<t\le \frac{11}{3} \\ 3t, & -7\le 1-3t\le 7 & \Rightarrow -2\le t\le \frac{8}{3} \\ 1-3t, & 7<1-3t\le 10 & \Rightarrow -3\le t<-2 \\ 0, & 1-3t>10 & \Rightarrow t<-3 \end{cases}$$

$t \leq 0$ לא בתחום

$$\Rightarrow f(1-3t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t \leq \frac{8}{3} \\ 1-3t, & \frac{8}{3} < t \leq \frac{11}{3} \\ 0, & t > \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$u(t,1) = \frac{f(1+3t)+f(1-3t)}{2} = \frac{1}{2} \begin{cases} -3t+3t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 1+3t+3t, & 2 < t \leq \frac{8}{3} \\ 1+3t+1-3t, & \frac{8}{3} < t \leq 3 \\ 0+1-3t, & 3 < t \leq \frac{11}{3} \\ 0+0, & t > \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$u(t,1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{2}(1+6t), & 2 < t \leq \frac{8}{3} \\ 1, & \frac{8}{3} < t \leq 3 \\ \frac{1}{2}(1-3t), & 3 < t \leq \frac{11}{3} \\ 0, & t > \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$u(\frac{4}{3},1) = 0$$

$$u(\frac{7}{3},1) = \frac{1}{2}(1+6\cdot\frac{7}{3}) = \frac{15}{2}$$

$$u(3,1) = 1$$

$$u(4,1) = 0$$

ב. עבור איזה זמן t מתקבל המקסימום של $u(t,1)$?

$$u_{max}(t,1) = \frac{1}{2}(1+6\cdot\frac{8}{3}) = \frac{17}{2}$$

1.9 תרגיל.

נתון מיתר אינסופי המקיים

$$u_{tt} = 4u_{xx}, t > 0$$

$$u(0,x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 2, & -1\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

$$u_t(0,x)=0$$

מצא את כל הזמנים t_n עבורם $u(t_n,x)$ לא רציפה ב-$x=0$.

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c=2$, לפי נוסחאת דלמבר: ($g(x)=0$)

$$u(t,x)=\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}\int_{x-2t}^{x+2t}g(s)ds=\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}$$

$$\Rightarrow f(x+2t)=\begin{cases}0, & x+2t<-1\\ 2, & -1\le x+2t\le 3\\ 0, & x+2t>3\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x-2t)=\begin{cases}0, & x-2t<-1\\ 2, & -1\le x-2t\le 3\\ 0, & x-2t>3\end{cases}$$

$$u(t,x)=\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}=\frac{1}{2}\begin{cases}2+2, & \begin{cases}-1\le x-2t\le 3\\ -1\le x+2t\le 3\end{cases}\\ 2+0, & \begin{cases}x-2t<-1\\ -1\le x+2t\le 3\end{cases}\cup\begin{cases}x-2t>3\\ -1\le x+2t\le 3\end{cases}\\ 0+2, & \begin{cases}-1\le x-2t\le 3\\ x+2t<-1\end{cases}\cup\begin{cases}-1\le x-2t\le 3\\ x+2t>3\end{cases}\\ 0+0, & \begin{cases}x-2t>3\\ x+2t>3\end{cases}\cup\begin{cases}x-2t<-1\\ x+2t>3\end{cases}\cup\begin{cases}x-2t<-1\\ x+2t<-1\end{cases}\cup\begin{cases}x-2t>3\\ x+2t<-1\end{cases}\end{cases}$$

$x = 0$

$$u(t,0) = \frac{1}{2}\begin{cases} 2+2, & \begin{cases} -1 \le -2t & \le 3 \\ -1 \le +2t & \le 3 \end{cases} \\ 2+0, & \begin{cases} -2t < -1 \\ -1 \le +2t & \le 3 \end{cases} \bigcup \begin{cases} -2t > 3 \\ -1 \le +2t & \le 3 \end{cases} \\ 0+2, & \begin{cases} -1 \le -2t & \le 3 \\ +2t < -1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} -1 \le -2t & \le 3 \\ +2t > 3 \end{cases} \\ 0+0, & \begin{cases} -2t > 3 \\ +2t > 3 \end{cases} \bigcup \begin{cases} -2t < -1 \\ +2t > 3 \end{cases} \\ & \bigcup \begin{cases} -2t < -1 \\ +2t < -1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} -2t > 3 \\ +2t < -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$u(t,0) = \begin{cases} 2, & [-\frac{3}{2} \le t \le \frac{1}{2}] \bigcap [-\frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{2}] = [-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}] \\ 1+0, & [t > \frac{1}{2}] \bigcap [-\frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{2}] = [\frac{1}{2} < t \le \frac{3}{2}] \\ & or[t < -\frac{3}{2}] \bigcap [-\frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{2}] = \emptyset \\ 0+1, & [-\frac{3}{2} \le t \le \frac{1}{2}] \bigcap [t < -\frac{1}{2}] = [-\frac{3}{2} \le t < -\frac{1}{2}] \\ & or[-\frac{3}{2} \le t \le \frac{1}{2}] \bigcap [t > \frac{3}{2}] = \emptyset \\ 0+0, & [t < -\frac{3}{2}] \bigcap [t > \frac{3}{2}] = \emptyset \\ & or[t > \frac{1}{2}] \bigcap [t > \frac{3}{2}] = [t > \frac{3}{2}] \\ & or[t > \frac{1}{2}] \bigcap [t < -\frac{1}{2}] = \emptyset \\ & or[t < -\frac{3}{2}] \bigcap [t < -\frac{1}{2}] = [t < -\frac{3}{2}] \end{cases}$$

$t \le 0$ לא בתחום:

$$u(t,0) = \begin{cases} 2, & [0 \le t \le \frac{1}{2}] \\ 1, & [\frac{1}{2} < t \le \frac{3}{2}] \\ 0, & [t > \frac{3}{2}] \end{cases}$$

נקודות האי-רציפות הן $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{3}{2}$

1.10 תרגיל.

נתון מיתר אינסופי המקיים

$$u_{tt} = u_{xx}, t > 0$$

$$u(0,x) = 1$$

$$u_t(0,x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$$

א. מצא $u(1,x)$. ב. האם u פתרון אמיתי? נמק.

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c=1$, נתן לרשום את $u(t,x)$ כסכום שך גל נסוג וגל מתקדם

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$$

נתון

$$u(0,x) = f(x) = 1$$

$$u_t(0,x) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$u(0,x) = F(x) + G(x) = f(x)$$

$$u_t(t,x) = F'(x+t) - G'(x-t)$$

$$u_t(0,x) = F'(x) - G'(x) = g(x)$$

$$F(x) - G(x) = \int_0^x g(z)dz$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F(x) - G(x) = \int_0^x g(z)dz \end{cases}$$

הגל הנסוג:

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\int_0^x g(z)dz$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_0^x g(z)dz$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\int_0^x g(z)dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\begin{cases} \int_0^{-1} g(z)dz, & x \leq -1 \\ \int_0^x g(z)dz, & -1 < x < 1 \\ \int_0^1 g(z)dz, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \begin{cases} \int_0^{-1}(-1)dz, & x \le -1 \\ \int_0^{x}(-1)dz, & -1 < x < 1 \\ \int_0^{1}(-1)dz, & x \ge 1 \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 1 \\ -1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ \frac{1-x}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$$

הגל המתקדם:

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_0^x g(z)dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \begin{cases} \int_0^{-1} g(z)dz, & x \le -1 \\ \int_0^{x} g(z)dz, & -1 < x < 1 \\ \int_0^{1} g(z)dz, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \begin{cases} \int_0^{-1}(-1)dz, & x \le -1 \\ \int_0^{x}(-1)dz, & -1 < x < 1 \\ \int_0^{1}(-1)dz, & x \ge 1 \end{cases} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 1 \\ -1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1+x}{2}, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

סכומם:

$$u(1,x) = F(x+1) + G(x-1) =$$

$$\begin{cases} 1, & x+1 \le -1 \\ \frac{1-(x+1)}{2}, & -1 < x+1 < 1 \\ 0, & x+1 \ge 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x-1 \le -1 \\ \frac{1+(x-1)}{2}, & -1 < x-1 < 1 \\ 1, & x-1 \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1, & x \le -2 \\ \frac{-x}{2}, & -2 < x < 0 \\ 0, & x \ge 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 1+0, & x \le -2 \\ \frac{-x}{2}+0, & -2 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 0+\frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0+1, & x \ge 2 \end{cases}$$

ב. הפתרון אינו אמיתי. $u(t,x)$ אינה גזירה בנקודות בהן $x \pm t = \pm 1$ כיוון שבנקודות $x = \pm 1$ הפונקציה $g(x)$ אינה רציפה. למשל $u(1,x)$ אינה גזירה בנקודות $\pm 2, 0$.

1.11 תרגיל.

נתון מיתר אינסופי המקיים

$$u_{tt} = 4u_{xx}, t > 0$$

$$u(0,x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$u_t(0,x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 4, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

א. באמצעות השיטה הגרפית שרטת את הגרף של $u(1,x)$.
ב. מצא את $\lim_{t\to\infty} u(t,5)$.
ג. מצא את אוסף הנקודות בהן הפתרון סינגולרי (אינו אמיתי).
ד.מצא את אוסף הנקודות בהן הפתרון אינו רציף.

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c = 2$, נתון לרשום את $u(t,x)$ כסכום שד גל נסוג וגל מתקדם

$$u(t,x) = F(x+2t) + G(x-2t)$$

נתון

$$u(0,x) = f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$u_t(0,x) = g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 4, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$u(0,x) = F(x) + G(x) = f(x)$$

$$u_t(t,x) = 2F'(x+2t) - 2G'(x-2t)$$

$$u_t(0,x) = 2F'(x) - 2G'(x) = g(x)$$

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g(z)dz$$

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=f(x) \\ F(x)-G(x)=\frac{1}{2}\int_0^x g(z)dz \end{cases}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{4}\int_0^x g(z)dz$$

$$G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{4}\int_0^x g(z)dz$$

$$g(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 4, & 1\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

הגל הנסוג:

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{4}\int_0^x g(z)dz=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}+\frac{1}{4}\begin{cases} \int_0^1 g(z)dz, & x<1 \\ \int_0^x g(z)dz, & 1\le x\le 2 \\ \int_0^2 g(z)dz, & x>2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1-x^2}{2}, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}+\frac{1}{4}\begin{cases} \int_0^1 0\cdot dz, & x<1 \\ \int_0^1 0\cdot dz+\int_1^x 4\cdot dz, & 1\le x\le 2 \\ \int_0^1 0\cdot dz+\int_1^2 4\cdot dz, & x>2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1-x^2}{2}, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}+\frac{1}{4}\begin{cases} 0, & x<1 \\ 4(x-1), & 1\le x\le 2 \\ 4(2-1), & x>2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{1-x^2}{2}, & -1\le x\le 1 \\ x-1, & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

הגל המתקדם:

$$G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{4}\int_0^x g(z)dz=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}-\frac{1}{4}\begin{cases} \int_0^1 g(z)dz, & x<1 \\ \int_0^x g(z)dz, & 1\le x\le 2 \\ \int_0^2 g(z)dz, & x>2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1-x^2}{2}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} - \frac{1}{4} \begin{cases} \int_0^1 0 \cdot dz, & x < 1 \\ \int_0^1 0 \cdot dz + \int_1^x 4 \cdot dz, & 1 \le x \le 2 \\ \int_0^1 0 \cdot dz + \int_1^2 4 \cdot dz, & x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1-x^2}{2}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} - \frac{1}{4} \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 4(x-1), & 1 \le x \le 2 \\ 4(2-1), & x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1-x^2}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 1-x, & 1 < x \le 2 \\ -1, & x > 2 \end{cases}$$

$$u(1,x) = F(x+2) + G(x-2) =$$

$$= \begin{cases} 0, & x+2 < -1 \\ \frac{1-(x+2)^2}{2}, & -1 \le x+2 \le 1 \\ x+2-1, & 1 < x+2 \le 2 \\ 1, & x+2 > 2 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x-2 < -1 \\ \frac{1-(x-2)^2}{2}, & -1 \le x-2 \le 1 \\ 1-(x-2), & 1 < x-2 \le 2 \\ -1, & x-2 > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{1-(x+2)^2}{2}, & -3 \le x \le -1 \\ x+1, & -1 < x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1-(x-2)^2}{2}, & 1 \le x \le 3 \\ 3-x, & 3 < x \le 4 \\ -1, & x > 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{1-(x+2)^2}{2}, & -3 \le x \le -1 \\ x+1, & -1 < x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1-(x-2)^2}{2} + 1, & 1 \le x \le 3 \\ 4-x, & 3 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

ב. מצא את $u(t,5)$ $\lim_{t\to\infty}$. לפי נוסחאת דלמבר $c = 2$, $x = 5$:

$$u(t,5) = \frac{f(5+2t) + f(5-2t)}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int_{5-2t}^{5+2t} g(s)ds$$

$$u(0,x)=f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

$$u_t(0,x)=g(x)=\begin{cases} 0, & x<1\\ 4, & 1\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

$$t\to\infty\Rightarrow\quad |5+2t|>1\Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(5+2t)=0$$
$$t\to\infty\Rightarrow\quad |5-2t|>1\Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(5-2t)=0$$

$$t\to\infty\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}\int_{5-2t}^{5+2t} g(s)ds=\frac{1}{4}\int_{5-2t}^{1} g(s)ds+\frac{1}{4}\int_{1}^{2} g(s)ds+\frac{1}{4}\int_{2}^{5+2t} g(s)ds$$

$$=0+\frac{1}{4}\int_1^2 4ds+0=2-1=1$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t,5)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{f(5+2t)+f(5-2t)}{2}+\frac{1}{4}\int_{5-2t}^{5+2t} g(s)ds\right)=1$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t,5)=1$$

ג. מצא את אוסף הנקודות בהן הפתרון סינגולרי (אינו אמיתי).

ג. הפתרון אינו אמיתי. הפתרון הסינגולרי על הישרים: $x\pm 2t=\pm 1,2$.
$u(t,x)$ אינה גזירה בנקודות בהן $x\pm 2t=\pm 1,2$ כיוון שבנקודות $x=1,2$ הפונקציה $g(x)$ אינה רציפה. למשל $u(1,x)$ אינה גזירה בנקודות $4,\pm 3,\pm 1,0$.

ד.מצא את אוסף הנקודות בהן הפתרון אינו רציף.

ד. הפתרון רציף.

1 משוואה הגלים ההומוגנית עבור מיתר חצי אינסופי.

נפתור בעיית התחלה-שפה למיתר קשור לראשית

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 \le x < \infty, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & 0 \le x < \infty \\ u_t(0,x) = g(x), & 0 \le x < \infty \\ u(t,0) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

תנאי קומפטביליות (תאימות) : $f(0) = g(0) = 0$.

הפתרון נתון ע"י הרחבה אי-זוגי של f ושל g לפונקציות המוגדרות על כל הישר,$\tilde{f}$ו $\tilde{g}$, ומציאת הפתרון לבעיית ההתחלה המתקבלת , במיתר אינסופי בעזרת נוסחת דלאמבר. יהי $\tilde{u}$ הפתרון המתקבל עבור לבעייה המורחבת .

- טענה: הצמצום של $\tilde{u}$ לקטע $[0,\infty)$ הוא הפתרון לבעייה שלנו. ברור שהפתרון שמקיים את המשוואה ותנאי ההתחלה לכל x יקיים אותם בפרט עבור $x > 0$. אולם צריך לבדוק שגם תנאי השפה מתקיים.

- טענת עזר: $\tilde{u}(t,0) = 0$. נגדיר $v(t,-x) = -\tilde{u}(t,0)$ ונקבל

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = -\tilde{u}_{tt}(t,-x) + \tilde{u}_{xx}(t,-x) = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ v(0,x) = -\tilde{u}(t,-x) = -f(\tilde{-}x) = \tilde{f}(x), & -\infty < x < \infty \\ v_t(0,x) = -\tilde{u}_t(t,0) = -g(\tilde{-}x) = \tilde{g}(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

- לכן v פתרון של בעיית ההתחלה על מיתר אינסופי , עם תנאי התחלה $\tilde{f}, \tilde{g}$, וממשפט היחידות $v = \tilde{u}$, כלומר $\tilde{u}(x,y) = v(-x,y)$ ומכאן $\tilde{u}(t,0) = 0$.

(2) נפתור בעיית התחלה -שפה למיתר חצי אינסופי החופשי בקצהו, (ולמשל כולן ארוך.)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 \le x < \infty, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & 0 \le x < \infty \\ u_t(0,x) = g(x), & 0 \le x < \infty \\ u(t,0) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

הפתרון ע"י הרחבה זוגית של f ושל g לפונקציות המוגדרות על כל הישר , $\tilde{f}$ ו $\tilde{g}$, ומציאת הפתרון לבעיית השפה המיתקבלת. כמו כודם הפתרון יקיים את המשוואה ותנאי ההתחלה , וע"י הגדרת $v(t,x) = u(t,-x)$ מקבלים גם קיום תנאי השפה.

(3) נפתור בעיית התחלה-שפה עם תנאי שפה לא הומוגני

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 \le x < \infty, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & 0 \le x < \infty \\ u_t(0,x) = g(x), & 0 \le x < \infty \\ u(t,0) = h(t), & t > 0 \end{cases}$$

הפתרון הכללי

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

עבור $s = x - ct \ge 0$ מציבים את תנאי ההתחלה ומקבלים

$$F(s) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2c}\int_0^s g(\xi)d\xi + k$$

$$G(s) = \frac{1}{2}f(s) - \frac{1}{2c}\int_0^s g(\xi)d\xi - k$$

צריך לחשב גם את $G(s)$ עבור $s < 0$, (כי יתכן $s = x - ct < 0$). מהצבת תנאי השפה

$$h(t) = u(0,t) = F(ct) + G(-ct) t > 0$$

נציב $s = -ct$ ונקבל

$$G(s) = -F(-s) + h(\frac{-s}{c})$$

כיוון שערכי h ו G ידועים עבור $-s > 0$, נקבל עבור $s < 0$:

$$G(s) = -\frac{1}{2}f(-s) - \frac{1}{2c}\int_0^{-s} g(\xi)d\xi - k + h(\frac{-s}{c})$$

כיוון ש $x + ct \ge 0$ נפריד לשני מקרים $x - ct \ge 0$ ו $x - ct < 0$ ונציב בפתרון הכללי , נקבל

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi, & x \ge ct \\ \frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(\xi)d\xi + h(t - \frac{x}{c}), & x < ct \end{cases}$$

הפתרון אמיתי אם u ונגזרותיו עד סדר שני קיימות ורציפות. לשם כך מספיק לידרוש

$$f(0) = h(0), g(0) = h'(0), c^2 f''(0) = h''(0).$$

(4) בדיוק באותו אופן פותרים את בעיית ההתחלה שפה

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0\le x<\infty, t>0 \\ u(0,x)=f(x), & 0\le x<\infty \\ u_t(0,x)=g(x), & 0\le x<\infty \\ u_x(t,0)=h(t), & t>0 \end{cases}$$

1.1 תרגיל.

- נתון מיתר חצי אינסופי. הצג את הפתרון למשואת הגלים הומוגנים המקיים את תנאי ההתחלה, ואת תנאי הקצה:

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0\le x<\infty, t>0 \\ u(0,x)=f(x) & 0\le x<\infty \\ u_t(0,x)=g(x) & 0\le x<\infty \\ u(t,0)=h(t) & t>0 \end{cases}$$

מהו התנאי על f,g,h המבטיח כי הפתרון הוא אמיתי (בעל שני נגזרות בתחום)?

- ב. כעת נניח כי $c=2$,

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, \\ u(0,x)=f(x)=\begin{cases} x(3\pi-x), & 0\le x\le 3\pi \\ 0, & 3\pi<x \end{cases} \\ u_t(0,x)=g(x)=0 \\ u(t,0)=h(t)=\sin t \end{cases}$$

ויהיה $u(t,x)$ פתרון (מוכלל) של בעיה עם נתונים אלו. חשב $u(\pi,\pi); u(\pi,4\pi)$.

פתרון:

הפתרון הכללי ידוע כ:

$$u(t,x)=F(x+ct)+G(x-ct)$$

נציב את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} u(0,x)=f(x) & u(0,x)=f(x)=F(x)+G(x) \\ u_t(0,x)=g(x) & \\ u(t,0)=h(t) & u(t,0)=h(t)=F(ct)+G(-ct) \end{cases}$$

מכאן:

$$\begin{array}{ll} u_t(0,x)=g(x) & \Rightarrow u_t(t,x)=cF'(x+ct)-cG'(x-ct) \\ u_t(0,x)=g(x)=cF'(x)-cG'(x) & \Rightarrow cF(x)-cG(x)=\int_0^x g(s)ds+const \end{array}$$

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=f(x) \\ cF(x)-cG(x)=\int_0^x g(s)ds+const \end{cases}$$

$$x\geq 0\Rightarrow \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds+\frac{1}{2}const \\ G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds-\frac{1}{2}const \end{cases}$$

כדי לקבל את F,G עבור $x\leq 0$ נשתמש בתנאי הקצה:

$$h(t)=F(ct)+G(-ct)$$

בהצבה $z=ct$ נקבל מן המשוואה האחרונה:

$$G(-z)=h(\frac{z}{c})-F(z),z>0$$

ובדומה, ע"י הצבה $z=-ct$

$$F(-z)=h(-\frac{z}{c})-G(z),z>0$$

מתוך הבטויים הידעים עבור F,G ב $z\geq 0$ נקבל את ההצבות הבאות עבור F,G בתחום $z\leq 0$:

$$\Rightarrow\begin{cases} F(x)=h(\frac{x}{c})-\frac{1}{2}f(-x)-\frac{1}{2c}\int_{-x}^0 g(s)ds-\frac{1}{2}const \\ G(x)=h(-\frac{x}{c})-\frac{1}{2}f(-x)+\frac{1}{2c}\int_{-x}^0 g(s)ds+\frac{1}{2}const \end{cases}$$

מסקנה: הפתרון מוגדר לפי איזורים הבאים:

- $x+ct\geq 0\bigcup x-ct\geq 0$:

$$u(t,x)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$$

שהוא, כצפוי, זהה לנוסחת היודעה עבור משאות גלים ללא תנאי שפה

- $x+ct\geq 0\bigcup x-ct\leq 0$:

$$u(t,x)=\frac{1}{2}h(t-\frac{x}{c})+\frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}g(s)ds$$

התנאים הנדרשים לפתון אמיתי: f גזירה פעמים, g גזירה פעמ אחת ובנוסף h גזירה פעמיים ומקיימת

$$h'(0) = g(0), h(0) = f(0)$$

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, & x \geq ct \\ \frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)ds + h(t-\frac{x}{c}), & x < ct \end{cases}$$

- במקרה זה $u(\pi,\pi)$

$$x - ct = \pi - 2\pi = -\pi < 0$$

לכן

$$u(t,x) = \frac{f(x+2t) - f(2t-x)}{2} + \frac{1}{4}\int_{2t-x}^{x+2t} g(s)ds + h(t-\frac{x}{2})$$

$$u(\pi,\pi) = \frac{f(\pi+2\pi) - f(2\pi-\pi)}{2} + h(\pi - \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \frac{0 - \pi(3\pi-\pi)}{2} + \sin(\pi - \frac{\pi}{2}) = 1 - \pi^2$$

במקרה זה $u(\pi,4\pi)$

$$x - ct = 4\pi - 2\pi = 2\pi > 0$$

לכן

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$$u(\pi,4\pi) = \frac{f(4\pi+2\pi) + f(4\pi-2\pi)}{2} = \frac{f(6\pi) + f(2\pi)}{2} = \frac{0 + 2\pi(3\pi - 2\pi)}{2} = \pi^2$$

1.2 תרגיל.

