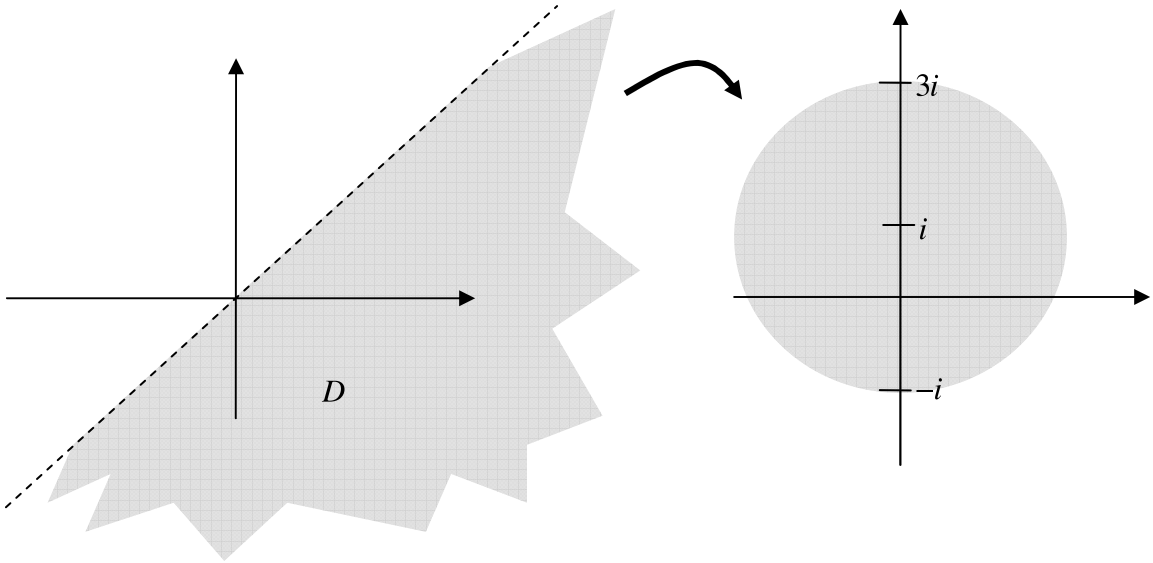
גליון 1

1. $-2^{21}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
2. $z=0\ ,\quad z=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k}{7}\right)\Big|_{k=0,1,2,4,5,6}$
3. א. חלק המישור שמעל $y=x-\sqrt{5}$
ב. אליפסה שמוקדיה $-2i$ ו $2i$
ג. כל המישור המרוכב
ד.כל המישור המרוכב
ה. $\mathbb{C}\setminus\{iy \mid y>1\}$
4. א. לא גזירה ולא אנליטית.
ב. גזירה ואנליטית ב 1.
ג. לא גזירה ולא אנליטית.
5. הוכחה
6. א. u אינה הרמונית, $f=\frac{(z+\overline{z})^3+(z-\overline{z})^3}{8}$
ב. $f(x+iy)=x^2-y^2+2xy+i\left(y^2-x^2+2xy\right)$
ג. $f(x+iy)=x^2-y^2-\frac{y}{x^2+y^2}+i\left(2xy-\frac{x}{x^2+y^2}\right)$
7. הוכחות

גליון 2

שאלה 1

יש לבצע את ההעתקה הבאה:



איזשהי נקודה $z_1 = z_0$ תועתק למרכז העיגול $w_1(z_0) = i$

הנקודה האינברסית לה ביחס לישר $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $z_2 = i\overline{z_0}$ תועתק אל הנקודה האינברסית המתאימה למעגל $|z-i| = 2$,

כלומר $w_2(i\overline{z_0}) = \infty$.

בנוסף, נקודה על הישר $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ (שפת התחום D), $z_3 = \infty$, מועתקת לנקודה על המעגל $|z-i| = 2$, כלומר $w_3(\infty) = i + 2e^{i\alpha}$. בעזרת שלוש הנקודות והנוסחה: $\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$ נקבל:

$$\frac{w-i}{w-(i+2e^{i\alpha})}\cdot\frac{\infty-(i+2e^{i\alpha})}{\infty-i} = \frac{z-z_0}{z-\infty}\cdot\frac{i\overline{z_0}-\infty}{i\overline{z_0}-z_0}$$

$$\frac{w-i}{w-i-2e^{i\alpha}} = \frac{z-z_0}{i\overline{z_0}-z_0}$$

$$(i\overline{z_0}-z_0)(w-i) = (z-z_0)(w-i-2e^{i\alpha})$$

$$i\overline{z_0}w + \overline{z_0} \cancel{-wz_0} \cancel{+iz_0} = zw - iz - 2ze^{i\alpha} \cancel{-z_0w} \cancel{+iz_0} + 2z_0e^{i\alpha}$$