נתון מיתר חצי אינסופי. הצג את הפתרון למשוואת הגלים הומוגנים המקיים את תנאי ההתחלה, ואת תנאי הקצה:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 \le x < \infty, t > 0 \\ u(0,x) = 2x = f(x) & 0 \le x < \infty \\ u_t(0,x) = 6 = g(x) & 0 \le x < \infty \\ u(t,0) = t = h(t) & t > 0 \end{cases}$$

פתרון:

הפתרון הכללי ידוע כ:

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$$

נציב את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} u(0,x) = f(x) = 2x & u(0,x) = f(x) = 2x = F(x) + G(x) \\ u_t(0,x) = g(x) = 6 & \\ u(t,0) = h(t) = t & u(t,0) = h(t) = t = F(t) + G(-t) \end{cases}$$

מכאן:

$$\begin{array}{rl} u_t(0,x) = g(x) & \Rightarrow u_t(t,x) = F'(x+t) - G'(x-t) \\ u_t(0,x) = 6 = F'(x) - G'(x) & \Rightarrow F(x) - G(x) = \int_0^x 6ds + const = 6x + const \end{array}$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = 2x \\ F(x) - G(x) = 6x + const \end{cases}$$

$$x \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} F(x) = 4x + \frac{1}{2}const \\ G(x) = -2x - \frac{1}{2}const \end{cases}$$

כדי לקבל את F, G עבור $x \le 0$ נשתמש בתנאי הקצה:

$$h(t) = t = F(t) + G(-t)$$

בהצבה $z = t$ נקבל מן המשוואה האחרונה:

$$G(-z) = z - F(z), z > 0$$

ובדומה ,ע"י הצבה $z=-t$

$$F(-z)=-z-G(z), z>0$$

מתוך הבטויים הידעים עבור F,G ב $z\geq 0$ נקבל את ההצבות הבאות עבור F,G בתחום $z\leq 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=x-(2x-\frac{1}{2}const)=-x+\frac{1}{2}const \\ G(x)=-x-F(-x)=-x-(-4x+\frac{1}{2}const)=3x-\frac{1}{2}const \end{cases}$$

מסקנה: הפתרון מוגדר לפי איזורים הבאים:

- $x+ct\geq 0\bigcup x-ct\geq 0$:

$$u(t,x)=4(x+t)+\frac{1}{2}const-2(x-t)-\frac{1}{2}const=2x+6t$$

שהוא, כצפוי, זהה לנוסחת היודעה עבור משאות גלים ללא תנאי שפה

- $x+ct\geq 0\bigcup x-ct\leq 0$:

$$u(t,x)=4(x+t)+\frac{1}{2}const+3(x-t)-\frac{1}{2}const=7x+t$$

(2)

$$u(t,x)=\begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds, & x\geq ct \\ \frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}g(s)ds+h(t-\frac{x}{c}), & x<ct \end{cases}$$

$$u(t,x)=\begin{cases} \frac{2(x+t)+2(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}6ds=2x+6t, & x\geq t \\ \frac{2(x+t)-2(t-x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t}6ds+t-x=7x+t, & x<t \end{cases}$$

1.3 תרגיל.

נתונה הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & 0\leq x<\infty, t>0 \\ u(0,x)=f(x)=\begin{cases} x & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x & 1<x\leq 2 \\ 0 & 2<x<\infty \end{cases}, & 0\leq x<\infty \\ u_t(0,x)=g(x)=0, & 0\leq x<\infty \\ u(t,0)=0, & t>0 \end{cases}$$

- א) הסבר מדוע לבעיה הנ"ל אין פיתרון אמיתי.
- ב) חשב את $u(1,x)$.
- ג) חשב את $\frac{\partial u}{\partial x}(t,1)$.

פתרון:

- (1) הפתרון הכללי ידוע כ:

$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$$

נציב את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} u(0,x) = f(x) & u(0,x) = f(x) = F(x) + G(x) \\ u_t(0,x) = g(x) = 0 & \\ u(t,0) = h(t) = 0 & u(t,0) = h(t) = 0 = F(t) + G(-t) \end{cases}$$

מכאן:

$$\begin{array}{cc} u_t(0,x) = g(x) & \Rightarrow u_t(t,x) = F'(x+t) - G'(x-t) \\ u_t(0,x) = 0 = F'(x) - G'(x) & \Rightarrow F(x) - G(x) = \int_0^x 0ds + const = const \end{array}$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F(x) - G(x) = const \end{cases}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}const \\ G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}const \end{cases}$$

כדי לקבל את F,G עבור $x \leq 0$ נשתמש בתנאי הקצה:

$$h(t) = 0 = F(t) + G(-t)$$

בהצבה $z = t$ נקבל מן המשוואה האחרונה:

$$G(-z) = -F(z), z > 0$$

ובדומה, ע"י הצבה $z = -t$

$$F(-z) = -G(z), z > 0$$

מתוך הבטויים הידעים עבור F,G ב $z \geq 0$ נקבל את ההצבות הבאות עבור F,G בתחום $z \leq 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x) = -(\frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2}const) = -\frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}const \\ G(x) = -(\frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}const) = -\frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2}const \end{cases}$$

מסקנה: הפתרון מוגדר לפי איזורים הבאים:

* $x+ct\geq 0 \bigcup x-ct\geq 0$:

$$u(t,x)=\frac{1}{2}f(x+t)+\frac{1}{2}const+\frac{1}{2}f(x-t)-\frac{1}{2}const$$

$$=\frac{1}{2}f(x+t)+\frac{1}{2}f(x-t)$$

שהוא, כצפוי, זהה לנוסחת היודעה עבור משאות גלים ללא תנאי שפה

* $x+ct\geq 0 \bigcup x-ct\leq 0$:

$$u(t,x)=\frac{1}{2}f(x+t)+\frac{1}{2}const-\frac{1}{2}f(t-x)-\frac{1}{2}const$$

$$=\frac{1}{2}f(x+t)-\frac{1}{2}f(t-x)$$

(2)

$$u(t,x)=\begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds, & x\geq ct \\ \frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}g(s)ds+h(t-\frac{x}{c}), & x<ct \end{cases}$$

$$u(t,x)=\begin{cases} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}0ds=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}, & x\geq t \\ \frac{f(x+t)-f(t-x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t}0ds+h(t-x)=\frac{f(x+t)-f(t-x)}{2}, & x<t \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x & 1<x\leq 2 \\ 0 & 2<x<\infty \end{cases} \Rightarrow f(x+t)=\begin{cases} x+t & 0\leq x+t\leq 1 \\ 2-(x+t) & 1<x+t\leq 2 \\ 0 & 2<x+t<\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x-t)=\begin{cases} x-t & 0\leq x-t\leq 1 \\ 2-(x-t) & 1<x-t\leq 2 \\ 0 & 2<x-t<\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t-x)=\begin{cases} t-x & 0\leq t-x\leq 1 \\ 2-(t-x) & 1<t-x\leq 2 \\ 0 & 2<t-x<\infty \end{cases}$$

$$u(t,x)=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{cc} x+t & 0\le x+t\le 1\\ 2-(x+t) & 1<x+t\le 2\\ 0 & 2<x+t<\infty\end{array}\right. + \left\{\begin{array}{cc} x-t & 0\le x-t\le 1\\ 2-(x-t) & 1<x-t\le 2\\ 0 & 2<x-t<\infty\end{array}\right. , & x\ge t\\ \left\{\begin{array}{cc} x+t & 0\le x+t\le 1\\ 2-(x+t) & 1<x+t\le 2\\ 0 & 2<x+t<\infty\end{array}\right. + \left\{\begin{array}{cc} t-x & 0\le t-x\le 1\\ 2-(t-x) & 1<t-x\le 2\\ 0 & 2<t-x<\infty\end{array}\right. , & x<t\end{array}\right.$$

$$u(1,x)=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{cc} x+1 & 0\le x+1\le 1\\ 2-(x+1) & 1<x+1\le 2\\ 0 & 2<x+1<\infty\end{array}\right. + \left\{\begin{array}{cc} x-1 & 0\le x-1\le 1\\ 2-(x-1) & 1<x-1\le 2\\ 0 & 2<x-1<\infty\end{array}\right. , & x\ge 1\\ \left\{\begin{array}{cc} x+1 & 0\le x+1\le 1\\ 2-(x+1) & 1<x+1\le 2\\ 0 & 2<x+1<\infty\end{array}\right. + \left\{\begin{array}{cc} 1-x & 0\le 1-x\le 1\\ 2-(1-x) & 1<1-x\le 2\\ 0 & 2<1-x<\infty\end{array}\right. , & x<1\end{array}\right.$$

$$u(1,x)=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{cc} x+1 & -1\le x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & 1<x\end{array}\right. + \left\{\begin{array}{cc} x-1 & 1\le x\le 2\\ 3-x & 2<x\le 3\\ 0 & 3<x\end{array}\right. , & x\ge 1\\ \left\{\begin{array}{cc} x+1 & -1\le x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & 1<x\end{array}\right. + \left\{\begin{array}{cc} 1-x & 0\le x\le 1\\ 1+x & -1<x\le 0\\ 0 & x<-1\end{array}\right. , & x<1\end{array}\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{cc} 0+x-1 & 1\le x\le 2\\ 0+3-x & 2<x\le 3\\ 0+0 & 3<x\end{array}\right. , & x\ge 1\\ 1-x+1-x, 0\le x\le 1 & x<1\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{cc} 1-x, & 0\le x<1\\ \frac{x-1}{2} & 1\le x\le 2\\ \frac{3-x}{2} & 2<x\le 3\\ 0 & 3<x\end{array}\right.$$

– ג) חשב את $\frac{\partial u}{\partial x}(t,1)$.

$$u(t,x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}0ds=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}, & x\ge t\\ \frac{f(x+t)-f(t-x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t}0ds+h(t-x)=\frac{f(x+t)-f(t-x)}{2}, & x<t\end{array}\right.$$

$$u_x(t,x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{f'(x+t)+f'(x-t)}{2}, & x\ge t\\ \frac{f'(x+t)-f'(t-x)\cdot(-1)}{2}, & x<t\end{array}\right.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ -1 & 1 < x \le 2 \\ 0 & 2 < x < \infty \end{cases} \Rightarrow f'(x+t) = \begin{cases} 1 & 0 \le x+t \le 1 \\ -1 & 1 < x+t \le 2 \\ 0 & 2 < x+t < \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x-t) = \begin{cases} 1 & 0 \le x-t \le 1 \\ -1 & 1 < x-t \le 2 \\ 0 & 2 < x-t < \infty \end{cases} \Rightarrow f'(t-x) = \begin{cases} 1 & 0 \le t-x \le 1 \\ -1 & 1 < t-x \le 2 \\ 0 & 2 < t-x < \infty \end{cases}$$

$$u_x(t,x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{f'(x+t)+f'(x-t)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x+t \le 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 < x+t \le 2 \\ 0 & 2 < x+t < \infty \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x-t \le 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 < x-t \le 2 \\ 0 & 2 < x-t < \infty \end{cases} & , \quad x \ge t \\ \frac{f'(x+t)+f'(t-x)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x+t \le 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 < x+t \le 2 \\ 0 & 2 < x+t < \infty \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le t-x \le 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 < t-x \le 2 \\ 0 & 2 < t-x < \infty \end{cases} & , \quad x < t \end{cases}$$

$$u_x(t,1) =$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le 1+t \le 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 < 1+t \le 2 \\ 0 & 2 < 1+t < \infty \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le 1-t \le 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 < 1-t \le 2 \\ 0 & 2 < x-t < \infty \end{cases} & , \quad 1 \ge t \\ \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le 1+t \le 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 < 1+t \le 2 \\ 0 & 2 < 1+t < \infty \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le t-1 \le 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 < t-1 \le 2 \\ 0 & 2 < t-1 < \infty \end{cases} & , \quad 1 < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \le t \le 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 < t \le 1 \\ 0 & 1 < t \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le t \le 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 < t \le 0 \\ 0 & t < -1 \end{cases} & , \quad 1 \ge t \\ \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \le t \le 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 < t \le 1 \\ 0 & 1 < t \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 \le t \le 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 < t \le 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases} & , \quad 1 < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0 < t \le 1 \\ 0 + \frac{1}{2} & 1 \le t \le 2 \\ 0 - \frac{1}{2} & 2 < t \le 3 \\ 0 + 0 & 3 < t \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 < t \le 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le t \le 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 < t \le 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$

• (2) זו בעיית שפה התחלה על מיתר חצי אינסופי . נרחיב את f ו g לפונקציות אי זוגיות:

$$\tilde{f} = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ -2-x & -2 \le x < -1 \\ x & -1 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \\ 0 & 2 < x < \infty \end{cases}$$

$$\tilde{g(x)} = 0 - \infty < x < \infty$$

ונפתור בעיית מיתר אינסופי . כפי שראינו פתרון זה יקיים בנוסף לתנאי ההתחלה גם את תנאי השפה. הפתרון

$$u(t,x)) = \frac{\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{cases} 0 & x+t < -2 \\ -2-(x+t) & -2 \le x+t < -1 \\ x+t & -1 \le x+t \le 1 \\ 2-(x+t) & 1 < x+t \le 2 \\ 0 & 2 < x+t \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & x-t < -2 \\ -2-(x-t) & -2 \le x-t < -1 \\ x-t & -1 \le x-t \le 1 \\ 2-(x-t) & 1 < x-t \le 2 \\ 0 & 2 < x-t \end{cases}$$

$$u(1,x) = \frac{\tilde{f}(x+1) + \tilde{f}(x-1)}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{cases} 0 & x+1 < -2 \\ -2-(x+1) & -2 \le x+1 < -1 \\ x+1 & -1 \le x+1 \le 1 \\ 2-(x+1) & 1 < x+1 \le 2 \\ 0 & 2 < x+1 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & x-1 < -2 \\ -2-(x-1) & -2 \le x-1 < -1 \\ x-1 & -1 \le x-1 \le 1 \\ 2-(x-1) & 1 < x-1 \le 2 \\ 0 & 2 < x-1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & x < -3 \\ -3-x & -3 \le x < -2 \\ x+1 & -2 \le x \le 0 \\ 1-x & 0 < x \le 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & x < -1 \\ -1-x & -1 \le x < 0 \\ x-1 & 0 \le x \le 2 \\ 3-x & 2 < x \le 3 \\ 0 & 3 < x \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{cases} 0+0 & x < -3 \\ -3-x+0 & -3 \le x < -2 \\ x+1+0 & -2 \le x \le -1 \\ x+1+(-1-x) & -1 \le x < 0 \\ 1-x+(x-1) & 0 < x \le 1 \\ 0+x-1 & 1 < x \le 2 \\ 0+3-x & 2 < x \le 3 \\ 0+0 & 3 < x \end{cases}$$

- א) כדי שהפתרון יהיה אמיתי צריך שהפתרון יהיה גזיר פעמיים ברציפות בכל אחד מהמשתנים . אבל לפתרון שמצאנו יש נקודות אי גזירות , למשל $u_x(0,x) = \tilde{f}'(x)$ לא קיימת עבור $x = 1$.

- ג)

$$\tilde{f}' = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ -1 & -2 \le x < -1 \\ 1 & -1 \le x \le 1 \\ -1 & 1 < x \le 2 \\ 0 & 2 < x < \infty \end{cases}$$

, עבור $0 < t < 1$ נקבל

$$u_x(t,1) = \frac{\tilde{f}'(1+t) + \tilde{f}'(1-t)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

עבור $1 < t < 2$ נקבל

$$u_x(t,1) = \frac{\tilde{f}'(1+t) + \tilde{f}'(1-t)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

עבור $2 < t < 3$ נקבל

$$u_x(t,1) = \frac{\tilde{f}'(1+t) + \tilde{f}'(1-t)}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ועבור $t > 3$ נקבל

$$u_x(t,1) = \frac{\tilde{f}'(1+t) + \tilde{f}'(1-t)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

.

1.4 תרגיל.

נתון מיתר חצי אינסופי

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, & 0\le x<\infty, t>0 \\ u(0,x)=0 & 0\le x<\infty \\ u_t(0,x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<a \\ 2 & a\le x\le 2a \\ 0 & 2a<x<\infty \end{cases} & 0\le x<\infty \\ u_x(t,0)=0, & 0\le t<\infty \end{cases}$$

כאשר $a>0$ קבוע נתון . ע"י בצוע המשכה מתאימה וע"י מציעת הגל הנסוג $F(x)$ והגל המתקדם $G(x)$.חשב את $u(1,x)$.

פתרון:

נגדיר את f,g ב- $-\infty<x<\infty$ ונפתור בעיה במיתר האינסופי בפרט תתקים המשוואה ושני התנאים בתחום $0<x<\infty$ נדאג גם שיתקים התנאי $u_x(t,0)=0$ לשם כך נדאג ש- u_x תהיה פונקציה אי זוגית של x

$$h(x)=-h(-x)\Rightarrow h(0)=-h(0)\Rightarrow h(0)=0$$

u_x אי זוגית $\Leftarrow$ u זוגית לכן נמצא u זוגית כפתרון בעית מיתר אינסופי . נגדיר המשכה זוגית של f,g

$$f(x)=0\Rightarrow \tilde{f}(x)=0$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<a \\ 2 & a\le x<2a \\ 0 & 2a\le x<\infty \end{cases}\Rightarrow \tilde{g}(x)=\begin{cases} 0 & x<-2a \\ 2 & -2a\le x\le -a \\ 0 & -a<x<a \\ 2 & a\le x\le 2a \\ 0 & x>2a \end{cases}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\tilde{f}(x)+\frac{1}{4}\int_0^x \tilde{g}(z)dz=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{cases} \int_0^{-2a} g(z)dz, & x<-2a \\ \int_0^{-a} g(z)dz+\int_0^x g(z)dz, & -2a\le x\le -a \\ \int_0^a g(z)dz, & -a<x<a \\ \int_0^a g(z)dz+\int_0^x g(z)dz, & a\le x\le 2a \\ \int_0^{2a} g(z)dz, & x>2a \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{cases} \int_0^{-2a} g(z)dz, & x < -2a \\ \int_{-a}^{x} g(z)dz, & -2a \le x \le -a \\ \int_0^{a} g(z)dz, & -a < x < a \\ \int_a^{x} g(z)dz, & a \le x \le 2a \\ \int_0^{2a} g(z)dz, & x > 2a \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{cases} \int_0^{-2a} 2dz, & x < -2a \\ \int_{-a}^{x} 2dz, & -2a \le x \le -a \\ \int_0^{a} 0dz, & -a < x < a \\ \int_a^{x} 2dz, & a \le x \le 2a \\ \int_0^{2a} 2dz, & x > 2a \end{cases} = \begin{cases} -a, & x < -2a \\ x+a, & -2a \le x \le -a \\ 0, & -a < x < a \\ x-a, & a \le x \le 2a \\ a, & x > 2a \end{cases}$$

הגל המתקדם:

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{4}\int_0^x g(z)dz = \frac{1}{4}\begin{cases} a, & x < -2a \\ -x-a, & -2a \le x \le -a \\ 0, & -a < x < a \\ -x+a, & a \le x \le 2a \\ -a, & x > 2a \end{cases}$$

$$u(a,x) = F(x+2a) + G(x-2a) =$$

$$= \begin{cases} -a, & x+2a < -2a \\ (x+2a)+a, & -2a \le x+2a \le -a \\ 0, & -a < x+2a < a \\ (x+2a)-a, & a \le x+2a \le 2a \\ a, & x+2a > 2a \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} a, & x-2a < -2a \\ -(x-2a)-a, & -2a \le x-2a \le -a \\ 0, & -a < x-2a < a \\ -(x-2a)+a, & a \le x-2a \le 2a \\ -a, & x-2a > 2a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a, & x < -4a \\ x+3a, & -4a \le x \le -3a \\ 0, & -3a < x < -a \\ x+a, & -a \le x < 0 \\ a, & x \ge 0 \end{cases} + \begin{cases} a, & x \le 0 \\ -x+a, & 0 < x \le a \\ 0, & a < x < 3a \\ -x+3a, & 3a \le x \le 4a \\ -a, & x > 4a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a + a, & x < -4a \\ x + 3a + a, & -4a \leq x \leq -3a \\ 0 + a, & -3a < x < -a \\ x + a + a, & -a \leq x \leq 0 \\ a - x + a, & 0 \leq x \leq a \\ a + 0, & a < x < 3a \\ a + (-x + 3a), & 3a \leq x \leq 4a \\ a - a, & x > 4a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < -4a \\ x + 4a, & -4a \leq x \leq -3a \\ a, & -3a < x < -a \\ x + 2a, & -a \leq x < 0 \\ -x + 2a, & 0 < x \leq a \\ a, & a < x < 3a \\ -x + 4a, & 3a \leq x \leq 4a \\ 0, & x > 4a \end{cases}$$

1 משוואת הגלים הלא הומוגנית עבור מיתר אינסופי וחצי אינסופי.

נתבונן בבעית התחלה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(0,x) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

המתארת תנודה של מיתר אידאלי אינסופי הנתון תחת השפעתו של כוח מאלץ נתון F. גם כאן תנאי ההתחלה f,g הן פונקציות נתונות המייצגות את משרעת המיתר u, ומהירות התנודה u_t בזמן $t=0$.

עבור נקודה כלשהי (t,x) נקבל הנוסחה לפתרון הבעיה שנקראת גם היא נוסחת דלמבר.

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int\int_{\Delta} F(z,\tau)dzd\tau =$$

$$= \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(z,\tau)dzd\tau$$

- <u>משפט:</u> בעיית קושי בתחום $0 \le t \le T, -\infty < x < \infty$ הינה מוצגת היטב עבור
$$F, F_x \in \mathcal{C}(\mathcal{R}^2), f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{R}), g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R}).$$

- <u>משפט:</u> אם הפונקציות f,g זוגיות, ולכל $t \ge 0$ הפונקציה $F(t,.)$ זוגית , אז פתרון בעיית קושי הוא פונקציה זוגית של x. כמו כן , הפתרון הוא אי- זוגי או מחזורי עם מחזור L (כפונקציה של x) אם הנתונים הם אי-זוגיים או מחזוריים עם מחזור L.

דרך נוספת לפתרון בעיית קושי האי הומוגנית היא בעמצעות ניחוש פתרון v למשוואה החלקית האי-הומוגנית. אגב זה לא קשה כאשר ל-F צורה פשוטה , למשל כאשר $F=F(x)$ או $F=F(t)$. אחרי שמצאנו פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית , נסתכל על $w = u - v$. מעקרון הסופרפוזיציה w צריכה לפתור את הבעיה ההומוגנית הבאה

$$\begin{cases} \omega_{tt} - c^2 \omega_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ \omega(0,x) = f(x) - v(0,x), & -\infty < x < \infty \\ \omega_t(0,x) = g(x) - v_t(0,x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

את הפונקציה w מקבלים על פי נוסחאת דלמבר לבעיה ההומוגנית. לפיכך , פיתרון בעית קושי האי הומוגנית הוא $u = w + v$, וחסכנו את ביצוע האינטגרל הכפול .

1.1 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1 \\ u(0,x) = x^2 \\ u_t(0,x) = 1 \end{cases}$$

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c = 1$. ננחש פתרון פרטי מהצורה $v = v(t)$, נסתכל על $u(t,x) = w(t,x) + v(t)$. מעקרון הסופרפוזיציה w צריכה לפתור את הבעיה ההומוגנית.

$$u_{xx}(t,x) = w_{xx}(t,x)$$

$$u_t(t,x) = w_t(t,x) + v_t(t) \Rightarrow u_{tt}(t,x) = w_{tt}(t,x) + v_{tt}(t)$$

$$\begin{cases} w_{tt} + v_{tt} - w_{xx} = 1 \\ u(0,x) = w(0,x) + v(0) = x^2 \\ u_t(0,x) = w_t(0,x) + v_t(0) = 1 \end{cases}$$

ונקבל $\Rightarrow v_{tt}(t) = 1$

$$v_{tt}(t) = 1 \Rightarrow v_t(t) = \int v_{tt} dt = \int 1 dt = t \Rightarrow v(t) = \int v_t dt = \int t dt = \frac{t^2}{2}$$

לכן $w(t,x) = u(t,x) - v(t) \Rightarrow w(t,x) = u(t,x) - \frac{t^2}{2}$

$$u(t,x) = w(t,x) + \frac{t^2}{2} \Rightarrow u_t = w_t + t, u_{tt} = w_{tt} + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{tt} + 1 - w_{xx} = 1 \\ u(0,x) = w(0,x) + 0 = x^2 \\ u_t(0,x) = w_t(0,x) + 0 = 1 \end{cases}$$

נעבור למערכת ההומוגנית המתאימה:

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(0,x) = x^2 \\ w_t(0,x) = 1 \end{cases}$$

לפי נוסחאת דלאמבר , הפתרון לבעיה הומוגנית זו הוא:

$$w(t,x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds$$

$$= \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1ds = x^2 + t^2 + t$$

לכן הפתרון לבעיה המקורית

$$u(t,x) = w(t,x) + \frac{t^2}{2} \Rightarrow u(t,x) = \underbrace{x^2 + t^2 + t} + \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow u(t,x) = x^2 + \frac{3t^2}{2} + t$$

- דרך נוספת לפתרון בעיית:

$$a = 1, 2b = 0, c = -1$$

$$\Rightarrow b^2 - ac = 0 - 1(-1) = 1 > 0$$

זאות משוואה היפרבולית, משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\pm\sqrt{1}}{1} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + c_1 \\ x = -t + c_2 \end{cases}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\begin{cases} s = x - t \\ r = x + t \end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(t,x) = w(s(t,x), r(t,x))$ לפי t ו x ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_t = w_s s_t + w_r r_t = -w_s + w_r \\ u_x = w_s s_x + w_r r_x = w_s + w_r \\ u_{tt} = w_{ss} s_t^2 + 2w_{sr} s_t r_t + w_{rr} r_t^2 + w_s s_{tt} + w_r r_{tt} = w_{ss} - 2w_{sr} + w_{rr} \\ u_{xx} = w_{ss} s_x^2 + 2w_{sr} s_x r_x + w_{rr} r_x^2 + w_s s_{xx} + w_r r_{xx} = w_{ss} + 2w_{sr} + w_{rr} \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$[w_{ss} - 2w_{sr} + w_{rr}] - [w_{ss} + 2w_{sr} + w_{rr}] = 1$$

$$-4w_{sr} = 1 \Rightarrow w_{sr} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow w_s = \int w_{sr} dr = \int -\frac{1}{4} dr = -\frac{1}{4} r + F(s)$$

$$\Rightarrow w = \int w_s ds = \int \left[-\frac{1}{4} r + F(s)\right] ds = -\frac{1}{4} rs + F(s) + G(r)$$

$$u(t,x) = -\frac{1}{4}(x^2 - t^2) + F(x-t) + G(x+t)$$

נחפש פתרון פרטי:

$$u(0,x) = x^2 \Rightarrow u(0,x) = x^2 = -\frac{1}{4}(x^2) + F(x) + G(x)$$

$$u_t(0,x) = 1 \Rightarrow u_t(t,x) = \frac{t}{2} - F'(x-t) + G'(x+t)$$

$$u_t(0,x) = 1 \Rightarrow u_t(0,x) = -F'(x) + G'(x) = 1 \Rightarrow -F(x) + G(x) = \int 1 dx = x + const$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \frac{5}{4} x^2 \\ -F(x) + G(x) = x + const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{5}{8} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} const \\ G(x) = \frac{5}{8} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} const \end{cases}$$

$$u(t,x) = -\frac{1}{4}(x^2 - t^2) + \frac{5}{8}(x-t)^2 - \frac{1}{2}(x-t) - \frac{1}{2} const + \frac{5}{8}(x+t)^2 + \frac{1}{2}(x+t) + \frac{1}{2} const$$

$$\Rightarrow u(t,x) = x^2 + \frac{3t^2}{2} + t$$

• דרך נוספת לפתרון בעיית: נוסחת דלמבר.

$$u(x,t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(z,\tau)dzd\tau$$

$$u(x,t)=\frac{(x+t)^2+(x-t)^2}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} 1dzd\tau$$

$$u(x,t)=x^2+t^2+\frac{1}{2}[x+t-(x-t)]+\frac{1}{2}\int_0^t[x+(t-\tau)-(x-(t-\tau))]d\tau$$

$$u(x,t)=x^2+t^2+t+\frac{1}{2}\int_0^t 2(t-\tau)d\tau=x^2+t^2+t-\frac{(t-\tau)^2}{2}\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow u(t,x)=x^2+\frac{3t^2}{2}+t$$

1.2 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=e^x-e^{-x}, & -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(0,x)=x, & -\infty<x<\infty \\ u_t(0,x)=\sin x, & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c=3$. ננחש פתרון פרטי מהצורה $v=v(x)$, נסתכל על $u(t,x)=w(t,x)+v(x)$. מעקרון הסופרפוזיציה w צריכה לפתור את הבעיה ההומוגנית.

$$u_t(t,x)=w_t(t,x)\Rightarrow u_{tt}(t,x)=w_{tt}(t,x)$$

$$u_{xx}(t,x)=w_{xx}(t,x)+v_{xx}(x)$$

$$\begin{cases} w_{tt} - 9(w_{xx} + v_{xx}(x)) = e^x - e^{-x} \\ u(0,x) = w(0,x) + v(x) = x \\ u_t(0,x) = w_t(0,x) = \sin x \end{cases}$$

ונקבל $v_{xx}(x) = -\frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$$\Rightarrow v_x(x) = \int v_{xx}dx = -\int \frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right)dx = -\frac{1}{9}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow v(x) = \int v_x dx = -\int \frac{1}{9}\left(e^x + e^{-x}\right)dx = -\frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

לכן $w(t,x) = u(t,x) - v(x) \Rightarrow w(t,x) = u(t,x) + \frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$$u(t,x) = w(t,x) - \frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right) \Rightarrow u_t = w_t, u_{tt} = w_{tt}$$

נעבור למערכת ההומוגנית המתאימה:

$$\begin{cases} w_{tt} - 9(w_{xx} - \frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right)) = e^x - e^{-x} \\ u(0,x) = w(0,x) - \frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right) = x \\ u_t(0,x) = w_t(0,x) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - 9w_{xx} = 0 \\ w(0,x) = x + \frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right) = f(x) \\ w_t(0,x) = \sin x = g(x) \end{cases}$$

לפי נוסחאת דלאמבר , הפתרון לבעיה הומוגנית זו הוא:

$$w(t,x) = \frac{f(x+3t) + f(x-3t)}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)ds$$

$$= \frac{(x+3t) + \frac{1}{9}\left(e^{x+3t} - e^{-(x+3t)}\right) + (x-3t) + \frac{1}{9}\left(e^{x-3t} - e^{-(x-3t)}\right)}{2} +$$

$$+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \sin s ds =$$

$$= x + \frac{1}{9}\left[\sinh(x+3t) + \sinh(x-3t)\right] - \frac{1}{6}\left[\cos(x+3t) - \cos(x-3t)\right]$$

$$= x + \frac{1}{9}\left[2\sinh(\frac{x+3t+x-3t}{2})\cosh(\frac{x+3t-x+3t}{2})\right] -$$

$$-\frac{1}{6}\left[-2\sin(\frac{x+3t+x-3t}{2})\sin(\frac{x+3t-x+3t}{2})\right]$$

$$= x + \frac{2}{9}\sinh x\cosh 3t + \frac{1}{3}\sin x\sin 3t$$

השתמשנו בנוסחאות הבאות :

נוסחת הסינוס ההפרבולי:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

נוסחת הסכום של סינוסים הפרבוליים:

$$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$

נוסחה קוסינוסים:

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

לכן הפתרון לבעיה המקורית

$$u(t,x) = w(t,x) - \frac{1}{9}\left(e^x - e^{-x}\right) = w(t,x) - \frac{2}{9}\sinh x$$

$$u(t,x) = x + \frac{2}{9}\sinh x\cosh 3t + \frac{1}{3}\sin x\sin 3t - \frac{2}{9}\sinh x$$

- דרך נוספת לפתרון בעיית:

$$a = 1, 2b = 0, c = -9$$

$$\Rightarrow b^2 - ac = 0 - 1(-9) = 9 > 0$$

זאות משוואה היפרבולית, משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\pm\sqrt{1}}{1} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ x' = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t + c_1 \\ x = -3t + c_2 \end{cases}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\begin{cases} s = x - 3t \\ r = x + 3t \end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(t,x) = w(s(t,x), r(t,x))$ לפי t ו x ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_t = w_s s_t + w_r r_t = -3w_s + 3w_r \\ u_x = w_s s_x + w_r r_x = w_s + w_r \\ u_{tt} = w_{ss} s_t^2 + 2w_{sr} s_t r_t + w_{rr} r_t^2 + w_s s_{tt} + w_r r_{tt} = 9w_{ss} - 18w_{sr} + 9w_{rr} \\ u_{xx} = w_{ss} s_x^2 + 2w_{sr} s_x r_x + w_{rr} r_x^2 + w_s s_{xx} + w_r r_{xx} = w_{ss} + 2w_{sr} + w_{rr} \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$[9w_{ss} - 18w_{sr} + 9w_{rr}] - 9[w_{ss} + 2w_{sr} + w_{rr}] = e^x - e^{-x}$$

$$-36w_{sr} = e^{\frac{s+r}{2}} - e^{-\frac{s+r}{2}} \Rightarrow w_{sr} = -\frac{1}{36}\left[e^{\frac{s+r}{2}} - e^{-\frac{s+r}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow w_s = \int w_{sr} dr = \int -\frac{1}{36}\left[e^{\frac{s+r}{2}} - e^{-\frac{s+r}{2}}\right] dr = -\frac{1}{18}\left[e^{\frac{s+r}{2}} + e^{-\frac{s+r}{2}}\right] + F(s)$$

$$\Rightarrow w = \int w_s ds = \int \left[-\frac{1}{18}\left[e^{\frac{s+r}{2}} + e^{-\frac{s+r}{2}}\right] + F(s)\right] ds =$$

$$= -\frac{1}{9}\left[e^{\frac{s+r}{2}} - e^{-\frac{s+r}{2}}\right] + F(s) + G(r)$$

$$u(t,x) = -\frac{1}{9}\left[e^x - e^{-x}\right] + F(x-3t) + G(x+3t)$$

נחפש פתרון פרטי:

$$u(0,x) = x \Rightarrow u(0,x) = x = -\frac{1}{9}\left[e^x - e^{-x}\right] + F(x) + G(x)$$

$$u_t(0,x) = \sin x \Rightarrow u_t(t,x) = -F'(x-3t) + G'(x+3t)$$

$$u_t(0,x) = \sin x \Rightarrow u_t(0,x) = -F'(x) + G'(x) = \sin x$$

$$\Rightarrow -F(x)+G(x)=\int \sin x dx=-\cos x+const$$

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=x+\frac{1}{9}\left[e^x-e^{-x}\right] \\ -F(x)+G(x)=-\cos x+const \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=\frac{\cos x}{6}+\frac{x}{2}+\frac{1}{18}\left[e^x-e^{-x}\right]-\frac{1}{6}const \\ G(x)=-\frac{\cos x}{6}+\frac{x}{2}-\frac{1}{18}\left[e^x-e^{-x}\right]+\frac{1}{6}const \end{cases}$$

$$u(t,x)=-\frac{1}{9}\left[e^x-e^{-x}\right]+F(x-3t)+G(x+3t)=$$

$$=-\frac{1}{9}\left[e^x-e^{-x}\right]+$$

$$+\overbrace{\frac{\cos(x-3t)}{6}+\frac{x-3t}{2}+\frac{1}{18}\left[e^{x-3t}-e^{-x+3t}\right]-\frac{1}{6}const}+$$

$$\overbrace{-\frac{\cos(x+3t)}{6}+\frac{x+3t}{2}-\frac{1}{18}\left[e^{x+3t}-e^{-x-3t}\right]+\frac{1}{6}const}$$

$$\Rightarrow u(t,x)=x+\frac{2}{9}\sinh x\cosh 3t+\frac{1}{3}\sin x\sin 3t-\frac{2}{9}\sinh x$$

- דרך נוספת לפתרון בעיית: נוסחת דלמבר.

$$u(x,t)=\frac{f(x+3t)+f(x-3t)}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)ds+$$

$$+\frac{1}{6}\int_0^t\int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} F(z,\tau)dzd\tau$$

$$u(x,t)=\frac{x+3t+x-3t}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-3t}^{x+3t}\sin s ds+$$

$$+\frac{1}{6}\int_0^t\int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)}\left(e^z-e^{-z}\right)dzd\tau$$

$$u(t,x)=x+\frac{2}{9}\sinh x\cosh 3t+\frac{1}{3}\sin x\sin 3t-\frac{2}{9}\sinh x$$

1.3 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2t\cos t, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(0,x) = 0, & -\infty < x < \infty \\ u_t(0,x) = 2, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

פתרון:

זוהי משוואת הגלים $c = 1$. ננחש פתרון פרטי מהצורה $v = v(t)$, נסתכל על $u(t,x) = w(t,x) + v(t)$. מעקרון הסופרפוזיציה w צריכה לפתור את הבעיה ההומוגנית.

$$u_{xx}(t,x) = w_{xx}(t,x)$$

$$u_t(t,x) = w_t(t,x) + v_t(t) \Rightarrow u_{tt}(t,x) = w_{tt}(t,x) + v_{tt}(t)$$

$$\begin{cases} w_{tt} + v_{tt} - w_{xx} = 2t\cos t \\ u(0,x) = w(0,x) + v(0) = 0 \\ u_t(0,x) = w_t(0,x) + v_t(0) = 2 \end{cases}$$

ונקבל $\Rightarrow v_{tt}(t) = 2t\cos t$

$$v_{tt}(t) = 2t\cos t \Rightarrow v_t(t) = \int v_{tt}dt = \int 2t\cos t dt = 2t\sin t + 2\cos t$$

$$\Rightarrow v(t) = \int v_t dt = \int (2t\sin t + 2\cos t)\, dt = -2t\cos t + 4\sin t$$

לכן $w(t,x) = u(t,x) - v(t) \Rightarrow w(t,x) = u(t,x) + 2t\cos t - 4\sin t$

$$u(t,x) = w(t,x) - 2t\cos t + 4\sin t \Rightarrow u_t = w_t + 2t\sin t + 2\cos t, u_{tt} = w_{tt} + 2t\cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{tt} + 2t\cos t - w_{xx} = 2t\cos t \\ u(0,x) = w(0,x) - 2\cdot 0\cos 0 + 4\sin 0 = 0 \\ u_t(0,x) = w_t(0,x) + 2\cdot 0 \sin 0 + 2\cos 0 = 2 \end{cases}$$

נעבור למערכת ההומוגנית המתאימה:

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(0,x) = 0 \\ w_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון לבעיה המקורית

$$u(t,x) = w(t,x) - 2t\cos t + 4\sin t \Rightarrow u(t,x) = 0 - 2t\cos t + 4\sin t$$

$$\Rightarrow u(t,x) = -2t\cos t + 4\sin t$$

- דרך נוספת לפתרון בעיית:

$$a = 1, 2b = 0, c = -1$$

$$\Rightarrow b^2 - ac = 0 - 1(-1) = 1 > 0$$

זאות משוואה היפרבולית, משוואות הקווים האופייניים הם:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\pm\sqrt{1}}{1} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + c_1 \\ x = -t + c_2 \end{cases}$$

כותבים פתרון בצורה סתומה,מגדירים את החלפת המשתנים המתאימה:

$$\begin{cases} s = x - t \\ r = x + t \end{cases}$$

נגזור את השוויון $u(t,x) = w(s(t,x), r(t,x))$ לפי t ו x ונשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{cases} u_t = w_s s_t + w_r r_t = -w_s + w_r \\ u_x = w_s s_x + w_r r_x = w_s + w_r \\ u_{tt} = w_{ss} s_t^2 + 2w_{sr} s_t r_t + w_{rr} r_t^2 + w_s s_{tt} + w_r r_{tt} = w_{ss} - 2w_{sr} + w_{rr} \\ u_{xx} = w_{ss} s_x^2 + 2w_{sr} s_x r_x + w_{rr} r_x^2 + w_s s_{xx} + w_r r_{xx} = w_{ss} + 2w_{sr} + w_{rr} \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$[w_{ss} - 2w_{sr} + w_{rr}] - [w_{ss} + 2w_{sr} + w_{rr}] = 2t\cos t$$

$$-4w_{sr} = 2t\cos t \Rightarrow w_{sr} = -\frac{1}{4} \cdot 2\frac{r-s}{2}\cos\left(\frac{r-s}{2}\right)$$

$$\Rightarrow w_s = \int w_{sr}\,dr = \int \left[-\frac{r-s}{4}\cos\left(\frac{r-s}{2}\right)\right] dr =$$

$$= -2\frac{r-s}{2}\sin\left(\frac{r-s}{2}\right) - \cos\left(\frac{r-s}{2}\right) + F(s)$$

$$\Rightarrow w = \int w_s ds = \int \left[-2\frac{r-s}{2}\sin\left(\frac{r-s}{2}\right) - \cos\left(\frac{r-s}{2}\right) + F(s)\right] ds =$$

$$= -(r-s)\cos\left(\frac{r-s}{2}\right) + 4\sin\cos\left(\frac{r-s}{2}\right) + F(s) + G(r)$$

$$u(t,x) = -2t\cos t + 4\sin t + F(x-t) + G(x+t)$$

נחפש פתרון פרטי:

$$u(0,x) = 0 \Rightarrow u(0,x) = 0 = 0 + F(x) + G(x)$$

$$u_t(0,x) = 2 \Rightarrow u_t(t,x) = 2t\sin t + 2\cos t - F'(x-t) + G'(x+t)$$

$$u_t(0,x) = 2 \Rightarrow u_t(0,x) = 2 - F'(x) + G'(x) = 2 \Rightarrow -F(x) + G(x) = \int 0 dx = const$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = 0 \\ -F(x) + G(x) = const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = -\frac{1}{2}const \\ G(x) = \frac{1}{2}const \end{cases}$$

$$u(t,x) = -2t\cos t + 4\sin t + F(x-t) + G(x+t) = -2t\cos t + 4\sin t - \frac{1}{2}const + \frac{1}{2}const$$

$$\Rightarrow u(t,x) = -2t\cos t + 4\sin t$$

- דרך נוספת לפתרון בעיית: נוסחת דלמבר.

$$u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(z,\tau)dzd\tau$$

$$u(x,t) = 0 + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 2ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} 2\tau \cos\tau dz d\tau$$

$$u(x,t) = [x+t-(x-t)] + \int_0^t \tau\cos\tau \left[z \Big|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \right] d\tau$$

$$u(x,t) = 2t + \int_0^t \tau\cos\tau\,[x+(t-\tau)-x+(t-\tau)]\,d\tau$$

$$= 2t + \int_0^t 2(t-\tau)\tau\cos\tau d\tau$$

נעשה אינטגרציה בחלקים

$$= 2t + 2t\int_0^t \tau\cos\tau d\tau - 2\int_0^t \tau^2\cos\tau d\tau$$

$$\int_0^t \tau\cos\tau d\tau = (\tau\sin\tau)\,|_0^t - \int_0^t \sin\tau d\tau$$

$$= t\sin t + \cos t - 1$$

נעשה פעמיים אינטגרציה בחלקים

$$\int_0^t \tau^2\cos\tau d\tau = \left(\tau^2\sin\tau\right)|_0^t - \int_0^t 2\tau\sin\tau d\tau$$

$$= t^2\sin t + (2\tau\cos\tau)\,|_0^t - 2\int_0^t \cos\tau d\tau$$

$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t$$

$$\Rightarrow u(t,x) = 2t + 2t\,(t\sin t + \cos t - 1) - 2\left(t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t\right)$$

$$\Rightarrow u(t,x) = -2t\cos t + 4\sin t$$

1.4 תרגיל. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

- מצא $u(t,x)$ הפותרת את הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos\left(x+t\right), & 0 \le x < \infty, t > 0 \\ u(0,x) = x, & 0 \le x < \infty \\ u_t(0,x) = \sin x, & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

- מצא $v(t,x)$ הפותרת את הבעיה:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = \cos\left(x+t\right), & 0 \le x < \infty, t > 0 \\ v(0,x) = 0, & 0 \le x < \infty \\ v_t(0,x) = 0, & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

- מצא איזו משוואה ותנאי התחלה מקיימת הפונקציה:

$$w(t,x) := v(t,x) - u(t,x)$$

פתרון:

- על פי נוסחת דלמבר:

$$u(t,x) = \frac{(x+t)+(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} sins ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} cos(\xi+\tau)d\xi\right) d\tau =$$

$$= x + \sin x \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sin(x+t) - \sin(x-t+2\tau)\right) d\tau =$$

$$= x + \sin x \sin t + \frac{t}{2}\sin(x+t) + \frac{1}{4}\left(\cos(x+t) - \cos(x-t)\right) =$$

$$= x + \sin x \sin t + \frac{t}{2}\sin(x+t)$$

- על פי נוסחת דלמבר:

$$v(t,x)=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}cos(\xi+\tau)d\xi\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t(\sin(x+t)-\sin(x-t+2\tau))d\tau=$$

$$=\frac{t}{2}\sin(x+t)+\frac{1}{4}\left(\cos(x+t)-\cos(x-t)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin x\sin t+\frac{t}{2}\sin(x+t)$$

-

$$\begin{array}{cc} w_{tt}-w_{xx}=0, & 0\le x<\infty, t>0\\ w(0,x)=-x & 0\le x<\infty\\ w_t(0,x)=-\sin x & 0\le x<\infty \end{array}$$

1 בעיית שטורם-ליוביל ופיתוח לפי פונקציות עצמיות.

נתבונן בשתי בעיות התחלה-שפה הומוגניות. הבעיה הראשונה היא פרבולית ומתארת הולכת חום בתווך אי-הומוגנית. המשוואה החלקית היא הכללה של משוואת החום. מחפסים פונקציה $u(x,t)$ הפותרת את הבעייה:

$$\begin{cases} r(x)m(t)u_t - (p(x)u_x)_x + q(x)u = 0, & a < x < b, t > 0 \\ B_a[u] = \alpha u(a,t) + \beta u_x(a,t) = 0, & t \geq 0 \\ B_b[u] = \gamma u(b,t) + \delta u_x(b,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & a \leq x \leq b \end{cases}$$

הבעייה השניה היפרבולית והיא הכללה של משוואת הגלים:

$$\begin{cases} r(x)m(t)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + q(x)u = 0, & a < x < b, t > 0 \\ B_a[u] = \alpha u(a,t) + \beta u_x(a,t) = 0, & t \geq 0 \\ B_b[u] = \gamma u(b,t) + \delta u_x(b,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & a \leq x \leq b \\ u_t(x,0) = g(x), & a \leq x \leq b \end{cases}$$

אנו מניחים כי מקדמי המשוואה החלקית הם פונקציות ממשיות המקיימות:

$$\begin{cases} p(x), p'(x), q(x), r(x) \in \mathcal{C}([a,b]), \\ p(x), r(x) > 0, \forall x \in [a,b], \\ m(t) \in \mathcal{C}([0,\infty)), \\ m(t) > 0, \forall t \geq 0, \end{cases}$$

וגם מניחים כי

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{R}, \alpha^2 + \beta^2 > 0, \gamma^2 + \delta^2 > 0$$

כאמור, תנאי שפה אלו כוללים את <u>תנאי דיריכלה</u>:

$$\alpha = \gamma = 1, \beta = \delta = 0 \Rightarrow u(a,t) = u(b,t) = 0$$

ואת <u>תנאי נוימן</u>:

$$\alpha = \gamma = 0, \beta = \delta = 1 \Rightarrow u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$$

נתרכז בבעיה הראשונה, הדיון בבעיה ההיפרבולית לגמרי דומה. מחפשים פתרונות <u>לא טריביאליים</u>, בעלי הצורה:

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

כאשר $X(x)$ ו- $T(t)$ הן פונקציות של משתנה אחד, x ו- t, בהתאמה. נציב את הפתרון הזה במשוואה, נפריד משתנים, ונקבל:

$$\frac{m(t)T_t'(t)}{T(t)} = \frac{(p(x)X_x'(x))_x + q(x)X(x)}{r(x)X(x)}$$

אגף שמאל הוא פונקציה של t בלבד ואגף ימין תלוי רק ב- x, לכן קיים קבוע הפרדה λ כך ש-:

$$\frac{m(t)T_t'(t)}{T(t)} = \frac{(p(x)X_x'(x))_x + q(x)X(x)}{r(x)X(x)} = -\lambda$$

כלומר, מד"ח מובילה למערכת מד"ר :

$$\begin{cases} (p(x)X'(x))' + q(x)X(x) = -\lambda r(x)X(x) \\ m(t)T'(t) = -\lambda T(t) \end{cases}$$

כדי שהפתרון $u(x,t)$ יקיים את תנאי שפה, צריך להתקיים:

$$B_a[X] = B_b[X] = 0$$

- כלומר, על הפונקציה $X(x)$ לפתור את בעיית שפה הנקראת <u>בעיית שטורם-ליוביל</u>:

$$\begin{cases} (p(x)X'(x))' + q(x)X(x) + \lambda r(x)X(x) = 0 \\ B_a[X] = B_b[X] = 0 \end{cases}$$

- <u>בעיית שטורם-ליוביל מחזורית</u>:

$$\begin{cases} (p(x)X'(x))' + q(x)X(x) + \lambda r(x)X(x) = 0 \\ X(a) = X(b), X'(a) = X'(b) \end{cases}$$

- פתרון לא טריביאלי ייקרא <u>פונקציה עצמית</u> של הבעייה בעל <u>ערך עצמי</u> λ.

- האופרטור

$$L[X] := (p(x)X'(x))' + q(x)X(x)$$

ייקרא <u>אופרטור מטיפוס שטורם-ליוביל</u>. האופרטור הלינארי L פועל על מרחב הפונקציות הגזירות עד סדר שני המקיימות את תנאי השפה בקצבוות. וקטור $v \neq 0$ הוא וקטור עצמי של L בעל ערך עצמי λ אם מתקיים $Lv = \lambda v$.

- הפונקציה $r(x)$ נקראת פונקציית משקל.

1. על ידי טרנספורמציה ניתן להפוך כל אופרטור לינארי דיפרנציאלי מסדר שני לאופרטור מטיפוס שטורם-ליוביל. נסמן ב-M אופרטור לינארי דיפרנציאלי מסדר שני בצורה כללית:

$$M[X] := A(x)X''(x) + B(x)X'(x) + C(x)X(x) = F(x)$$

נסמן ב-$\mu(x)$ את גורם אינטגראציה, ונכפול:

$$\mu(x)A(x)X''(x) + \mu(x)B(x)X'(x) + \mu(x)C(x)X(x) = \mu(x)F(x)$$

$$\mu(x)A(x)X''(x)+\mu(x)B(x)X'(x) = (p(x)X'(x))' = p'(x)X'(x)+p(x)X''(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu(x)A(x) = p(x) & \Rightarrow \mu'(x)A(x) + \mu(x)A'(x) = p'(x) \\ \mu(x)B(x) = p'(x) & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu'(x)A(x) + \mu(x)A'(x) = \mu(x)B(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{B(x) - A'(x)}{A(x)}$$

$$\Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int \frac{B(x) - A'(x)}{A(x)} dx$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{B(x)-A'(x)}{A(x)} dx}$$

$$p(x) = A(x)e^{\int \frac{B(x)-A'(x)}{A(x)} dx}$$

2. תכונות הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים.

סימטריות: אופרטור L המוגדר על מרחב הפונקציות הגזירות למקוטעין והמקיימות את תנאי השפה, הוא סימטרי ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

$$L[v] := (p(x)v')' + q(x)v$$

נחשב: $\int_a^b (uL[v]-vL[u])\,dx$

$$uL[v]-vL[u]=u\left(p(x)v'\right)'+uq(x)v-v\left(p(x)u'\right)'-vq(x)u$$

$$=\left(up(x)v'\right)'-u'\left(p(x)v'\right)-\left(vp(x)u'\right)'+v'\left(p(x)u'\right)$$

$$=\left(up(x)v'-vp(x)u'\right)'$$

קיבלנו <u>זהות לגרנז'</u>.

$$\int_a^b (uL[v]-vL[u])\,dx=p(x)\left(uv'-vu'\right)|_a^b=p(b)u(b)v'(b)-p(a)v(a)u'(a)$$

קיבלנו <u>נוסחת גרין</u>.

$$B_a[u]=B_b[u]=\alpha u(a)+\beta u'(a)=\gamma u(b)+\delta u'(b)=0,$$

$$B_a[v]=B_b[v]=\alpha v(a)+\beta v'(a)=\gamma v(b)+\delta v'(b)=0,$$

$$v'(b)\left(\gamma u(b)+\delta u'(b)\right)=u'(b)\left(\gamma v(b)+\delta v'(b)\right)\Rightarrow u(b)v'(b)=v(b)u'(b)$$

$$\int_a^b (uL[v]-vL[u])\,dx=p(b)u(b)v'(b)-p(a)v(a)u'(a)$$

$$=p(b)v(b)u'(b)-p(a)v(a)u'(a)=p(x)\left(vu'-vu'\right)|_a^b=0$$

$$\Rightarrow\int_a^b (uL[v]-vL[u])\,dx=0$$

אורתוגונליות: פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל השייכות לערכים עצמי-ים שונים ניצבות זו לזו ביחס למכפלה הפנימית:

$$\langle u,v\rangle_r=\int_a^b u(x)v(x)r(x)dx$$

יהיו v_m,v_n פונקציות עצמיות השייכות לערכים עצמיים שונים $\lambda_m\neq\lambda_n$ בהתאמה. כלומר:

$$-L[v_n]=\lambda_n r v_n$$

$$-L[v_m] = \lambda_m r v_m$$

$$0 = \int_a^b \left(v_m L[v_n] - v_n L[v_m]\right) dx = \left(\lambda_n - \lambda_m\right) \int_a^b v_n v_m r(x) dx$$

אבל $\lambda_m \neq \lambda_n$ לכן

$$\Rightarrow \langle v_n, v_m \rangle_r = 0$$

ערכים עצמיים ממשיים: כל הערכים העצמיים של בעיית שטורם-ליוביל הם ממשיים. נניח כי λ הוא ערך עצמי שאינו ממשי בעל פונקציה עצמית v, אז:

$$\begin{cases} L[v] + \lambda r(x) v = (p(x)v')' + q(x)v + \lambda r(x) v = 0 \\ B_a\left[v\right] = B_b\left[v\right] = \alpha v(a) + \beta v'(a) = \gamma v(b) + \delta v'(b) = 0 \end{cases}$$

ניקח את הצמוד המרוכב של המשוואות, אבל כל המקדמים ממשיים

$$\begin{cases} \overline{L[v] + \lambda r(x) v} = L[\overline{v}] + \overline{\lambda} r(x) \overline{v} = 0 \\ \overline{B_a\left[v\right]} = \overline{B_b\left[v\right]} = \alpha \overline{v}(a) + \beta \overline{v}'(a) = \gamma \overline{v}(b) + \delta \overline{v}'(b) = 0 \end{cases}$$

לפיכך $\overline{v}$ היא פונקציה עצמית בעלת ערך עצמי $\overline{\lambda}$. הואיל ו- λ אינו ממשי, לכן $\lambda \neq \overline{\lambda}$

$$\Rightarrow 0 = \langle \overline{v}, v \rangle_r = \int_a^b \overline{v(x)} v(x) r(x) dx = \int_a^b |v(x)|^2 r(x) dx$$

מצד שני, כיוון ש- $v \neq 0$ ו- $r(x)$ פונקציה חיובית הרי ש- $\int_a^b |v(x)|^2 r(x) dx > 0$, וקיבלנו סתירה.

ממשיות הפונקציות העצמיות: למרחב הפונקציות עצמיות בעלות ערך עצמי λ יש בסיס של פונקציות עצמיות ממשיות.

ערכים עצמיים פשוטים: כל הערכים העצמיים של בעיית שטורם-ליוביל רגולרית הם פשוטים. יהיו v_1, v_2 פונקציות עצמיות השייכות לאותו ערך עצמי λ:

$$-L[v_1] = \lambda r v_1$$

$$-L[v_2] = \lambda r v_2$$

$$v_1L[v_2]-v_2L[v_1]=0$$

אבל על פי זהות לגרנז':

$$v_1L[v_2]-v_2L[v_1]=[p(v_1v_2'-v_2v_1')]'=0$$

$$Q(x):=p(v_1v_2'-v_2v_1')=const$$

בקצוות הקטע מתקיים: $Q(a)=Q(b)=0$ הואיל ו-$p(x)>0$ על כן הוורונסקיאן

$$W:=v_1v_2'-v_2v_1'$$

מתאפס בקצוות. פונקציות v_1, v_2 הן פתרונות של אותה מד"ר לינארית וכיוון שהוורונסקיאן של פונקציות אלו מתאפס בנקודה אחת, הוא מתאפס תמיד והפונקציות v_1, v_2, תלויות לינארית.

במקרה המחזורי ייתכן ערכים עצמיים שאינם פשוטים.

קיום סידרת ערכים עצמיים השואפת לאינסוף: אוסף הערכים העצמיים של בעיית שטורם-ליוביל רגולרית הוא סדרה מונוטונית עולה ממש המתכנסת לאינסוף, בפרט יש אינסוף ערכים עצמיים ומתקיים: $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$.

במקרה המחזורי הסדרה $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא מונוטונית לא יורדת השואפת לאינסוף.

- לבעיית שטורם-ליוביל רגולרית או מחזורית קיימת סדרה אורתונורמלית של פונקציות עצמיות ממשיות ביחס למכפלה הפנימית $\langle u,v\rangle_r$.

סדרת הערכים העצמיים היא ממשית וחסומה מלרע.

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\lambda_{n+1}<\ldots$$

שלמות מערכת הפונקציות העצמיות:

- המערכת האורתונורמלית $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ של כל הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם-ליוביל רגולרית (או מחזורית) היא שלמה במרחב $E_r(a,b)$.

תהיה f פונקציה גזירה למקוטעין בקטע $[a,b]$, אז לכל $x\in(a,b)$ הפיתוח של f לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם-ליוביל רגולרית (או מחזורית) מתכנס לממוצע הקפיצה של f, כלומר ל $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.

אם f פונקציה רציפה וגזירה למקוטעין ומקיימת את שני תנאי השפה עבור בעיית שטורם-ליוביל רגולרית (או מחזורית), אז הפיתוח של f לפי הפונקציות העצמיות מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$.

מנת ריילי $(Rayleigh)$ הערך העצמי המינימלי של בעיית שטורם-ליוביל נקרא ערך עצמי עיקרי (אנרגיית מצב היסוד) והפונקציה העצמית שלו נקראת פונקציה עצמית עיקרית (או מצב יסוד).

- המנה
$$R(u) = -\frac{\int_a^b (uL[u])\,dx}{\int_a^b (u^2 r)\,dx}$$
נקראת מנת ריילי של u.

- הערך העצמי המינימלי λ_0 מקיים את הנוסחה
$$\lambda_0 = \inf_{u\in V} R(u) = \inf_{u\in V}\left(-\frac{\int_a^b (uL[u])\,dx}{\int_a^b (u^2 r)\,dx}\right)$$
כאשר
$$V = \{u \in \mathcal{C}^2([a,b]), B_a[u] = B_b[u] = 0\}$$
יתר על כן, האינפימום של מנת ריילי מתקבל רק עבור הפונקציה העצמית של λ_0.

- אם $q \le 0$ ואם $puu'\,\big|_a^b$ עבור כל פונקציה $u \in V$, אז כל הערכים העצמיים של בעיית שטורם-ליוביל הם אי-שליליים. בפרט, עבור בעיית דיריכלה, נוימן, או בעיה מחזורית, אם $q \le 0$ אזכל הערכים העצמיים אי-שליליים.

התנהגות האסימפטוטית של הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות: עבור n-ים גדולים התנהגות ניתנת על ידי הנוסחה האסימפטוטית:

$$\lambda_n \sim \left(\frac{n\pi}{\int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}dx}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}dx\right)^2 \frac{\lambda_n}{(n\pi)^2} = 1$$

$$u(x) \sim \left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{-1/4}\left[\alpha\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\frac{r(s)}{p(s)}}ds\right) + \beta\sin\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\frac{r(s)}{p(s)}}ds\right)\right]$$

1.1 תרגיל.

פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & 0 < x < L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $u(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$u(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow u(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$u(L) = 0 \Rightarrow u(L) = \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot L\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow u(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $u(x) = \alpha + \beta x$

$$u(0) = 0 \Rightarrow u(0) = \alpha + \beta\cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$u(L) = 0 \Rightarrow u(L) = \beta\cdot L = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow u(x) = 0$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה ליניארית. היא לא יכולה לקיים את שני תנאי השפה .

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $u(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב
$$u(0) = 0 = \alpha\cos(0) + \beta\sin(0) = \alpha$$
ונקבל $\alpha = 0$. עתה, תנאי השפה
$$u(L) = 0 = \beta\sin(\sqrt{\lambda}L), \beta \neq 0$$
גורר ש-$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ כאשר n מספר שלם חיובי. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:
$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n = 1, 2, \ldots.$$
פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:
$$u(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda > 0$ הוא בעל מימד 1. נבחר את $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ כבסיס למרחב זה. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.
$$\begin{cases} u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

1.2 תרגיל.

פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:
$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(0) = u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $u(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow u(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow u'(\frac{\pi}{2}) = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow u(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $X(x) = \alpha + \beta x$

$$u(0) = 0 \Rightarrow u(0) = \alpha + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow u'(\frac{\pi}{2}) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow u(x) = 0$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה ליניארית. היא לא יכולה לקיים את שני תנאי השפה .

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $u(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב

$$u(0) = 0 = \alpha\cos(0) + \beta\sin(0) \Rightarrow \alpha = 0$$

ונקבל $\alpha = 0$. עתה, תנאי השפה

$$u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow u'(x) = \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow u'(\frac{\pi}{2}) = 0 = \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2})$$

גורר ש-$\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ כאשר n מספר שלם חיובי. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = (2n-1)^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$u(x) = \sin[(2n-1)x]$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda > 0$ הוא בעל מימד 1. נבחר את $\sin[(2n-1)\,x]$ כבסיס למרחב זה. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} u_n(x) = \sin[(2n-1)\,x] \\ \lambda_n = (2n-1)^2\,, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

1.3 תרגיל.

פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} u''(x) = -\lambda u(x), \quad 0 < x < \pi \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $u(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow u'(0) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0$$

$$u'(\pi) = 0 \Rightarrow u'(\pi) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0 \Rightarrow u(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $u(x) = \alpha + \beta x$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow u'(0) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow u(x) = \alpha$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda = 0$ הוא בעל מימד 1. נבחר את 1 כבסיס למרחב זה.

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $u(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $u'(0) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = 0$ ונקבל $\beta = 0$. עתה, תנאי השפה $u'(\pi) = 0$ גורר ש-$-\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ כאשר $n = 1, 2, \ldots$. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = n^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$u(x) = \cos nx$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda > 0$ הוא בעל מימד 1. נבחר את $\cos nx$ כבסיס למרחב זה. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים אי שליליים.

$$\begin{cases} u_n(x) = \cos nx \\ \lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

1.4 תרגיל.

פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} u''(x) = -\lambda u(x), \quad 0 < x < \pi \\ u(0) - u(\pi) = 0 \\ u'(0) - u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. בעיית שטורם-ליוביל הזאת מחזורית. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $u(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$u(0) = u(\pi) \Rightarrow u(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = \tilde{\alpha}$$

$$u(\pi) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) = u(0) = \tilde{\alpha}$$

$$u'(0) = u'(\pi) \Rightarrow u'(0) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}$$

$$u'(\pi) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) + \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) = u'(0) = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \neq 0 \Rightarrow \tilde{\alpha}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) + \tilde{\beta}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) = \tilde{\beta}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \neq 0 \Rightarrow \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) \neq 0, \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) \neq 1$$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) \Rightarrow \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}\frac{1-\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)}{\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)} \\ \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) + \tilde{\beta}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot \pi\right) \Rightarrow \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}\frac{\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)}{1-\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}\frac{1-\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)}{\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)} - \tilde{\alpha}\frac{\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)}{1-\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}\left[\left(1-\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)\right)^2 - \sinh^2\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)\right] = 0$$

$$\cosh^2\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) - \sinh^2\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}\left[1-\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)\right] = 0, \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) \neq 1 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי $u(x) = 0$, אין למערכת ערך עצמי שלילי.
כל פתרון לא טריביאלי אינו חסום. על כן אין פתרון מחזורי לא טריביאלי.
כלומר במקרה זה, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $u(x) = \alpha + \beta x$

$$u(0) = u(\pi) \Rightarrow u(0) = \alpha = u(\pi) = \alpha + \beta\pi \Rightarrow \beta = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow u(x) = \alpha$$

פונקציה לינארית היא מחזורית אם ורק אם היא קבועה. לפיכך, $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי עם פונקציה עצמית 1.

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $u(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

$$u(0) = u(\pi) \Rightarrow u(0) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = \alpha$$

$$u(\pi) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = u(0) = \alpha$$

$$u'(0) = u'(\pi) \Rightarrow u'(0) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = \beta\sqrt{\lambda}$$

$$u'(\pi) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = u'(0) = \beta\sqrt{\lambda}$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha\cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = \alpha \Rightarrow \alpha\left(1 - \cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi)\right) = \beta\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) \\ -\alpha\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) + \beta\cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = \beta \Rightarrow \alpha\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = -\beta\left(1 - \cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi)\right) \end{cases}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta \neq 0$$

$$\begin{cases} \left(1 - \cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi)\right) = \frac{\beta}{\alpha}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) \\ \left(1 - \cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi)\right) = -\frac{\alpha}{\beta}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) \end{cases}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = -\frac{\alpha}{\beta}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) \Rightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right)\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta}\right)\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = 0$$

$$\sin(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = 0 \Rightarrow 1 - \cos(\sqrt{\lambda}\cdot \pi) = 0$$

על כן, $\sqrt{\lambda}\pi = 2n\pi$ כאשר $n = 1, 2, \ldots$. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = 4n^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$u(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות אותו ערך עצמי הוא בעל מימד 2. נבחר

$$\{\cos 2nx, \sin 2nx\}$$

כבסיס למרחב זה. לערך עצמי חיובי יש שתי פונקציות עצמיות בלתי תלויות לינארית. ז.א. הריבוי של הערכים העצמיים עבור הבעיה המחזורית הוא 2. הרי-בוי המקסימלי של הערך עצמי לבעיית שטורם-ליוביל הוא 2. כי ממד מרחב כל הפתרונות של המד"ר ללא שום תנאי שפה הוא 2. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים אי-שליליים.

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \Rightarrow u_0(x) = 1 \\ \lambda_n = 4n^2, n = 1, 2, \ldots. \Rightarrow \begin{cases} u_n(x) = \cos 2nx \\ v_n(x) = \sin 2nx \end{cases} \end{cases}$$

1.5 תרגיל.

- פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} u''(x) = -\lambda u(x), \quad 0 < x < \pi \\ u(0) - u'(0) = 0 \\ u(\pi) + u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

- ב) הוכיחו כי כל הערכים העצמיים חיוביים.
- ג) קבלו הערכה עבור ערכים עצמיים גדולים.

פתרון:

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $u(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$u(0) = u'(0) \Rightarrow u(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = \tilde{\alpha}$$

$$u'(0) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}$$

$$u(0) = u'(0) \Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}$$

$$u(\pi) = -u'(\pi) \Rightarrow u(\pi) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)$$

$$u'(\pi) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) + \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)$$

$$\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) =$$

$$= -\tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) - \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)$$

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}$$

$$\tilde{\beta}\left[\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) - \lambda\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) + \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) + \sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)\right] = 0$$

$$-\lambda > 0, \Rightarrow \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) = \tfrac{e^{\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)} - e^{-\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)}}{2} > 0$$

$$\left[\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) - \lambda\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) + \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) + \sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right)\right] > 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda} = 0$$

$u(x) = 0$ מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

- ב) הוכיחו כי כל הערכים העצמיים חיוביים.

נניח כי קיים ערך עצמי $\lambda < 0$. נכפיל את המשוואה בפונקציה העצמית המתאימה u:

$$uu'' + \lambda u^2 = 0$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int_0^\pi uu''dx + \lambda \int_0^\pi u^2 dx = 0$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{cases} \int_0^\pi uu''dx = & (uu')\,|_0^\pi - \int_0^\pi (u')^2\, dx \\ \quad u \to u' & \\ u''dx \to u' & \end{cases}$$

$$(uu')\,|_0^\pi - \int_0^\pi (u')^2\, dx + \lambda \int_0^\pi u^2 dx = 0$$

$$u(\pi)u'(\pi) - u(0)u'(0) - \int_0^\pi (u')^2\, dx + \lambda \int_0^\pi u^2 dx = 0$$

$$u'(0) = u(0), u'(\pi) = -u(\pi) \Rightarrow u(\pi)u'(\pi) - u(0)u'(0) = -u^2(\pi) - u^2(0)$$

$$-u^2(\pi) - u^2(0) - \int_0^\pi (u')^2\, dx + \lambda \int_0^\pi u^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \int_0^\pi u^2 dx = u^2(\pi) + u^2(0) + \int_0^\pi (u')^2\, dx$$

ומכאן סתירה להנחה $\lambda < 0$.

- ב) הוכיחו כי כל הערכים העצמיים חיוביים.

הערך העצמי המינימלי של בעיית שטורם-ליוביל נקרא ערך עצמי עיקרי, או אנרגיית מצב היסוד, והפונקציה העצמית שלו נקראת פונקציה עצמית עיקרית או מצב יסוד.

$$\begin{cases} (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) + \lambda r(x)u(x) = 0 \\ L[u] := (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) \\ B_a\,[u] = \alpha u(a) + \beta u_x(a) = 0 \\ B_b\,[u] = \gamma u(b) + \delta u_x(b) = 0 \end{cases}$$

• המנה

$$R(u) = -\frac{\int_a^b (uL[u])\,dx}{\int_a^b (u^2 r)\,dx}$$

נקראת מנת ריילי של u.

• הערך העצמי המינימלי λ_0 מקיים את הנוסחה

$$\lambda_0 = \inf_{u\in V} R(u) = \inf_{u\in V}\left(-\frac{\int_a^b (uL[u])\,dx}{\int_a^b (u^2 r)\,dx}\right)$$

$$= \inf_{u\in V}\left(\frac{\int_a^b [p(u')^2 - qu^2]\,dx - puu'\,|_a^b}{\int_a^b (u^2 r)\,dx}\right)$$

כאשר

$$V = \{u \in \mathcal{C}^2([a,b]), B_a[u] = B_b[u] = 0\}$$

יתר על כן, האינפימום של מנת ריילי מתקבל רק עבור הפונקציה העצמית של λ_0.

אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{cases} \int_a^b uu''dx = & (uu')\,|_a^b - \int_a^b (u')^2\,dx \\ u \to u' & \\ u''dx \to u' & \end{cases}$$

$$p(x) = 1, r(x) = 1, q(x) = 0, a = 0, b = \pi$$

$$\lambda_0 = \inf_{u\in V}\left(\frac{\int_0^\pi [(u')^2]\,dx - uu'\,|_0^\pi}{\int_0^\pi (u^2)\,dx}\right)$$

$$(uu')\,|_0^\pi = u(\pi)u'(\pi) - u(0)u'(0)$$

$$u'(0) = u(0), u'(\pi) = -u(\pi) \Rightarrow u(\pi)u'(\pi) - u(0)u'(0) = -u^2(\pi) - u^2(0)$$

$$\lambda_0 = \inf_{u\in V}\left(\frac{\int_0^\pi [(u')^2]\,dx + u^2(\pi) + u^2(0)}{\int_0^\pi (u^2)\,dx}\right) \geq 0$$

- אם $q \leq 0$ ואם $puu' \,|_a^b \leq 0$ עבור כל פונקציה $u \in V$, אז כל הערכים העצמיים של בעיית שטורם-ליוביל הם אי-שליליים. בפרט, עבור בעיית דיריכלה, נוימן, או בעיה מחזורית, אם $q \leq 0$ אז כל הערכים העצמיים אי-שליליים.

$$p(x) = 1, q(x) = 0, (uu')\,|_0^\pi = u(\pi)u'(\pi) - u(0)u'(0)$$

$$u'(0) = u(0), u'(\pi) = -u(\pi) \Rightarrow u(\pi)u'(\pi) - u(0)u'(0) = -u^2(\pi) - u^2(0)$$

$$\Rightarrow (uu')\,|_0^\pi = -u^2(\pi) - u^2(0) \leq 0$$

אז כל הערכים העצמיים של בעיית שטורם-ליוביל הם אי-שליליים.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $u(x) = \alpha + \beta x$

$$u(0) = u'(0) \Rightarrow u(0) = \alpha = u'(0) = \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$u(\pi) = -u'(\pi) \Rightarrow u(\pi) = \alpha + \beta\pi = -u'(\pi) = -\beta \Rightarrow \beta(2 + \pi) = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$u(x) = 0$ מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי אפס.

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $u(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

$$u(0) = u'(0) \Rightarrow u(0) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = \alpha$$

$$u'(0) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = \beta\sqrt{\lambda}$$

$$u(0) = u'(0) \Rightarrow \alpha = \beta\sqrt{\lambda}$$

$$u(\pi) = -u'(\pi) \Rightarrow u(\pi) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)$$

$$u'(\pi) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)$$

$$u(\pi) = -u'(\pi) \Rightarrow \alpha\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)+\beta\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi) = \alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)-\beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)$$

$$\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)\left(\alpha+\beta\sqrt{\lambda}\right)+\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)\left(\beta-\alpha\sqrt{\lambda}\right)=0$$

$$\alpha=\beta\sqrt{\lambda}\Rightarrow\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)\left(2\beta\sqrt{\lambda}\right)+\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)\left(\beta-\beta\lambda\right)=0$$

$$\Rightarrow\beta\left[2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)+(1-\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)\right]=0$$

$$\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow\alpha\beta\neq0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)+(1-\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)=0$$

$$\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}+n\pi\Rightarrow(1-\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)\neq0$$

$$\Rightarrow\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)\neq0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\lambda}+(1-\lambda)\tan(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)=0$$

$$\lambda=1\Rightarrow2\sqrt{1}\neq0\Rightarrow\lambda\neq1$$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{\lambda}}{(\lambda-1)}=\tan(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$\left\{\cos(\sqrt{\lambda}x),\sin(\sqrt{\lambda}x)\right\}$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות אותו ערך עצמי הוא בעל מימד 2. נבחר

$$\left\{\cos(\sqrt{\lambda}x),\sin(\sqrt{\lambda}x)\right\}$$

כבסיס למרחב זה. לערך עצמי חיובי יש שתי פונקציות עצמיות בלתי תלויות לינארית. ז.א. הריבוי של הערכים העצמיים עבור הבעיה המחזורית הוא 2. הרי-בוי המקסימלי של הערך עצמי לבעיית שטורם-ליוביל הוא 2. כי ממד מרחב כל

הפתרונות של המד"ר ללא שום תנאי שפה הוא 2. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

- ג) קבלו הערכה עבור ערכים עצמיים גדולים.

$$\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{(\lambda_n-1)}=\tan(\sqrt{\lambda_n}\cdot\pi)\Rightarrow\lim_{\lambda_n\to\infty}\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{(\lambda_n-1)}=\lim_{\lambda_n\to\infty}\tan(\sqrt{\lambda_n}\cdot\pi)$$

$$\lim_{\lambda_n\to\infty}\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{(\lambda_n-1)}=0$$

$$\Rightarrow\tan(\sqrt{\lambda_n}\cdot\pi)\to 0\Rightarrow\sqrt{\lambda_n}\cdot\pi\to n\pi\Rightarrow\lambda_n\to n^2$$

$$n\to\infty\Rightarrow\lambda_n\approx n^2$$

1.6 תרגיל.

פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$\begin{cases}(xu'(x))'=-\frac{\lambda}{x}u(x), & 1<x<e\\ u'(1)=u'(e)=0\end{cases}$$

פתרון:

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא <u>פונקציה עצמית</u> של הבעיה עם <u>ערך עצמי</u> λ.

$$xu''(x)+u'(x)+\frac{\lambda}{x}u(x)=0$$

$$x^2u''(x)+xu'(x)+\lambda u(x)=0$$

ננחש פתרון מהצורה $x=e^t\Rightarrow t=\ln|x|, u(t(x))=w(t)$ כי זו משוואת אוילר.

$$u'_x=w'_tt'_x=w'_t\frac{1}{x}\Rightarrow xu'_x=w'_t$$

$$(xu'_x)'_x=(w'_t)'_x=(w'_t)'_tt'_x=w''_{tt}t'_x=w''_{tt}\frac{1}{x}$$

$$(xu'_x)'_x = xu''_{xx} + u'_x$$

$$(xu'_x)'_x = xu''_{xx} + u'_x = w''_{tt}\frac{1}{x} \Rightarrow x^2u''_{xx} + xu'_x = w''_{tt}$$

$$w''_{tt}(t) + \lambda w(t) = 0$$

כעת נמצא תנאי שפה לבעית שטורם-ליוביל הזו

$$u'_x(x=1) = u'_x(x=e) = 0 \Rightarrow w'_t(e^t=1)t'_x = w'_t(e^t=e)t'_x = 0$$

$$\Rightarrow w'_t(t=0) = w'_t(t=1) = 0 \Rightarrow w'(0) = w'(1) = 0$$

$$\begin{cases} w''(t) + \lambda w(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ w'(0) = w'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים. צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $w(t) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}t\right)$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow w'(0) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0$$

$$w'(1) = 0 \Rightarrow w'(1) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 1\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0 \Rightarrow w(t) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $w(t) = \alpha + \beta t$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow w'(0) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow w(t) = \alpha$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda = 0$ הוא בעל מימד 1. נבחר את 1 כבסיס למרחב זה.

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $w(t) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}t) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}t)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $w'(0) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = 0$ ונקבל $\beta = 0$. עתה, תנאי השפה $w'(1) = 0$ גורר ש-$-\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 1) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}\cdot 1 = n\pi$ כאשר $n = 1, 2, \ldots$. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = n^2\pi^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$w(t) = \cos n\pi t$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda > 0$ הוא בעל מימד 1. נבחר את $\cos n\pi t$ כבסיס למרחב זה. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים אי שליליים.

$$\begin{cases} w_n(t) = \cos n\pi t \\ \lambda_n = n^2\pi^2, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

$$t = \ln x \Rightarrow \begin{cases} u_n(x) = \cos(n\pi \ln x) \\ \lambda_n = n^2\pi^2, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

1.7 תרגיל.

- א) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הנתונה:

$$\begin{cases} ((y-3)v'(y))' = -\frac{\lambda}{y-3}v(y), \quad 4 < y < e+3 \\ v'(4) = v'(e+3) = 0 \end{cases}$$

- ב) הוכיחו ישירות כי סדרת הפונקציות העצמיות היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית המתאימה.

פתרון:

$$x := y - 3 \Rightarrow u(x) := v(x+3)$$

$$v'(y=4)=v'(y=e+3)=0 \Rightarrow u'(x+3=4)\cdot 1=u'(x+3=e+3)\cdot 1=0$$

$$\Rightarrow u'(x=1)=u'(x=e)=0$$

$$\begin{cases} (xu'(x))'=-\frac{\lambda}{x}u(x), & 1<x<e \\ u'(1)=u'(e)=0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ.

$$xu''(x)+u'(x)+\frac{\lambda}{x}u(x)=0$$

$$x^2u''(x)+xu'(x)+\lambda u(x)=0$$

ננחש פתרון מהצורה $x=e^t \Rightarrow t=\ln|x|, u(t(x))=w(t)$ כי זו משוואת אוילר.

$$u'_x=w'_tt'_x=w'_t\frac{1}{x} \Rightarrow xu'_x=w'_t$$

$$(xu'_x)'_x=(w'_t)'_x=(w'_t)'_tt'_x=w''_{tt}t'_x=w''_{tt}\frac{1}{x}$$

$$(xu'_x)'_x=xu''_{xx}+u'_x$$

$$(xu'_x)'_x=xu''_{xx}+u'_x=w''_{tt}\frac{1}{x} \Rightarrow x^2u''_{xx}+xu'_x=w''_{tt}$$

$$w''_{tt}(t)+\lambda w(t)=0$$

כעת נמצא תנאי שפה לבעית שטורם-ליוביל הזו

$$u'_x(x=1)=u'_x(x=e)=0 \Rightarrow w'_t(e^t=1)t'_x=w'_t(e^t=e)t'_x=0$$

$$\Rightarrow w'_t(t=0)=w'_t(t=1)=0 \Rightarrow w'(0)=w'(1)=0$$

$$\begin{cases} w''(t)+\lambda w(t)=0, & 0<t<1 \\ w'(0)=w'(1)=0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $w(t) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}t\right)$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow w'(0) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0$$

$$w'(1) = 0 \Rightarrow w'(1) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 1\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0 \Rightarrow w(t) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $w(t) = \alpha + \beta t$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow w'(0) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow w(t) = \alpha$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda = 0$ הוא בעל מימד 1. נבחר את 1 כבסיס למרחב זה.

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $w(t) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}t) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}t)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $w'(0) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = 0$ ונקבל $\beta = 0$. עתה, תנאי השפה $w'(1) = 0$ גורר ש-$-\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 1) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}\cdot 1 = n\pi$ כאשר $n = 1, 2, \ldots$. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = n^2\pi^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$w(t) = \cos n\pi t$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda > 0$ הוא בעל מימד 1. נבחר את $\cos n\pi t$ כבסיס למרחב זה. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים אי שליליים.

$$\begin{cases} w_n(t) = \cos n\pi t \\ \lambda_n = n^2\pi^2, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

$$t=\ln x \Rightarrow \begin{cases} u_n(x)=\cos(n\pi\ln x) \\ \lambda_n=n^2\pi^2, n=0,1,2,\dots. \end{cases}$$

$$x=y-3 \Rightarrow \begin{cases} v_n(y)=\cos(n\pi\ln(y-3)) \\ \lambda_n=n^2\pi^2, n=0,1,2,\dots. \end{cases}$$

ב) הוכיחו ישירות כי סדרת הפונקציות העצמיות היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית המתאימה.

אורתוגונליות: פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל השייכות לערכים עצמיים שונים ניצבות זו לזו ביחס למכפלה הפנימית:

$$\langle v_n, v_m\rangle_r=\int_a^b v_n(y)v_m(y)r(y)dy, n,m=0,1,2,\dots.$$

$$\begin{cases} v_n(y)=\cos(n\pi\ln(y-3)); n=0,1,2,\dots. \\ r(y)=1/(y-3) \\ a=4, b=e+3 \end{cases}$$

$$\langle v_n, v_m\rangle_r=\int_4^{e+3}\cos(n\pi\ln(y-3))\cos(m\pi\ln(y-3))\frac{1}{y-3}dy$$

$$t:=\ln(y-3)\Rightarrow dt=\frac{1}{y-3}dy$$

$$\langle v_n, v_m\rangle_r=\int_0^1\cos(n\pi t)\cos(m\pi t)dt=\int_0^1\frac{\cos[(n+m)\pi t]+\cos[(n-m)\pi t]}{2}dt$$

$$=\begin{cases} \left[\frac{\sin[(n+m)\pi t]}{2(n+m)\pi}\right]\Big|_0^1+\left[\frac{\sin[(n-m)\pi t]}{2(n-m)\pi}\right]\Big|_0^1, n\neq m \\ \left[\frac{\sin[2n\pi t]}{4n\pi}\right]\Big|_0^1+\frac{1}{2}t\Big|_0^1, n=m\neq 0 \\ t\Big|_0^1, n=m=0 \end{cases}=\begin{cases} 0, n\neq m \\ \frac{1}{2}, n=m\neq 0 \\ 1, n=m=0 \end{cases}$$

כלומר, הסדרה

$$\{1\}\bigcup\left\{\sqrt{2}\cos(n\pi\ln(y-3))\right\}$$

היא סדרה אורתונורמלית של כל הפונקציות העצמיות.

- המערכת האורתונורמלית $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ של כל הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם-ליוביל רגולרית (או מחזורית) היא שלמה במרחב $E_r(a,b)$.

- תהיה f פונקציה גזירה למקוטעין בקטע $[a,b]$, אז לכל $x \in (a,b)$ הפיתוח של f לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם-ליוביל רגולרית (או מחזורית) מתכנס לממוצע הקפיצה של f, כלומר ל $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.
- אם f פונקציה רציפה וגזירה למקוטעין ומקיימת את שני תנאי השפה עבור בעיית שטורם-ליוביל רגולרית (או מחזורית), אז הפיתוח של f לפי הפונקציות העצמיות מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$.

1 פתרון בעיית חום בשיטת הפרדת המשתנים.

נרצה לפתור את בעיית החום:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ ,u(t,0) = u(t,L) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

כאשר k קבוע חיובי. כדי תנאים יהיו תואמים זה לזה, יש לדרוש

$$f(0) = f(L) = 0.$$

המערכת הזאת מתארת את הטמפרטורה $u(t,x)$ של מוט חד-ממדי באורך L, כך שקצותיו מוחזקים בתוך אמבט בטמפרטורה $0°$. מניחים כי אין מקור חיצוני המספק חום למערכת ולכן פותרים משוואה הומוגנית. צריכים לחשב כיצד התפלגות טמפרטורת המוט משתנה לאורך זמן בהינתן כי התפלגות שלה בזמן $t = 0$ היא f.

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$u(t,x) = X(x)T(t),$$

כאשר $T(t)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, t ו-x, בהתאמה.

$$X(x)T_t(t) = kX_{xx}(x)T(t),$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{T_t(t)}{kT(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של t בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של x בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{T_t(t)}{kT(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

נעיר שנוח כאן להוסיף את סימן המינוס לפני λ. משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x), & 0 < x < L \\ \frac{dT(t)}{dt} = -\lambda kT(t), & t > 0 \end{cases}$$

$$u(t,0)=X(0)T(t)=0$$

$$u(t,L)=X(L)T(t)=0$$

$$\Rightarrow X(0)=X(L)=0$$

•

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\lambda X(x), & 0<x<L \\ X(0)=X(L)=0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda<0$, אז $X(x)=\alpha e^{\sqrt{-\lambda}x}+\beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$X(x)=\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+\tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$X(0)=0\Rightarrow X(0)=\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right)+\tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right)=0\Rightarrow\tilde{\alpha}=0$$

$$X(L)=0\Rightarrow X(L)=\tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot L\right)=0\Rightarrow\tilde{\beta}=0\Rightarrow X(x)=0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda=0$, אז $X(x)=\alpha+\beta x$

$$X(0)=0\Rightarrow X(0)=\alpha+\beta\cdot 0=0\Rightarrow\alpha=0$$

$$X(L)=0\Rightarrow X(L)=\beta\cdot L=0\Rightarrow\beta=0\Rightarrow X(x)=0$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה ליניארית. היא לא יכולה לקיים את שני תנאי השפה .

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $X(0) = 0$ ונקבל $\alpha = 0$. עתה, תנאי השפה $X(L) = 0$ גורר ש-$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ כאשר n מספר שלם חיובי. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

•

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda k T(t),$$

הפתרון הכללי :

$$T(t) = Be^{-k\lambda t}$$

נציב בפתרון את λ_n ונקבל:

$$T_n(t) = B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, n = 1, 2, \ldots.$$

• על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, n = 1, 2, \ldots.$$

של פתרונות מופרדים הוא פתרון של משוואת החום המקיים גם את תנאי השפה.

- ניגש עתה לטפל בתנאי ההתחלה . התנאי ההתחלה היה

$$u(0,x)=f(x)\Rightarrow u(0,x)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),n=1,2,\ldots.$$

אז פתרון לבעיית החום

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},n=1,2,\ldots.$$

נאמר כי הטור שתתקבל הוא פתרון מוכלל של מד"ח אם הטור הזה מתכנס במידה שווה בכל תת מלבן המוכל ממש בתחום בו הפתרון מוגדר.
ונוסחה עבור המקדמים :

$$B_m=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)f(x)dx,m=1,2,\ldots.$$

1.1 תרגיל.

נרצה לפתור את בעיית החום. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & 0<x<\frac{\pi}{2},t>0\\ u(t,0)=0,u_x(t,\frac{\pi}{2})=0 & t\geq 0\\ u(0,x)=\sin 5x\cos^2 3x, & 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

פתרון:

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$u(t,x)=X(x)T(t),$$

כאשר $T(t)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, t ו-x, בהתאמה.

$$X(x)T_t(t)=X_{xx}(x)T(t),$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של t בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של x בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

נעיר שנוח כאן להוסיף את סימן המינוס לפני λ. משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{dT(t)}{dt} = -\lambda T(t), & t > 0 \end{cases}$$

$$u(t,0) = X(0)T(t) = 0$$

$$u_x(t,\frac{\pi}{2}) = X'(\frac{\pi}{2})T(t) = 0$$

$$\Rightarrow X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

-

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא <u>פונקציה עצמית</u> של הבעיה עם <u>ערך עצמי</u> λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $X(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow X'(\frac{\pi}{2}) = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $X(x) = \alpha + \beta x$

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = \alpha + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow X'(\frac{\pi}{2}) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה ליניארית. היא לא יכולה לקיים את שני תנאי השפה .

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $X(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $X(0) = 0$ ונקבל $\alpha = 0$. עתה, תנאי השפה $X'(\frac{\pi}{2}) = 0$ גורר ש- $\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ כאשר n מספר שלם חיובי. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = (2n-1)^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$X(x) = \sin[(2n-1)\,x]$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin[(2n-1)\,x] \\ \lambda_n = (2n-1)^2, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

•

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda T(t),$$

הפתרון הכללי :

$$T(t) = Be^{-\lambda t}$$

נציב בפתרון את λ_n ונקבל:

$$T_n(t) = B_n e^{-(2n-1)^2 t}, n = 1, 2, \ldots.$$

• על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin[(2n-1)\,x]e^{-(2n-1)^2t},n=1,2,\ldots.$$

של פתרונות מופרדים הוא פתרון של משוואת החום המקיים גם את תנאי השפה.

• ניגש עתה לטפל בתנאי ההתחלה . התנאי ההתחלה היה

$$u(0,x)=\sin 5x\cos^2 3x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(0,x)=\sin 5x\cos^2 3x=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin[(2n-1)\,x],n=1,2,\ldots.$$

$$u(0,x)=\sin 5x\cos^2 3x=\sin 5x\cdot\left(\frac{\cos 6x+1}{2}\right)=\frac{1}{2}(\sin 5x\cos 6x+\sin 5x)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 11x+\sin(-x)+\sin 5x)=\frac{1}{2}(\sin 11x-\sin x+\sin 5x)$$

$$\frac{1}{2}(\sin 11x-\sin x+\sin 5x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin[(2n-1)\,x],n=1,2,\ldots.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2n-1=11 & \Rightarrow n=6\Rightarrow B_6=\frac{1}{2}\\ 2n-1=1 & \Rightarrow n=1\Rightarrow B_1=-\frac{1}{2}\\ 2n-1=5 & \Rightarrow n=3\Rightarrow B_3=\frac{1}{2}\\ B_n=0,n\neq 1,3,6. & \end{cases}$$

אז פתרון לבעיית החום

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(\sin 11xe^{-121t}-\sin xe^{-t}+\sin 5xe^{-25t}\right),n=1,2,\ldots.$$

1.2 תרגיל.

$u(t,x)$ פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases}u_t-ku_{xx}=0, & 0<x<\pi,t>0\\ ,u_x(t,0)=u_x(t,\pi)=0, & t\geq 0\\ u(0,x)=x^{2004}, & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$$

מצא את $\lim_{t\to\infty}u(t,x)$.

פתרון:

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$u(t,x)=X(x)T(t),$$

כאשר $T(t)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, t ו-x, בהתאמה.

$$X(x)T_t(t)=kX_{xx}(x)T(t),$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{T_t(t)}{kT(t)}=\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של t בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של x בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{T_t(t)}{kT(t)}=\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

נעיר שנוח כאן להוסיף את סימן המינוס לפני λ. משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\lambda X(x), & 0<x<\pi \\ \frac{dT(t)}{dt}=-k\lambda T(t), & t>0 \end{cases}$$

$$u_x(t,0)=X'(0)T(t)=0$$

$$u_x(t,\pi)=X'(\pi)T(t)=0$$

$$\Rightarrow X'(0)=X'(\pi)=0$$

-

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\lambda X(x), & 0<x<\pi \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא <u>פונקציה עצמית</u> של הבעיה עם <u>ערך עצמי</u> λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $X(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow X'(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \Rightarrow X'(\pi) = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $X(x) = \alpha + \beta x$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow X'(0) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow X(x) = \alpha$$

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $X'(0) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = 0$ ונקבל $\beta = 0$. עתה, תנאי השפה $X'(\pi) = 0$ גורר ש-$-\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ כאשר $n = 1, 2, \ldots$. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = n^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$X(x) = \cos nx$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} X_n(x) = \cos nx \\ \lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

•

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k\lambda T(t),$$

הפתרון הכללי :

$$T(t) = Be^{-k\lambda t}$$

נציב בפתרון את λ_n ונקבל:

$$T_n(t) = B_n e^{-kn^2 t}, n = 0, 1, 2, \dots.$$

• על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(nx) e^{-kn^2 t}$$

של פתרונות מופרדים הוא פתרון של משוואת החום המקיים גם את תנאי השפה.

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(nx) e^{-kn^2 t}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(B_0 \cos(0) e^{-0} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx) e^{-kn^2 t}\right) = B_0 + 0$$

• ניגש עתה לטפל בתנאי ההתחלה . התנאי ההתחלה היה

$$u(0,x) = x^{2004} \Rightarrow B_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^{2004} dx = \frac{\pi^{2004}}{2005}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{\pi^{2004}}{2005}$$

1.3 תרגיל.

נרצה לפתור את בעיית החום. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} (1+t)\,xu_t = (x^3u_x)_x\,, & 1<x<e, t>0 \\ u(t,1)+u_x(t,1)=u(t,e)=0, & t\geq 0 \\ u(0,x)=x^{-1}\left[\sin^2\left(\frac{1}{4}\pi\ln x\right)-\frac{1}{2}\right], & 1<x<e \end{cases}$$

פתרון:

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$u(t,x)=X(x)T(t),$$

כאשר $T(t)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, t ו-x, בהתאמה.

$$(1+t)\,xX(x)T_t(t) = \left(x^3X_x(x)T(t)\right)_x\,,$$

$$(1+t)\,xX(x)T_t(t) = T(t)\left(x^3X_x(x)\right)_x\,,$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{(1+t)\,T_t(t)}{T(t)} = \frac{(x^3X_x(x))_x}{xX(x)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של t בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של x בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{(1+t)\,T_t(t)}{T(t)} = \frac{(x^3X_x(x))_x}{xX(x)} = -\lambda.$$

נעיר שנוח כאן להוסיף את סימן המינוס לפני λ. משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות

$$\begin{cases} (1+t)\,T_t(t)+\lambda T(t)=0, & t>0 \\ (x^3X_x(x))_x+\lambda xX(x)=0, & 1<x<e, \end{cases}$$

$$u(t,1)+u_x(t,1)=u(t,e)=0 \Rightarrow u(t,1)+u_x(t,1)=X(1)T(t)+X'(1)T(t)=0$$

$$\Rightarrow (X(1) + X'(1))\, T(t) = 0 \Rightarrow X(1) + X'(1) = 0$$

$$u(t, e) = 0 \Rightarrow u(t, e) = X(e)T(t) = 0 \Rightarrow X(e) = 0$$

•

$$\begin{cases} \left(x^3 X_x(x)\right)_x + \lambda x X(x) = 0, \quad 1 < x < e, \\ X(1) + X'(1) = X(e) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ.

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ.

$$x^3 X''(x) + 3x^2 X'(x) + \lambda x X(x) = 0$$

$$x^2 X''(x) + 3x X'(x) + \lambda X(x) = 0$$

ננחש פתרון מהצורה $x = e^z \Rightarrow z = \ln|x|, X(z(x)) = w(z)$ כי זו משוואת אוילר.

$$X'_x = w'_z z'_x = w'_z \frac{1}{x} \Rightarrow x X'_x = w'_z$$

$$(x X'_x)'_x = (w'_z)'_x = (w'_z)'_z z'_x = w''_{zz} z'_x = w''_{zz} \frac{1}{x}$$

$$(x X'_x)'_x = x X''_{xx} + X'_x$$

$$(x X'_x)'_x = x X''_{xx} + X'_x = w''_{zz} \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 X''_{xx} + x X'_x = w''_{zz}$$

$$\Rightarrow x^2 X''_{xx} = w''_{zz} - x X'_x = w''_{zz} - w'_z$$

$$w''_{zz}(z) + 2w'_z(z) + \lambda w(z) = 0$$

כעת נמצא תנאי שפה לבעית שטורם-ליוביל הזו

$$X(x = 1) + X'(x = 1) = X(x = e) = 0$$

$$\Rightarrow w(e^z=1)+w'_z(e^z=1)z'_x(x=1)=w(e^z=e)=0$$

$$\Rightarrow w(z=0)+w'_z(z=0)\frac{1}{1}=w(z=1)=0$$

$$\begin{cases} w''_{zz}(z)+2w'_z(z)+\lambda w(z)=0, \quad 0<z<1 \\ w(0)+w'_z(0)=w(1)=0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא <u>פונקציה עצמית</u> של הבעיה עם <u>ערך עצמי</u> λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים .

$$r^2+2r+\lambda=0$$

$$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$$

צורת הפתרון הכללי היא :

- אם $1-\lambda>0$, אז $w(z)=e^{-z}\left[\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{1-\lambda}z\right)+\tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{1-\lambda}z\right)\right]$

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2};\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$w(0)+w'_z(0)=w(1)=0\Rightarrow w(0)+w'_z(0)=$$

$$=e^0\left[\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot 0\right)+\tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot 0\right)\right]-$$

$$-e^0\left[\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot 0\right)+\tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot 0\right)\right]+$$

$$+e^0\left[\tilde{\alpha}\sqrt{1-\lambda}\sinh\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot 0\right)+\tilde{\beta}\sqrt{1-\lambda}\cosh\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot 0\right)\right]=0$$

$$w(0)+w'_z(0)=\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\sqrt{1-\lambda}=0\Rightarrow\tilde{\beta}=0$$

$$w(1)=0\Rightarrow w(1)=e^{-1}\left[\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{1-\lambda}\right)+0\right]=0\Rightarrow\tilde{\alpha}=0\Rightarrow w(z)=0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי $\lambda<1$.

• אם $\lambda = 1$,
$$w''_{zz}(z) + 2w'_z(z) + w(z) = 0$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -1$$
אז $w(z) = e^{-z}\left[\alpha + \beta z\right]$

$$w(0) + w'(0) = 0 \Rightarrow w(0) + w'(0) = e^0\left[\alpha + \beta \cdot 0\right] - e^0\left[\alpha + \beta \cdot 0\right] + \beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 0$$

$$w(1) = 0 \Rightarrow w(1) = e^{-1}\left[\alpha + \beta \cdot 1\right] = 0, \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow w(z) = 0$$
מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי $\lambda = 1$.

• אם $1 - \lambda < 0$, אז $w(z) = e^{-z}\left[\alpha \cos\left(\sqrt{\lambda - 1}z\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda - 1}z\right)\right]$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב
$$w(0) + w'(0) = 0 \Rightarrow w(0) + w'(0) =$$

$$= e^0\left[\alpha \cos\left(\sqrt{\lambda - 1} \cdot 0\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda - 1} \cdot 0\right)\right] -$$

$$-e^0\left[\alpha \cos\left(\sqrt{\lambda - 1} \cdot 0\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda - 1} \cdot 0\right)\right] +$$

$$+e^0\left[\alpha\sqrt{\lambda - 1} \sin\left(\sqrt{\lambda - 1} \cdot 0\right) + \beta\sqrt{\lambda - 1} \cos\left(\sqrt{\lambda - 1} \cdot 0\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow w(0) + w'(0) = \beta\sqrt{\lambda - 1} = 0 \Rightarrow \beta = 0$$
ונקבל $\beta = 0$. עתה, תנאי השפה $w(1) = 0$ גורר ש-$0 = \left[\alpha \cos\left(\sqrt{\lambda - 1}\right)\right] e^{-1}$, על כן, $\sqrt{\lambda - 1} = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ כאשר $n = 1, 2, \ldots$. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:
$$\lambda = (n - \frac{1}{2})^2\pi^2 + 1, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$w(z) = e^{-z}\left[\alpha \cos\left(\sqrt{\lambda-1}z\right)\right]$$

אוסף הפונקציות העצמיות השייכות לערך עצמי מסוים הוא מרחב וקטורי. קיבלנו כי מרחב הפונקציות העצמיות בעלות ערך עצמי $\lambda > 1$ הוא בעל מימד 1. נבחר את $e^{-z}\left[\cos\left(\sqrt{\lambda-1}z\right)\right]$ כבסיס למרחב זה. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים אי שליליים.

$$\begin{cases} w_n(z) = e^{-z}\left[\cos\left((n-\frac{1}{2})\pi z\right)\right] \\ \lambda_n = (n-\frac{1}{2})^2\pi^2 + 1, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

$$z = \ln x \Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \frac{1}{x}\cos\left((n-\frac{1}{2})\pi \ln x\right) \\ \lambda_n = (n-\frac{1}{2})^2\pi^2 + 1, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

•

$$(1+t)\,T_t(t) + \lambda T(t) = 0$$

הפתרון הכללי :

$$T(t) = B(1+t)^{-\lambda}$$

$$T_n(t) = B_n(1+t)^{-\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots.$$

$$\lambda_n = (n-\frac{1}{2})^2\pi^2 + 1, n = 1, 2, \ldots$$

$$u_n(t,x) = X_n(x)T_n(t) = B_n\frac{1}{x}\cos\left((n-\frac{1}{2})\pi \ln x\right)(1+t)^{-\lambda_n}$$

• על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{1}{x}\cos\left((n-\frac{1}{2})\pi \ln x\right)(1+t)^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2-1}$$

של פתרונות מופרדים הוא פתרון של משוואת החום המקיים גם את תנאי השפה.

•

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{x}\cos\left((n-\frac{1}{2})\pi\ln x\right)(1+0)^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2-1}=\frac{1}{x}\left[\sin^2\left(\frac{1}{4}\pi\ln x\right)-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{1}{2}\pi\ln x\right)\right)-\frac{1}{2}\right]=-\frac{1}{2x}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\pi\ln x\right)\right]$$

$$\Rightarrow n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow n=1$$

$$B_1=-\frac{1}{2}, B_n=0, n=2,3,\dots$$

$$u(t,x)=-\frac{1}{2x}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\pi\ln x\right)\right](1+t)^{-\frac{1}{4}\pi^2-1}$$

1 משוואות הגלים והחום עם תנאי שפה לא הומוגניים בתחום סופי.

נסתכל על משוואת החום והגלים עם תנאיי התחלה נתונים:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(t,x), & a < x < b, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & a \le x \le b \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx} = F(t,x), & a < x < b, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & a \le x \le b \\ u_t(0,x) = g(x), & a \le x \le b \end{cases}$$

עם ארבעה אפשרויות לתנאי שפה:

$$\begin{cases} \bullet Boundary \quad Conditions: & u(t,a) = A(t) & u(t,b) = B(t) & t > 0 \\ \bullet Boundary \quad Conditions: & u_x(t,a) = A(t) & u_x(t,b) = B(t) & t > 0 \\ \bullet Boundary \quad Conditions: & u(t,a) = A(t) & u_x(t,b) = B(t) & t > 0 \\ \bullet Boundary \quad Conditions: & u_x(t,a) = A(t) & u(t,b) = B(t) & t > 0 \end{cases}$$

כדי לפתור את הבעיות אלו אנחנו מגדירים פונקצית "תיקון" $v(t,x)$ בצורה כך ש-$w(t,x) = u(t,x) - v(t,x)$ מאפסת את תנאיי השפה בכל אחד מהמקרים. אם כך נקבל עבור $w(t,x)$ בעיות חום או גלים (בדרך כלל לא הומוגניות) עם תנאיי שפה הומוגניים.

•

$$\begin{cases} u(t,a) = A(t) \\ u(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t,a) = \underbrace{w(t,a)} + v(t,a) = 0 + v(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = A(t) \\ u(t,b) = \underbrace{w(t,b)} + v(t,b) = 0 + v(t,b) = B(t) \Rightarrow v(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = \alpha(t)\cdot a + \beta(t) = A(t) \Rightarrow \beta(t) = A(t) - \alpha(t)\cdot a \\ v(t,b) = B(t) \Rightarrow v(t,b) = \alpha(t)\cdot b + A(t) - \alpha(t)\cdot a = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \beta(t) = A(t) - [B(t) - A(t)]a/[b-a] \\ \Rightarrow \alpha(t) = [B(t) - A(t)]/[b-a] \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \Rightarrow v(t,x) = \frac{[B(t) - A(t)]}{[b-a]}[x-a] + A(t)$$

•

$$\begin{cases} u_x(t,a) = A(t) \\ u_x(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x(t,a) = \underbrace{w_x(t,a)} + v_x(t,a) = 0 + v_x(t,a) = A(t) \Rightarrow v_x(t,a) = A(t) \\ u_x(t,b) = \underbrace{w_x(t,b)} + v_x(t,b) = 0 + v_x(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$v_x(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x(t,a) = A(t) \Rightarrow v_x(t,a) = \alpha(t)\cdot a + \beta(t) = A(t) \Rightarrow \beta(t) = A(t) - \alpha(t)\cdot a \\ v_x(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = \alpha(t)\cdot b + A(t) - \alpha(t)\cdot a = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \beta(t) = A(t) - [B(t) - A(t)]a/[b-a] \\ \Rightarrow \alpha(t) = [B(t) - A(t)]/[b-a] \end{cases}$$

$$v_x(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \Rightarrow v_x(t,x) = \frac{[B(t) - A(t)]}{[b-a]}[x-a] + A(t)$$

$$\Rightarrow v(t,x) = \int \{\frac{[B(t) - A(t)]}{[b-a]}[x-a] + A(t)\}dx = \frac{[B(t) - A(t)]}{2[b-a]}[x-a]^2 + A(t)x$$

•

$$\begin{cases} u(t,a) = A(t) \\ u_x(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t,a) = \underbrace{w(t,a)} + v(t,a) = 0 + v(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = A(t) \\ u_x(t,b) = \underbrace{w_x(t,b)} + v_x(t,b) = 0 + v_x(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = \alpha(t)\cdot a + \beta(t) = A(t) \Rightarrow \beta(t) = A(t) - \alpha(t)\cdot a \\ v_x(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = \alpha(t) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \beta(t) = A(t) - B(t)a \\ \Rightarrow \alpha(t) = B(t) \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \Rightarrow v(t,x) = B(t)[x-a] + A(t)$$

•

$$\begin{cases} u_x(t,a) = A(t) \\ u(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x(t,a) = \underbrace{w_x(t,a)} + v_x(t,a) = 0 + v_x(t,a) = A(t) \Rightarrow v_x(t,a) = A(t) \\ u(t,b) = \underbrace{w(t,b)} + v(t,b) = 0 + v(t,b) = B(t) \Rightarrow v(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = \alpha(t) = A(t) \Rightarrow \alpha(t) = A(t) \\ v(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = \alpha(t) \cdot b + \beta(t) = B(t) \Rightarrow \beta(t) = B(t) - \alpha(t) \cdot b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \beta(t) = B(t) - A(t)b \\ \Rightarrow \alpha(t) = A(t) \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \Rightarrow v(t,x) = A(t)[x-b] + B(t)$$

$$\begin{cases} \bullet \quad u(t,a) = A(t) \quad u(t,b) = B(t) \quad v(t,x) = \frac{[B(t)-A(t)]}{[b-a]}[x-a] + A(t) \\ \bullet \quad u_x(t,a) = A(t) \quad u_x(t,b) = B(t) \quad v(t,x) = \frac{[B(t)-A(t)]}{2[b-a]}[x-a]^2 + A(t)x \\ \bullet \quad u(t,a) = A(t) \quad u_x(t,b) = B(t) \quad v(t,x) = B(t)[x-a] + A(t) \\ \bullet \quad u_x(t,a) = A(t) \quad u(t,b) = B(t) \quad v(t,x) = A(t)[x-b] + B(t) \end{cases}$$

1.1 תרגיל.

מצא פתרון של הבעיה.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \cos t, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0 \\ u(t,0) = \sin t, u(t,\frac{\pi}{2}) = \sin t & t \geq 0 \\ u(0,x) = \sin 10x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

פתרון:

נחפש פונקצית תיקון $v(t,x)$: מגדירים

$$u(t,x) := w(t,x) + v(t,x)$$

נקבל עבור w בעיית חום עם תנאיי שפה הומוגניים.

$$\begin{cases} u(t,a) = A(t) \\ u(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t,a) = \underbrace{w(t,a)} + v(t,a) = 0 + v(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = A(t) \\ u(t,b) = \underbrace{w(t,b)} + v(t,b) = 0 + v(t,b) = B(t) \Rightarrow v(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = \alpha(t) \cdot a + \beta(t) = A(t) \Rightarrow \beta(t) = A(t) - \alpha(t) \cdot a \\ v(t,b) = B(t) \Rightarrow v(t,b) = \alpha(t) \cdot b + A(t) - \alpha(t) \cdot a = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \beta(t) = A(t) - [B(t) - A(t)]a/[b-a] \\ \Rightarrow \alpha(t) = [B(t) - A(t)]/[b-a] \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \Rightarrow v(t,x) = \frac{[B(t) - A(t)]}{[b-a]}[x-a] + A(t)$$

$$a = 0; b = \frac{\pi}{2}; A(t) = B(t) = \sin t \Rightarrow v(t,x) = \frac{[\sin t - \sin t]}{[\frac{\pi}{2}]}x + \sin t$$

$$\Rightarrow v(t,x) = \sin t \Rightarrow u(t,x) := w(t,x) + \sin t$$

ז.א. w הוא פתרון של הבעייה הבאה

$$\begin{cases} w_t + \cos t - w_{xx} = \cos t, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0 \\ w(t,0) = w(t,\frac{\pi}{2}) = 0 & t \geq 0 \\ w(0,x) = \sin 10x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0 \\ w(t,0) = w(t,\frac{\pi}{2}) = 0 & t \geq 0 \\ w(0,x) = \sin 10x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$w(t,x)=X(x)T(t),$$

כאשר $T(t)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, t ו-x, בהתאמה.

$$X(x)T_t(t)=X_{xx}(x)T(t),$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{T_t(t)}{T(t)}=\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של t בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של x בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{T_t(t)}{T(t)}=\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

נעיר שנוח כאן להוסיף את סימן המינוס לפני λ. משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\lambda X(x), & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{dT(t)}{dt}=-\lambda T(t), & t>0 \end{cases}$$

$$w(t,0)=X(0)T(t)=0$$

$$w(t,\frac{\pi}{2})=X(\frac{\pi}{2})T(t)=0$$

$$\Rightarrow X(0)=X(\frac{\pi}{2})=0$$

-

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\lambda X(x), & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ X(0)=X(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $X(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$X(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$X(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow X(\frac{\pi}{2}) = \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $X(x) = \alpha + \beta x$

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = \alpha + \beta\cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$X(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow X(\frac{\pi}{2}) = \beta\cdot\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה ליניארית. היא לא יכולה לקיים את שני תנאי השפה .

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $X(0) = 0$ ונקבל $\alpha = 0$. עתה, תנאי השפה $X(\frac{\pi}{2}) = 0$ גורר ש-$\sin(\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = n\pi$ כאשר n מספר שלם חיובי. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = (2n)^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$X(x) = \sin(2nx)$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin(2nx) \\ \lambda_n = 4n^2, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

•

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda T(t),$$

הפתרון הכללי :

$$T(t) = Be^{-\lambda t}$$

נציב בפתרון את λ_n ונקבל:

$$T_n(t) = B_n e^{-4n^2 t}, n = 1, 2, \dots.$$

• על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2nx) e^{-4n^2 t}.$$

של פתרונות מופרדים הוא פתרון של משוואת החום המקיים גם את תנאי השפה.

• ניגש עתה לטפל בתנאי ההתחלה . התנאי ההתחלה היה

$$w(0,x) = \sin 10x \Rightarrow w(0,x) = \sin 10x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2nx) e^0 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

$$B_5 = 1, B_n = 0, n \neq 5, n = 1, 2, 3, 4, 6, \dots$$

אז פתרון לבעיית החום

$$w(t,x) = \sin(10x) e^{-4 \cdot 5^2 t} \Rightarrow w(t,x) = \sin(10x) e^{-100t}$$

אז פתרון לבעיית החום

$$u(t,x) = w(t,x) + \sin t \Rightarrow u(t,x) = \sin(10x) e^{-100t} + \sin t$$

1.2 תרגיל.

מצא פתרון של הבעיה.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-t}\cos 5x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(t,0) = 2, u_x(t,\pi) = 2 & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

פתרון:

נחפש פונקצית תיקון $v(t,x)$: מגדירים

$$u(t,x) := w(t,x) + v(t,x)$$

נקבל עבור w בעיית חום עם תנאיי שפה הומוגניים.

$$\begin{cases} u_x(t,a) = A(t) \\ u_x(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x(t,a) = \underbrace{w_x(t,a)} + v_x(t,a) = 0 + v_x(t,a) = A(t) \Rightarrow v_x(t,a) = A(t) \\ u_x(t,b) = \underbrace{w_x(t,b)} + v_x(t,b) = 0 + v_x(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$v_x(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x(t,a) = A(t) \Rightarrow v_x(t,a) = \alpha(t)\cdot a + \beta(t) = A(t) \Rightarrow \beta(t) = A(t) - \alpha(t)\cdot a \\ v_x(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = \alpha(t)\cdot b + A(t) - \alpha(t)\cdot a = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \beta(t) = A(t) - [B(t) - A(t)]a/[b-a] \\ \Rightarrow \alpha(t) = [B(t) - A(t)]/[b-a] \end{cases}$$

$$v_x(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \Rightarrow v_x(t,x) = \frac{[B(t) - A(t)]}{[b-a]}[x-a] + A(t)$$

$$\Rightarrow v(t,x) = \int\{\frac{[B(t) - A(t)]}{[b-a]}[x-a] + A(t)\}dx = \frac{[B(t) - A(t)]}{2[b-a]}[x-a]^2 + A(t)x$$

$$a = 0; b = \pi; A(t) = 2; B(t) = 2; \Rightarrow v(t,x) = \frac{[2-2]}{2\pi}x^2 + 2\cdot x$$

$$\Rightarrow v(t,x) = 2x \Rightarrow u(t,x) := w(t,x) + 2x$$

$$u(0,x) = w(0,x) + 2x = f(x)$$

ז.א. w הוא פתרון של הבעייה הבאה

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = e^{-t}\cos 5x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ w_x(t,0) = 0, w_x(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ w(0,x) = f(x) - 2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

מחפשים פתרונות של הבעייה הבאה

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ w_x(t,0) = 0, w_x(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ w(0,x) = f(x) - 2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$w(t,x) = X(x)T(t),$$

כאשר $T(t)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, t ו-x, בהתאמה.

$$X(x)T_t(t) = X_{xx}(x)T(t),$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של t בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של x בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

נעיר שנוח כאן להוסיף את סימן המינוס לפני λ. משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x), & 0 < x < \pi \\ \frac{dT(t)}{dt} = -\lambda T(t), & t > 0 \end{cases}$$

$$w_x(t,0) = X'(0)T(t) = 0$$

$$w_x(t,\pi) = X'(\pi)T(t) = 0$$

$$\Rightarrow X'(0) = X'(\pi) = 0$$

•

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x), & 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $X(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+\tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow X'(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right)+\tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \Rightarrow X'(\pi) = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $X(x) = \alpha + \beta x$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow X'(0) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow X(x) = \alpha$$

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $X'(0)=-\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0)+\beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0)=0$ **ונקבל** $\beta=0$. **עתה,** **תנאי השפה** $X'(\pi)=0$ **גורר ש-**$-\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\cdot\pi)=0$**, על כן,** $\sqrt{\lambda}\pi=n\pi$ **כאשר** $n=1,2,\ldots$. **תנאי הכרחי ומספיק ש-**λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda=n^2, n=1,2,\ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$X(x)=\cos nx$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} X_n(x)=\cos nx \\ \lambda_n=n^2, n=0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

- על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי של פתרונות מופרדים הוא פתרון של משוואת החום המקיים גם את תנאי השפה.

$$w(t,x)=\frac{1}{2}T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos(nx)$$

$$w(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos(nx)$$

נגזור טור איבר-איבר:

$$w_t(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n'(t)\cos(nx)$$

$$w_{xx}(t,x)=-\sum_{n=0}^{\infty}n^2T_n(t)\cos(nx)$$

נציב למשוואת החום: $w_t-w_{xx}=e^{-t}\cos 5x$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t)+n^2T_n(t)\right]\cos(nx)=e^{-t}\cos 5x$$

$$\begin{cases} T_5'(t)+5^2T_5(t)=e^{-t}; \quad n=5 \\ T_n'(t)+n^2T_n(t)=0; \quad n\neq 5; \quad n=0,1,...,4,6,... \end{cases}$$

- נפתור מד"ר ליניארית מסדר ראשון:

$$T_n'(t)+n^2T_n(t)=0 \Rightarrow T_n(t)=T_n(0)e^{-n^2t}$$

- נפתור מד"ר ליניארית מסדר ראשון לא הומוגנית בשיטת ווריאצית הפרמ-טר:

$$T_5'(t)+5^2T_5(t)=e^{-t} \Rightarrow$$

$$T_5'(t)+5^2T_5(t)=0 \Rightarrow T_5(t)=B_5e^{-5^2t} \Rightarrow B_5 \to B_5(t) \Rightarrow B_5'(t)e^{-5^2t}=e^{-t}$$

$$B_5'(t)=e^{24t} \Rightarrow B_5(t)=\frac{1}{24}e^{24t}+B_5(c)$$

$$\Rightarrow T_5(t)=\frac{1}{24}e^{-t}+B_5(c)e^{-25t}$$

$$t=0 \Rightarrow T_5(0)=\frac{1}{24}e^0+B_5(c)e^0 \Rightarrow B_5(c)=T_5(0)-\frac{1}{24}$$

ז.א. קבלנו פתרונות:

$$\begin{cases} T_5'(t)+5^2T_5(t)=e^{-t}; & \Rightarrow T_5(t)=\frac{1}{24}e^{-t}+\left[T_5(0)-\frac{1}{24}\right]e^{-25t} & n=5 \\ T_n'(t)+n^2T_n(t)=0; & \Rightarrow T_n(t)=T_n(0)e^{-n^2t} & n\neq 5; n=0,1,...,4,6,... \end{cases}$$

אז פתרון הוא:

$$w(t,x)=\sum_{n=0;n\neq 5}^{\infty}T_n(0)e^{-n^2t}\cos(nx)+\left\{\frac{1}{24}e^{-t}+\left[T_5(0)-\frac{1}{24}\right]e^{-25t}\right\}\cos(5x)$$

נציב בתנאי התחלה:

$$w(0,x)=f(x)-2x \Rightarrow \sum_{n=0;n\neq 5}^{\infty}T_n(0)\cos(nx)+\{T_5(0)\}\cos(5x)=f(x)-2x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos(nx) := \frac{1}{2}T_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\cos(nx) = f(x) - 2x$$

ז.א. פתרון הוא טור קוסינוסים של הפונקציה $f(x) - 2x$, אז מקדמים אפשר לחשב לפי נוסחה הבאה:

$$T_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x) - 2x]\cos(nx)dx$$

פתרון לבעייה:

$$u(t,x) = \sum_{n=0;n\neq 5}^{\infty} T_n(0)e^{-n^2 t}\cos(nx) + \left\{\frac{1}{24}e^{-t} + \left[T_5(0) - \frac{1}{24}\right]e^{-25t}\right\}\cos(5x) + 2x$$

1.3 תרגיל.

מצא פתרון של הבעיה.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x), & 0 < x < L, t > 0 \\ u(t,0) = 1, u_x(t,L) = t & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) + 1, u_t(0,x) = x & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

פתרון:

נחפש פונקצית תיקון $v(t,x)$: מגדירים

$$u(t,x) := w(t,x) + v(t,x)$$

נקבל עבור w בעיית חום עם תנאיי שפה הומוגניים.

$$\begin{cases} u(t,a) = A(t) \\ u_x(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t,a) = \underbrace{w(t,a)} + v(t,a) = 0 + v(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = A(t) \\ u_x(t,b) = \underbrace{w_x(t,b)} + v_x(t,b) = 0 + v_x(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = B(t) \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(t,a) = A(t) \Rightarrow v(t,a) = \alpha(t)\cdot a + \beta(t) = A(t) \Rightarrow \beta(t) = A(t) - \alpha(t)\cdot a \\ v_x(t,b) = B(t) \Rightarrow v_x(t,b) = \alpha(t) = B(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \beta(t) = A(t) - B(t)a \\ \Rightarrow \alpha(t) = B(t) \end{cases}$$

$$v(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t) \Rightarrow v(t,x) = B(t)[x-a] + A(t)$$

$$a = 0; b = L; A(t) = 1; B(t) = t; \Rightarrow v(t,x) = tx + 1$$

$$\Rightarrow u(t,x) := w(t,x) + tx + 1$$

$$u(0,x) = w(0,x) + 1 = f(x) + 1 \Rightarrow w(0,x) = f(x)$$

$$u_t(0,x) = w_t(0,x) + x = x \Rightarrow w_t(0,x) = 0$$

ז.א. w הוא פתרון של הבעייה הבאה

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x), & 0 < x < L, t > 0 \\ w(t,0) = 0, w_x(t,L) = 0 & t \geq 0 \\ w(0,x) = f(x), w_t(0,x) = 0 & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ w(t,0) = 0, w_x(t,L) = 0 & t \geq 0 \\ w(0,x) = f(x), w_t(0,x) = 0 & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$w(t,x) = X(x)T(t),$$

כאשר $T(t)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, t ו-x, בהתאמה.

$$X(x)T_{tt}(t) = c^2 X_{xx}(x)T(t),$$

• שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{T_t(tt)}{c^2T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של t בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של x בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{T_{tt}(t)}{c^2T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

נעיר שנוח כאן להוסיף את סימן המינוס לפני λ. משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{d^2T(t)}{dt^2} = -c^2\lambda T(t), & t > 0 \end{cases}$$

$$w(t,0) = X(0)T(t) = 0$$

$$w_x(t,L) = X'(L)T(t) = 0$$

$$\Rightarrow X(0) = X'(L) = 0$$

•

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא <u>פונקציה עצמית</u> של הבעיה עם <u>ערך עצמי</u> λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $X(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0$$

$$X'(L) = 0 \Rightarrow X'(L) = \tilde{\beta}\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot L\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $X(x) = \alpha + \beta x$

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = \alpha + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$X'(L) = 0 \Rightarrow X'(L) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה ליניארית. היא לא יכולה לקיים את שני תנאי השפה .

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $X(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $X(0) = 0$ ונקבל $\alpha = 0$. עתה, תנאי השפה $X'(L) = 0$ גורר ש-$\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}L) = 0$, על כן, $\sqrt{\lambda}L = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ כאשר n מספר שלם חיובי. תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2}, n = 1, 2, \ldots .$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$X(x) = \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right]$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right] \\ \lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}, n = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

- על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי של פתרונות מופרדים הוא פתרון של משוואת החום המקיים גם את תנאי השפה.

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right]$$

נגזור טור איבר-איבר:

$$w_{tt}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right]$$

$$w_{xx}(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right]^2 \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right]$$

נציב למשוואת: $w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{T_n''(t) + \left[\frac{c^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\right]T_n(t)\right\}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right] = f(x)$$

ז.א. טור סינוסים של הפונקציה $f(x)$, אז מקדמים אפשר לחשב לפי נוסחה הבאה:

$$T_n''(t) + \left[\frac{c^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\right]T_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right]dx$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right]dx := f_n$$

$$T_n''(t) + \left[\frac{c^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\right]T_n(t) = f_n$$

פ"א:

$$r^2 + \left[\frac{c^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\right] = 0$$

ע"ע:

$$\Rightarrow r_{1,2} = \sqrt{-\left[\frac{c^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\right]} = i\left[\frac{c(2n-1)\pi}{2L}\right]$$

הפתרון כללי:

$$T_n(t) = T_n(c_1)\cos\left[\frac{c(2n-1)\pi}{2L}t\right] + T_n(c_2)\sin\left[\frac{c(2n-1)\pi}{2L}t\right] + f_n\left[\frac{4L^2}{c^2(2n-1)^2\pi^2}\right]$$

נציב בתנאיי התחלה:

$$w(0,x) = f(x) \Rightarrow w(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right] = f(x)$$

$$\Rightarrow T_n(0) = f_n$$

$$w_t(0,x)=0 \Rightarrow w(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\left[\frac{(2n-1)\,\pi}{2L}x\right]=0$$

$$\Rightarrow T_n'(0)=0$$

$$T_n(0)=T_n(c_1)\cos 0+T_n(c_2)\sin 0+f_n\left[\frac{4L^2}{c^2\left(2n-1\right)^2\pi^2}\right]=f_n$$

$$\Rightarrow T_n(c_1)=f_n-f_n\left[\frac{4L^2}{c^2\left(2n-1\right)^2\pi^2}\right]$$

$$T_n'(0)=0 \Rightarrow T_n(c_2)\left[\frac{c\,(2n-1)\,\pi}{2L}\right]\cos 0=0$$

$$\Rightarrow T_n(c_2)=0$$

$$T_n(t)=\left\{f_n-f_n\left[\frac{4L^2}{c^2\left(2n-1\right)^2\pi^2}\right]\right\}\cos\left[\frac{c\,(2n-1)\,\pi}{2L}t\right]+f_n\left[\frac{4L^2}{c^2\left(2n-1\right)^2\pi^2}\right]$$

פתרון לבעייה:

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left[\frac{(2n-1)\,\pi}{2L}x\right]$$

$$u(t,x):=w(t,x)+tx+1 \Rightarrow u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left[\frac{(2n-1)\,\pi}{2L}x\right]+tx+1$$

$$T_n(t)=\left\{f_n-f_n\left[\frac{4L^2}{c^2\left(2n-1\right)^2\pi^2}\right]\right\}\cos\left[\frac{c\,(2n-1)\,\pi}{2L}t\right]+f_n\left[\frac{4L^2}{c^2\left(2n-1\right)^2\pi^2}\right]$$

$$f_n:=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left[\frac{(2n-1)\,\pi}{2L}x\right]dx$$

$$\left\{\begin{array}{c} u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right]+tx+1 \\ T_n(t)=\left\{f_n-f_n\left[\frac{4L^2}{c^2(2n-1)^2\pi^2}\right]\right\}\cos\left[\frac{c(2n-1)\pi}{2L}t\right]+f_n\left[\frac{4L^2}{c^2(2n-1)^2\pi^2}\right] \\ f_n:=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right]dx \end{array}\right.$$

1 הפרדת משתנים לבעיות אליפטיות.

פתרון במלבן

יהי u הפתרון לבעית דיריכלה הבאה בתחום מלבני $\mathcal{D}$

$$\triangle u = 0, a < x < b, c < y < d$$

עם תנאי השפה

$$\begin{cases} u(a,y) = A(y), u(b,y) = B(y) \\ u(x,c) = C(x), u(x,d) = D(x) \end{cases}$$

נשתמש בעקרון הסופרפוזיציה כדי לפרק את u לשני רכיבים: $u = u_1 + u_2$ כאשר u_1 ו- u_2 שתיהן הרמוניות אף הן ב- $\mathcal{D}$, וכאשר u_1 ו- u_2 מקיימות את תנאי השפה הבאים:

$$u_1 : \begin{cases} u(a,y) = A(y), u(b,y) = B(y) \\ u(x,c) = 0, u(x,d) = 0 \end{cases} \bigcup u_2 : \begin{cases} u(a,y) = 0, u(b,y) = 0 \\ u(x,c) = C(x), u(x,d) = D(x) \end{cases}$$

מתקיימים תנאי התואמות:

$$A(c) = A(d) = B(c) = B(d) = C(a) = C(b) = D(a) = D(b) = 0$$

אז $u_1 + u_2$ מקימת את משוואת לפלאס ואת תנאי השפה, לכן ממשפט היחידות $u = u_1 + u_2$. נתבונן ב-u_1. נחפש עבורה פתרון שהוא צירוף לינארי של פונקציות "מופרדות" מהצורה $u_1 = X(x)Y(y)$

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$u_1(x,y) = X(x)Y(y),$$

כאשר $Y(y)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, y ו-x, בהתאמה.

$$X_{xx}(x)Y(y) + X(x)Y_{yy}(y) = 0,$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של x בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של y בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

מהצבה במשוואת לפלאס מקבלים הפרדה לשתי משוואות, משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות:

$$\begin{cases} X_{xx}(x) = \lambda X(x), & a < x < b \\ -Y_{yy}(y) = \lambda Y(y), & c < y < d, \end{cases}$$

תנאיי השפה

$$\begin{cases} u_1(x,c) = 0 = X(x)Y(c) & \Rightarrow Y(c) = 0 \\ u_1(x,d) = 0 = X(x)Y(d) & \Rightarrow Y(d) = 0 \end{cases}$$

מכתיבים בעיית שטורם-ליוביל עבור $Y(y)$. פתרון בעיית שטורם-ליוביל מוביל לסדרת ערכים עצמיים λ_n, וסדרת פונקציות עצמיות $Y_n(y)$. כעת אפשר להציב את סדרת λ_n במשוואה ולקבל סדרה מתאימה $X_n(x)$.

•

$$\begin{cases} Y_{yy}(y) + \lambda Y(y) = 0, & c < y < d \\ Y(c) = Y(d) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא <u>פונקציה עצמית</u> של הבעיה עם <u>ערך עצמי</u> λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם <u>מקדמים קבועים</u>. צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $Y(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}$

$$Y(y) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}y\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$$

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}; \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$Y(c) = 0 \Rightarrow Y(c) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot c\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot c\right) = 0$$

$$Y(d) = 0 \Rightarrow Y(d) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot d\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot d\right) = 0$$

$$\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot c\right)\neq 0, \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot d\right)\neq 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\tanh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot c\right)=0$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\tanh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot d\right)=0$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}\left[\tanh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot c\right)-\tanh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot d\right)\right]=0$$

$$\tanh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot c\right)-\tanh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot d\right)\neq 0\Rightarrow \tilde{\beta}=0\Rightarrow\tilde{\alpha}=0\Rightarrow Y(y)=0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda=0$, אז $Y(y)=\alpha+\beta y$

$$Y(c)=Y(d)=0\Rightarrow Y(c)=\alpha+\beta\cdot c=0$$

$$Y(d)=0\Rightarrow Y(d)=\alpha+\beta\cdot d=0$$

$$\beta[c-d]=0, c\neq d\Rightarrow\beta=0\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow Y(y)=0$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה ליניארית. היא לא יכולה לקיים את שני תנאי השפה .

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda>0$, אז $Y(y)=\alpha\cos(\sqrt{\lambda}y)+\beta\sin(\sqrt{\lambda}y)$ כאשר α,β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $Y(c)=Y(d)=0$ ונקבל

$$Y(c)=0=\alpha\cos(\sqrt{\lambda}c)+\beta\sin(\sqrt{\lambda}c)$$

$$Y(d)=0=\alpha\cos(\sqrt{\lambda}d)+\beta\sin(\sqrt{\lambda}d)$$

$$\begin{cases} if \quad \sin(\sqrt{\lambda}c)=0 & \Rightarrow\cos(\sqrt{\lambda}c)\neq 0 & \Rightarrow\alpha=0\Rightarrow\sin(\sqrt{\lambda}d)=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}d=n\pi \\ if \quad \cos(\sqrt{\lambda}c)=0 & \Rightarrow\sin(\sqrt{\lambda}c)\neq 0 & \Rightarrow\beta=0\Rightarrow\cos(\sqrt{\lambda}d)=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}d=-\frac{\pi}{2}+n\pi \\ if \quad \sin(\sqrt{\lambda}d)=0 & \Rightarrow\cos(\sqrt{\lambda}d)\neq 0 & \Rightarrow\alpha=0\Rightarrow\sin(\sqrt{\lambda}c)=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}c=n\pi \\ if \quad \cos(\sqrt{\lambda}d)=0 & \Rightarrow\sin(\sqrt{\lambda}d)\neq 0 & \Rightarrow\beta=0\Rightarrow\cos(\sqrt{\lambda}c)=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}c=-\frac{\pi}{2}+n\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} if \quad \sin(\sqrt{\lambda}c) \neq 0 \bigcup \cos(\sqrt{\lambda}c) \neq 0 \bigcup \sin(\sqrt{\lambda}d) \neq 0 \bigcup \cos(\sqrt{\lambda}d) \neq 0 \\ \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow Y(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} if \quad \sin(\sqrt{\lambda}c) = 0 & \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 & \Rightarrow Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right) \\ if \quad \cos(\sqrt{\lambda}c) = 0 & \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2d}\right)^2 & \Rightarrow Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi}{d}y\right) \\ if \quad \sin(\sqrt{\lambda}d) = 0 & \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 & \Rightarrow Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{c}y\right) \\ if \quad \cos(\sqrt{\lambda}d) = 0 & \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2c}\right)^2 & \Rightarrow Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi}{c}y\right) \end{cases}$$

כאשר n מספר שלם חיובי. אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

•

$$X_{xx}(x) = \lambda X(x), a < x < b,$$

הפתרון הכללי : ערך עצמי חיובי: $\lambda_n > 0$, אז

$$X(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$$

נציב בפתרון את λ_n ונקבל:

$$X_n(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{\lambda_n}x\right), n = 1, 2, \ldots.$$

• על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי

$$u_1(x,y) = X(x)Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\left[\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)\right]$$

של פתרונות מופרדים הוא פתרון של משוואת החום המקיים גם את תנאי השפה.

• ניגש עתה לטפל בתנאי ההתחלה . התנאי ההתחלה היה

$$u(a,y) = A(y), u(b,y) = B(y)$$

$$u_1(a,y) = X(a)Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\left[\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{\lambda_n}a\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{\lambda_n}a\right)\right] = A(y)$$

$$u_1(b,y) = X(b)Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\left[\tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{\lambda_n}b\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{\lambda_n}b\right)\right] = B(y)$$

<u>המקרא שלא מתקיים תנאי התואמות:</u> נרשום כעת את u כצירוף

$$u(x,y) = w(x,y) - P_2(x,y)$$

כאשר P_2 הוא פולינום הרמוני מתאים מדרגה שניה. אנו נבנה את הפולינום ההרמוני כך שהבעייה עבור w תקיים את תנאי התואמות, כלומר, w מתאפסת בקודקודים.

$$w(a,c) = w(a,d) = w(b,c) = w(b,d) = 0$$

כדי לבנות את P_2 בצורה הרצויה, נרשום את הצורה הכללית ביותר של פולינום הרמוני מסדר שני:

$$P_2(x,y) = a_1\left(x^2 - y^2\right) + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5$$

הדרישה ש-w מתאפסת בכל ארבעת הקודקודים מובילה לארבע משוואות עבור חמשת המקדמים החופשיים של P_2:

$$\left\{\begin{array}{c} u(a,c) = w(a,c) - P_2(a,c) = -a_1\left(a^2 - c^2\right) - a_2ac - a_3a - a_4c - a_5 \\ u(a,d) = w(a,d) - P_2(a,d) = -a_1\left(a^2 - d^2\right) - a_2ad - a_3a - a_4d - a_5 \\ u(b,c) = w(b,c) - P_2(b,c) = -a_1\left(b^2 - c^2\right) - a_2bc - a_3b - a_4c - a_5 \\ u(b,d) = w(b,d) - P_2(b,d) = -a_1\left(b^2 - d^2\right) - a_2bd - a_3b - a_4d - a_5 \end{array}\right.$$

נבחר $a_1 = 0$ ונקבל את הפיתרון

$$\left\{\begin{array}{c} u(a,c) = -a_2ac - a_3a - a_4c - a_5 \\ u(a,d) = -a_2ad - a_3a - a_4d - a_5 \\ u(b,c) = -a_2bc - a_3b - a_4c - a_5 \\ u(b,d) = -a_2bd - a_3b - a_4d - a_5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u(a,c) - u(a,d) = a_2a(d-c) + a_4(d-c) \\ u(b,c) - u(b,d) = a_2b(d-c) + a_4(d-c) \end{array}\right.$$

$$u(a,c)-u(a,d)-u(b,c)+u(b,d) = a_2(a-b)(d-c) \Rightarrow a_2 = \frac{u(a,c)-u(a,d)-u(b,c)+u(b,d)}{(a-b)(d-c)}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a_2 = \frac{u(a,c)-u(a,d)-u(b,c)+u(b,d)}{(a-b)(d-c)} \\ a_3 = \frac{u(a,c)-u(a,d)-u(b,c)+u(b,d)}{(a-b)(d-c)}c + \frac{u(b,c)-u(a,c)}{(a-b)} \\ a_4 = \frac{u(a,c)-u(a,d)-u(b,c)+u(b,d)}{(a-b)(d-c)}a + \frac{u(a,c)-u(a,d)}{(d-c)} \\ a_5 = \frac{u(a,c)-u(a,d)-u(b,c)+u(b,d)}{(a-b)(d-c)}ac - \frac{u(a,c)-u(a,d)}{(d-c)}c - \frac{u(b,c)-u(a,c)}{(a-b)}a - u(a,c) \end{array}\right.$$

<u>בעיית נוימן</u>: הבעייה המוגדרת ע"י משוואת פואסון ותנאי השפה מסוג נוימן

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = F(x,y) \\ \partial_{\hat{n}} u(x,y) = g(x,y), (x,y) \in \partial\mathcal{D} \end{cases}$$

כאשר g היא פונקציה נתונה, $\hat{n}$ מסמן את נורמל היחידה החיצוני ל-$\partial\mathcal{D}$, ו-∂_n מסמן גזירה מכוונת בכיוון $\hat{n}$, כלומר $\partial_n = \hat{n} \cdot \nabla$.

תנאי הכרחי לקיום פתרון לבעיית נוימן הוא:

$$\int_{\partial\mathcal{D}} g(x(s), y(s))ds = \int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy$$

אפשר לרשום את משוואת פואסון באופן

$$\triangle u(x,y) = \nabla \cdot \nabla u = F(x,y)$$

נבצע כעת אינטגרציה של שני האגפים על התחום $\mathcal{D}$ ונשתמש במשפט גאוס - משפת הדיברגנס :

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \nabla u dxdy = \int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{D}} \nabla u \cdot \hat{n} ds = \int_{\mathcal{D}} F(x,y)dxdy$$

נשים לב כי במקרה הפרטי של משוואת לפלס מתקיים :

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \\ \partial_{\hat{n}} u(x,y) = g(x,y), (x,y) \in \partial\mathcal{D} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\mathcal{D}} \nabla u \cdot \hat{n} ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\mathcal{D}} g ds = 0$$

תנאי התואמות מתקיים. נחלק את השפה $\partial\mathcal{D}$ לשני חלקים ונגדיר

$$u = u_1 + u_2$$

כאשר u_1, u_2 שתיהן הרמוניות ומקימות את תנאי השפה

$$\partial_{\hat{n}} u_1 = \begin{cases} 0, x \in \partial_1\mathcal{D} \\ g, x \in \partial_2\mathcal{D} \end{cases} \bigcup \partial_{\hat{n}} u_2 = \begin{cases} g, x \in \partial_1\mathcal{D} \\ 0, x \in \partial_2\mathcal{D} \end{cases}$$

הבעייה כעת היא שלא מופטח קיום תנאי התואמות ל-u_1 ו-u_2 לחוד. נשתמש בפולינום הרמוני P המקיים $\int_{\partial_1 \mathcal{D}} P ds \neq 0$ נניח למשל כי הפולינום הרמוני $x^2 - y^2$ מקיים תנאי זה. נוסיף ואחר כך נחסיר את הפולינום ההרמוני שבחרנו בצורה מתאימה. נחפש פונקציות הרמוניות w_1 ו-w_2 המקיימות את תנאי נוימן הבאים :

$$\partial_{\hat{n}} w_1 = \begin{cases} 0, x \in \partial_1 \mathcal{D} \\ g + a\partial_{\hat{n}}(x^2 - y^2), x \in \partial_2 \mathcal{D} \end{cases} \bigcup \partial_{\hat{n}} w_2 = \begin{cases} g + a\partial_{\hat{n}}(x^2 - y^2), x \in \partial_1 \mathcal{D} \\ 0, x \in \partial_2 \mathcal{D} \end{cases}$$

נבחר את הפרמטר a כך שיתקיים תנאי התואמות עבור w_1.כיוון שתנאי התואמות מובטח עבור הבעייה המקורית וכן עבור כל פולינום הרמוני, נובע שהוא גם מתקיים עבור פונקצית "תיקון" w_2. בסוף נשים לב שמתקיים

$$u = w_1 + w_2 - a(x^2 - y^2)$$

1.1 תרגיל.

מצא פתרון של הבעיה.

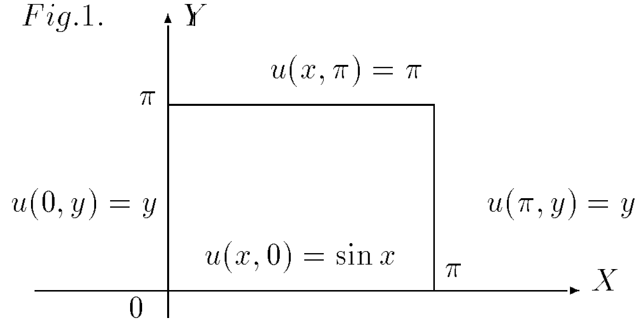
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u(x,0) = \sin x, u(x,\pi) = \pi \\ u(0,y) = y, u(\pi,y) = y \end{cases}$$

פתרון:

המקרא שלא מתקיים תנאי התואמות:

$$\begin{cases} u(0,0) = 0, \quad u(0,\pi) = \pi \neq 0 \\ u(\pi,0) = 0, \quad u(\pi,\pi) = \pi \neq 0 \end{cases}$$

$Fig.1.$



נרשום כעת את u כצירוף

$$u(x,y) = w(x,y) - P_2(x,y)$$

כאשר P_2 הוא פולינום הרמוני מתאים מדרגה שניה. אנו נבנה את הפולינום ההרמוני כך שהבעייה עבור w תקיים את תנאי התואמות, כלומר, w מתאפסת בקודקודים.

$$w(0,0) = w(0,\pi) = w(\pi,0) = w(\pi,\pi) = 0$$

כדי לבנות את P_2 בצורה הרצויה, נרשום את הצורה הכללית ביותר של פולינום הרמוני מסדר שני:

$$P_2(x,y) = a_1\left(x^2 - y^2\right) + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5$$

הדרישה ש-w מתאפסת בכל ארבעת הקודקודים מובילה לארבע משוואות עבור חמשת המקדמים החופשיים של P_2:

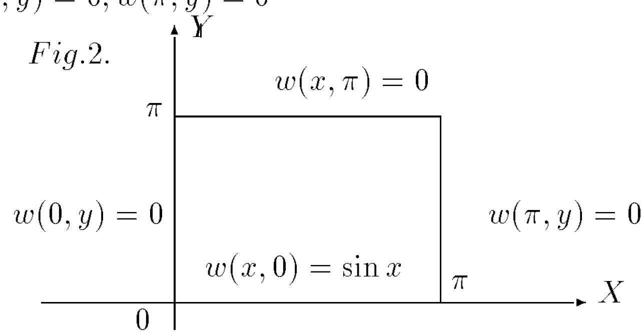
$$\begin{cases} u(0,0) = 0 = w(0,0) - P_2(0,0) = -a_5 \Rightarrow a_5 = 0 \\ u(0,\pi) = \pi = w(0,\pi) - P_2(0,\pi) = -a_1\left(-\pi^2\right) - a_4\pi - a_5 \\ u(\pi,0) = 0 = w(\pi,0) - P_2(\pi,0) = -a_1\left(\pi^2\right) - a_3\pi - a_5 \\ u(\pi,\pi) = \pi = w(\pi,\pi) - P_2(\pi,\pi) = -a_1\left(\pi^2 - \pi^2\right) - a_2\pi^2 - a_3\pi - a_4\pi - a_5 \end{cases}$$

נבחר $a_1 = 0$ ונקבל את הפתרון

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = -1 \\ a_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_2(x,y) = -y \Rightarrow u(x,y) = w(x,y) - P_2(x,y) = w(x,y) + y$$

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & 0 < x,y < \pi, \\ w(x,0) = \sin x, w(x,\pi) = 0 \\ w(0,y) = 0, w(\pi,y) = 0 \end{cases}$$

$Fig.2.$



- מחפשים פתרונות מהצורה

$$w(x,y) = X(x)Y(y),$$

כאשר $Y(y)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, y ו-x, בהתאמה.

$$X_{xx}(x)Y(y) + X(x)Y_{yy}(y) = 0,$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של x בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של y בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

מהצבה במשוואת לפלאס מקבלים הפרדה לשתי משוואות, משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות:

$$\begin{cases} X_{xx}(x) = -\lambda X(x), & 0 < x < \pi \\ -Y_{yy}(y) = -\lambda Y(y), & 0 < y < \pi, \end{cases}$$

תנאיי השפה

$$\begin{cases} w(0,y) = 0 = X(0)Y(y) & \Rightarrow X(0) = 0 \\ w(\pi,y) = 0 = X(\pi)Y(y) & \Rightarrow X(\pi) = 0 \end{cases}$$

מכתיבים בעיית שטורם-ליוביל עבור $X(x)$. פתרון בעיית שטורם-ליוביל מוביל לסדרת ערכים עצמיים λ_n, וסדרת פונקציות עצמיות $X_n(x)$. כעת אפשר להציב את סדרת λ_n במשוואה ולקבל סדרה מתאימה $Y_n(y)$.

-

$$\begin{cases} X_{xx}(x) = -\lambda X(x), & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא <u>פונקציה עצמית</u> של הבעיה עם <u>ערך עצמי</u> λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $X(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$X(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = \tilde{\alpha} = 0$$

$$X(\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) = 0$$

$$\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\beta} = 0, \tilde{\alpha} = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $X(x) = \alpha + \beta x$

$$X(0) = X(\pi) = 0 \Rightarrow X(0) = \alpha = 0$$

$$X(\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = \beta\cdot\pi = 0 \Rightarrow \beta = 0, \alpha = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה ליניארית. היא לא יכולה לקיים את שני תנאי השפה .

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $X(0) = X(\pi) = 0$ ונקבל

$$X(0) = 0 = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

$$X(\pi) = 0 = \beta\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots$$

תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = n^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$X(x) = \sin nx$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin nx \\ \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

•

$$Y_{yy}(y) - \lambda Y(y) = 0, \lambda > 0$$

הפתרון הכללי :

$$\Rightarrow Y(y) = \tilde{\alpha} \cosh\left(\sqrt{\lambda} y\right) + \tilde{\beta} \sinh\left(\sqrt{\lambda} y\right)$$

נציב בפתרון את λ_n ונקבל:

$$Y_n(y) = \tilde{\alpha}_n \cosh(ny) + \tilde{\beta}_n \sinh(ny), n = 1, 2, \ldots.$$

- על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי של פתרונות מופרדים הוא פתרון של המשוואה המקיים גם את תנאי השפה.

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{\alpha}_n \cosh(ny) + \tilde{\beta}_n \sinh(ny)\right] \sin(nx)$$

- ניגש עתה לטפל בתנאי ההתחלה . התנאי ההתחלה היה

$$w(x, 0) = \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{\alpha}_n] \sin(nx) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n = 1, & \Rightarrow \tilde{\alpha}_1 = 1 \\ n = 2, 3, \ldots, & \Rightarrow \tilde{\alpha}_n = 0 \end{cases}$$

$$w(x, \pi) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{\alpha}_n \cosh(n\pi) + \tilde{\beta}_n \sinh(n\pi)\right] \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_n \cosh(n\pi) + \tilde{\beta}_n \sinh(n\pi) = 0$$

$$\begin{cases} n = 1, & \Rightarrow \cosh \pi + \tilde{\beta}_1 \sinh \pi = 0 \Rightarrow \tilde{\beta}_1 = -\coth \pi \\ n = 2, 3, \ldots, & \Rightarrow \tilde{\beta}_n = 0 \end{cases}$$

$$w(x, y) = [\cosh y - \coth \pi \sinh y] \sin x$$

$$u(x,y) = w(x,y) + y = [\cosh y - \coth \pi \sinh y] \sin x + y$$

1.2 תרגיל.

א. בדקו האם מתקיים התנאי ההכרחי לקיום הפתרון לבעיית נוימן הבעה. ב. אם כן, פתרו את הבעייה.

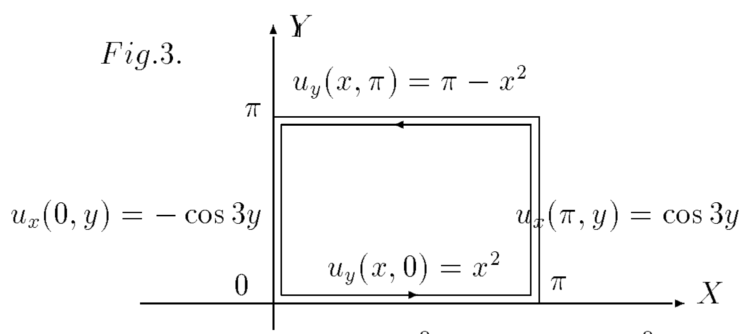
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u_y(x,0) = x^2, u_y(x,\pi) = \pi - x^2 \\ u_x(0,y) = -\cos 3y, u_x(\pi,y) = \cos 3y \end{cases}$$

פתרון:

א.התנאי ההכרחי לקיום פתרון לבעיית נוימן הוא קיום השוויון:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} ds = 0$$

$Fig.3.$



$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} ds = \int_0^\pi u_y(x,0)dx + \int_0^\pi u_x(\pi,y)dy - \int_\pi^0 u_y(x,\pi)dx - \int_\pi^0 u_x(0,y)dy$$

$$= \int_0^\pi x^2 dx + \int_0^\pi \cos 3y dy - \int_\pi^0 \left(\pi - x^2\right) dx - \int_\pi^0 (-\cos 3y) dy = \pi^2 \neq 0$$

לכן התנאי ההכרחי אינו מתקיים.

ב. אין פתרון לבעייה.

1.3 תרגיל.

א. בדקו האם מתקיים התנאי ההכרחי לקיום הפתרון לבעיית נוימן הבעה. ב. אם כן, פתרו את הבעייה.

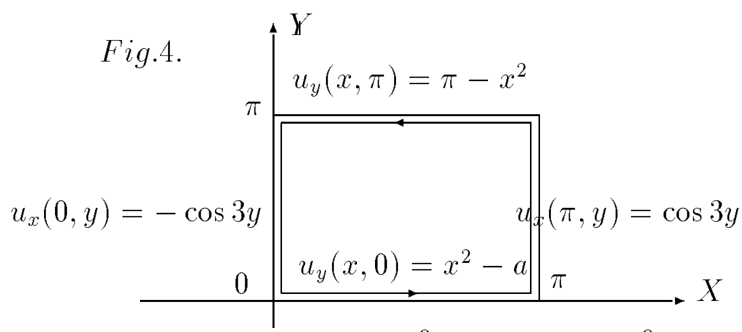
$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x,y<\pi, \\ u_y(x,0)=x^2-a, u_y(x,\pi)=\pi-x^2 & \\ u_x(0,y)=-\cos 3y, u_x(\pi,y)=\cos 3y & \end{cases}$$

פתרון:

א.התנאי ההכרחי לקיום פתרון לבעיית נוימן הוא קיום השוויון:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} ds = 0$$

$Fig.4.$



$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} ds = \int_0^\pi u_y(x,0)dx + \int_0^\pi u_x(\pi,y)dy - \int_\pi^0 u_y(x,\pi)dx - \int_\pi^0 u_x(0,y)dy$$

$$= \int_0^\pi \left(x^2-a\right) dx + \int_0^\pi \cos 3y dy - \int_\pi^0 \left(\pi - x^2\right) dx - \int_\pi^0 (-\cos 3y) dy = -a\pi + \pi^2 = 0 \Rightarrow a = \pi$$

תנאי התואמות מתקיים. נחלק את השפה $\partial\mathcal{D}$ לשני חלקים ונגדיר

$$u = v + w$$

כאשר v, w שתיהן הרמוניות ומקימות את תנאי השפה

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0, & 0<x,y<\pi, \\ v_y(x,0)=0, v_y(x,\pi)=0 & \\ v_x(0,y)=-\cos 3y, v_x(\pi,y)=\cos 3y & \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ w_y(x,0) = x^2 - \pi, w_y(x,\pi) = \pi - x^2 & \\ w_x(0,y) = 0, w_x(\pi,y) = 0 & \end{cases}$$

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$w(x,y) = X(x)Y(y),$$

כאשר $Y(y)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, y ו-x, בהתאמה.

$$X_{xx}(x)Y(y) + X(x)Y_{yy}(y) = 0,$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של x בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של y בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

מהצבה במשוואת לפלאס מקבלים הפרדה לשתי משוואות, משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות:

$$\begin{cases} X_{xx}(x) = -\lambda X(x), & 0 < x < \pi \\ -Y_{yy}(y) = -\lambda Y(y), & 0 < y < \pi, \end{cases}$$

תנאיי השפה

$$\begin{cases} w_x(0,y) = 0 = X'(0)Y(y) & \Rightarrow X'(0) = 0 \\ w_x(\pi,y) = 0 = X'(\pi)Y(y) & \Rightarrow X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

מכתיבים בעיית שטורם-ליוביל עבור $X(x)$. פתרון בעיית שטורם-ליוביל מוביל לסדרת ערכים עצמיים λ_n, וסדרת פונקציות עצמיות $X_n(x)$. כעת אפשר להציב את סדרת λ_n במשוואה ולקבל סדרה מתאימה $Y_n(y)$.

•

$$\begin{cases} X_{xx}(x) = -\lambda X(x), \quad 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $X(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$X(x) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow X'(0) = \tilde{\beta} = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \Rightarrow X'(\pi) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) = 0$$

$$\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0, \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $X(x) = \alpha + \beta x$

$$X'(0) = X'(\pi) = 0 \Rightarrow X'(0) = \beta = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \Rightarrow X'(\pi) = \beta = 0 \Rightarrow X(x) = \alpha$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה $X(x) = const$.

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $X'(0) = X'(\pi) = 0$ ונקבל

$$X'(0) = 0 = \beta \Rightarrow \beta = 0$$

$$X'(\pi) = 0 = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots$$

תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = n^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$X(x) = \cos nx$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} X_n(x) = \cos nx \\ \lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

•

$$Y_{yy}(y) - \lambda Y(y) = 0, \lambda > 0$$

הפתרון הכללי :

$$\Rightarrow Y(y) = \tilde{\alpha} \cosh\left(\sqrt{\lambda} y\right) + \tilde{\beta} \sinh\left(\sqrt{\lambda} y\right)$$

נציב בפתרון את λ_n ונקבל:

$$Y_n(y) = \tilde{\alpha}_n \cosh(ny) + \tilde{\beta}_n \sinh(ny), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי של פתרונות מופרדים הוא פתרון של המשוואה המקיים גם את תנאי השפה.

$$w(x, y) = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{\alpha}_n \cosh(ny) + \tilde{\beta}_n \sinh(ny)\right] \cos(nx)$$

- ניגש עתה לטפל בתנאי ההתחלה . התנאי ההתחלה היה

$$w_y(x, 0) = x^2 - \pi, w_y(x, \pi) = \pi - x^2$$

$$w_y(x, 0) = x^2 - \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{\beta}_n n\right] \cos(nx)$$

$$\tilde{\beta}_n n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-\pi)\cos(nx)dx =$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}_n n = \frac{2}{\pi}\left[x^2\ \frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}dx - \pi\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right]$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left[-x\ \frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx\right] = \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}_n = \frac{4}{n^3}(-1)^n, n = 1, 2, ...$$

$$w_y(x,\pi) = \pi - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{\alpha}_n n\sinh(n\pi) + \tilde{\beta}_n n\cosh(n\pi)\right]\cos(nx) := \sum_{n=1}^{\infty} B_n n\cos(nx)$$

$$B_n := \tilde{\alpha}_n\sinh(n\pi) + \tilde{\beta}_n\cosh(n\pi)$$

$$B_n n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x^2)\cos(nx)dx =$$

$$\Rightarrow B_n n = -\frac{2}{\pi}\left[x^2\ \frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}dx - \pi\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[-x\ \frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx\right] = -\frac{4}{n^2}\cos(n\pi) = \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4}{n^3}(-1)^{n+1}, n = 1, 2, ...$$

$$B_n := \tilde{\alpha}_n\sinh(n\pi) + \tilde{\beta}_n\cosh(n\pi) = \frac{4}{n^3}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_n = -\tilde{\beta}_n\frac{\cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)} + \frac{4}{\sinh(n\pi)\,n^3}(-1)^{n+1}$$

$$\tilde{\beta}_n = \frac{4}{n^3}(-1)^n \Rightarrow \tilde{\alpha}_n = -\frac{4}{n^3}(-1)^n\frac{\cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)} + \frac{4}{\sinh(n\pi)\,n^3}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{\sinh(n\pi)\,n^3}\left[\cosh(n\pi) + 1\right]$$

$$\begin{cases} w(x,y) = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{\alpha}_n \cosh(ny) + \tilde{\beta}_n \sinh(ny)\right]\cos(nx) \\ \tilde{\alpha}_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{\sinh(n\pi)n^3}\left[\cosh(n\pi)+1\right], n = 0,1,2,\ldots \\ \tilde{\beta}_n = \frac{4}{n^3}(-1)^n, n = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

בצורה אנלוגית פותרים בעייה לפונקצית תיקון v

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & 0 < x,y < \pi, \\ v_y(x,0) = 0, v_y(x,\pi) = 0 \\ v_x(0,y) = -\cos 3y, v_x(\pi,y) = \cos 3y \end{cases}$$

- מחפשים פתרונות מהצורה

$$v(x,y) = X(x)Y(y),$$

כאשר $Y(y)$ ו-$X(x)$ הן פונקציות של משתנה אחד, y ו-x, בהתאמה.

$$X_{xx}(x)Y(y) + X(x)Y_{yy}(y) = 0,$$

- שלב הפרדת המשתנים:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)}$$

באגף שמאל רשומה פונקציה של x בלבד, ואילו באגף ימין רשומה פונקציה של y בלבד. אז קיים קבוע ההפרדה λ כך ש-

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

מהצבה במשוואת לפלאס מקבלים הפרדה לשתי משוואות, משוואה מובילה למערכת המשוואות רגילות:

$$\begin{cases} X_{xx}(x) = \lambda X(x), & 0 < x < \pi \\ -Y_{yy}(y) = \lambda Y(y), & 0 < y < \pi, \end{cases}$$

תנאיי השפה

$$\begin{cases} v_y(x,0) = 0 = X(x)Y'(0) & \Rightarrow Y'(0) = 0 \\ v_y(x,\pi) = 0 = X(x)Y'(\pi) & \Rightarrow Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

מכתיבים בעיית שטורם-ליוביל עבור $Y(y)$. פתרון בעיית שטורם-ליוביל מוביל לסדרת ערכים עצמיים λ_n, וסדרת פונקציות עצמיות $Y_n(y)$. כעת אפשר להציב את סדרת λ_n במשוואה ולקבל סדרה מתאימה $X_n(x)$.

•

$$\begin{cases} Y_{yy}(y) = -\lambda Y(y), \quad 0 < y < \pi \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

פתרון לא טריביאלי של מערכת זו ייקרא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי λ. זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים . צורת הפתרון הכללי היא :

ערך עצמי שלילי: אם $\lambda < 0$, אז $Y(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}$

$$Y(y) = \tilde{\alpha}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}y\right) + \tilde{\beta}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow Y'(0) = \tilde{\beta} = 0$$

$$Y'(\pi) = 0 \Rightarrow Y'(\pi) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) = 0$$

$$\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi\right) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = 0, \tilde{\beta} = 0 \Rightarrow Y(y) = 0$$

מקבלים רק פתרון הטריביאלי, אין למערכת ערך עצמי שלילי.

ערך עצמי אפס: אם $\lambda = 0$, אז $Y(y) = \alpha + \beta y$

$$Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \Rightarrow Y'(0) = \beta = 0$$

$$Y'(\pi) = 0 \Rightarrow Y'(\pi) = \beta = 0 \Rightarrow Y(y) = \alpha$$

במקרה זה הפתרון כללי הוא פונקציה $Y(y) = const$.

ערך עצמי חיובי: אם $\lambda > 0$, אז $Y(y) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}y)$ כאשר α, β הם מספריים ממשיים כלשהם.

נציב $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$ ונקבל

$$Y'(0) = 0 = \beta \Rightarrow \beta = 0$$

$$Y'(\pi) = 0 = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots$$

תנאי הכרחי ומספיק ש-λ הוא ערך עצמי:

$$\lambda = n^2, n = 1, 2, \ldots.$$

פונקצית עצמית המתאימה לערך עצמי היא:

$$Y(y) = \cos ny$$

אוסף הפתרונות הוא סדרה אינסופית של פונקציות עצמיות עם ערכים עצמיים חיוביים.

$$\begin{cases} Y_n(y) = \cos ny \\ \lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

-

$$X_{xx}(x) - \lambda X(x) = 0, \lambda > 0$$

הפתרון הכללי :

$$\Rightarrow X(x) = \tilde{\alpha} \cosh\left(\sqrt{\lambda} x\right) + \tilde{\beta} \sinh\left(\sqrt{\lambda} x\right)$$

נציב בפתרון את λ_n ונקבל:

$$X_n(x) = \tilde{\alpha}_n \cosh(nx) + \tilde{\beta}_n \sinh(nx), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- על פי עקרון הסופרפוזיציה כל צירוף ליניארי

של פתרונות מופרדים הוא פתרון של המשוואה המקיים גם את תנאי השפה.

$$v(x, y) = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{\alpha}_n \cosh(nx) + \tilde{\beta}_n \sinh(nx)\right] \cos(ny)$$

$$v_x(0, y) = -\cos 3y, v_x(\pi, y) = \cos 3y$$

$$v_x(0, y) = -\cos 3y = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{\beta}_n n\right] \cos(ny) \Rightarrow n = 3$$

$$3\tilde{\beta}_3 = -1 \Rightarrow \tilde{\beta}_3 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}_n = 0, n \neq 3$$

$$v_x(\pi, y) = \cos 3y = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{\alpha}_n n \sinh(n\pi) + \tilde{\beta}_n n \cosh(n\pi)\right] \cos(ny) \Rightarrow n = 3$$

$$3\tilde{\alpha}_3 \sinh(3\pi) + 3\tilde{\beta}_3 \cosh(3\pi) = 1; \tilde{\beta}_3 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_3 = \frac{1 + \cosh(3\pi)}{3\sinh(3\pi)}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_n = 0, n \neq 3$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_0 + \left[\frac{1 + \cosh(3\pi)}{3\sinh(3\pi)} \cosh(3x) - \frac{1}{3}\sinh(3x)\right] \cos(3y)$$

$$u = v + w$$

$$\left\{\begin{array}{rl} u(x,y) = & \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{1,0} + \left[\frac{1+\cosh(3\pi)}{3\sinh(3\pi)} \cosh(3x) - \frac{1}{3}\sinh(3x)\right] \cos(3y) \\ + & \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{2,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{\alpha}_n \cosh(ny) + \tilde{\beta}_n \sinh(ny)\right] \cos(nx) \\ & \tilde{\alpha}_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{\sinh(n\pi)n^3} \left[\cosh(n\pi) + 1\right], n = 0, 1, 2, \ldots \\ & \tilde{\beta}_n = \frac{4}{n^3}(-1)^n, n = 0, 1, 2, \ldots . \end{array}\right.$$