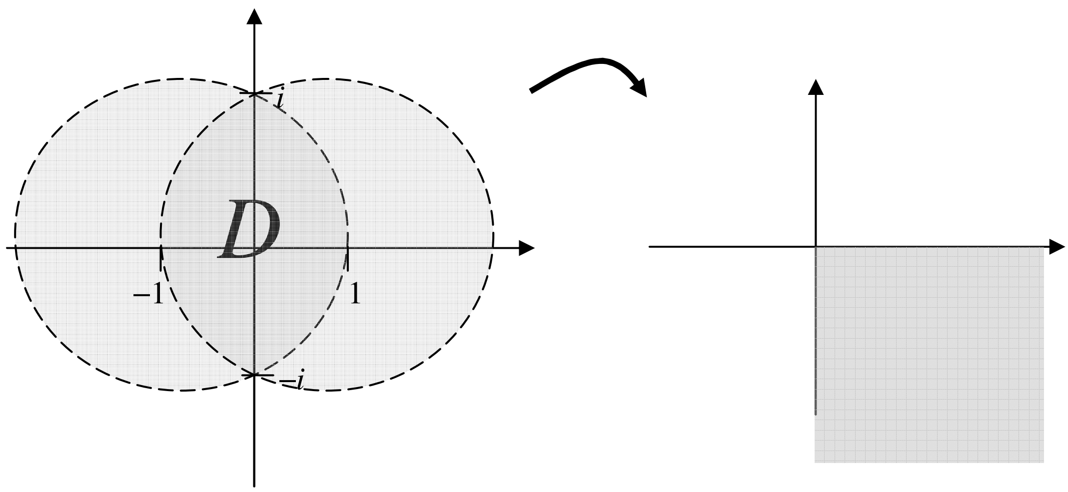
$$w(i\overline{z_0}-z) = 2z_0e^{i\alpha} - \overline{z_0} - iz - 2ze^{i\alpha}$$

$$w = \frac{2z_0e^{i\alpha} - \overline{z_0} - iz - 2ze^{i\alpha}}{i\overline{z_0}-z} = \frac{2z_0e^{i\alpha} - \overline{z_0} - z(i+ze^{i\alpha})}{i\overline{z_0}-z}$$

שאלה 2

השפה של רבע המישור היא הציר הממשי החיובי והציר המדומה השלילי – שני קווים ישרים מאונכים. לכן נרצה ששפת התחום $D=\left\{z:\left|z-1\right|<\sqrt{a},\left|z+1\right|<\sqrt{2}\right\}$ תהיה שני מעגלים, או חלקי מעגלים מאונכים בנקודות המפגש שלהם.

כאשר $a=2$, נקבל:



כי רק אז שני המעגלים יחתכו בזווית ישרה.

הנקודות $i,-i$ חייבות לעבור ל $0,\infty$ כי אלו שתי הנקודות שבהן הישרים נפגשים, ולכן ישנן שתי אופציות:

.1 $w_1\left(z_1=i\right)=0,w_2\left(z_2=-i\right)=\infty$

נקבל $w=k\dfrac{z-i}{z+i}$

בנוסף, נקודה 0 מועתקת אל $w\left(0\right)=a-ib,\ \ 0<a,b\in\mathbb{R}$ ואז נקבל

$$w\left(0\right)=k\frac{-i}{i}=-k=a-ib$$

כלומר $k=-a+ib$ נקודה ברביע שני. ולסיכום:

$$w=\left(-a+ib\right)\frac{z-i}{z+i}$$

.2 $w_1\left(z_1=i\right)=\infty,w_2\left(z_2=-i\right)=0$

נקבל $w=k\dfrac{z+i}{z-i}$

בנוסף, נקודה 0 מועתקת אל $w\left(0\right)=a-ib,\ \ 0<a,b\in\mathbb{R}$ ואז נקבל

$$w\left(0\right)=k\frac{i}{-i}=-k=a-ib$$

כלומר $k=-a+ib$ נקודה ברביע שני. ולסיכום:

$$w=\left(-a+ib\right)\frac{z+i}{z-i}$$

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

$$\cos z = 3i - \sqrt{3}$$
$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 3i - \sqrt{3}$$
$$e^{iz} + e^{-iz} = 6i - 2\sqrt{3}$$

נסמן $t = e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix}$ ונמשיך:

$$t + \frac{1}{t} = 6i - 2\sqrt{3} \qquad / \cdot t$$
$$t^2 - 2\left(3i - \sqrt{3}\right)t + 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{3i - \sqrt{3} \pm \sqrt{\left(3i - \sqrt{3}\right)^2 - 1}}{1} = 3i - \sqrt{3} \pm \sqrt{-9 - 6\sqrt{3}i + 3 - 1}$$
$$t_{1,2} = 3i - \sqrt{3} \pm \sqrt{-7 - 6\sqrt{3}i}$$

המשוואה הריבועית נותנת בדיוק שני פתרונות. נסמנם: $t_{1,2} = a_{1,2} + ib_{1,2}$

ולכן, עבור $j = 1,2$:

$$e^{-y_j + ix_j} = e^{-y_j}\left(\cos x_j + i \sin x_j\right) = a_j + ib_j \qquad \Rightarrow \begin{cases} e^{-y_j} \cos x_j = a_j \\ e^{-y_j} \sin x_j = b_j \end{cases}$$
$$\left(e^{-y_j} \cos x_j\right)^2 + \left(e^{-y_j} \sin x_j\right)^2 = a_j^{\,2} + b_j^{\,2}$$
$$e^{-2y_j}\left(\cos^2 x_j + \sin^2 x_j\right) = e^{-2y_j} = a_j^{\,2} + b_j^{\,2}$$
$$\ln\left(e^{-2y_j}\right) = \ln\left(a_j^{\,2} + b_j^{\,2}\right)$$
$$-2y_j = \ln\left(a_j^{\,2} + b_j^{\,2}\right)$$
$$y_j = -\ln\left(\sqrt{a_j^{\,2} + b_j^{\,2}}\right)$$

וכעת:

$$e^{-y_j} \sin x_j = b_j \qquad \to \qquad e^{\ln\left(\sqrt{a_j^{\,2} + b_j^{\,2}}\right)} \sin x_j = b_j \qquad \to \qquad \sqrt{a_j^{\,2} + b_j^{\,2}} \sin x_j = b_j$$
$$x_j = \arcsin\left(\frac{b_j}{\sqrt{a_j^{\,2} + b_j^{\,2}}}\right)$$

ולסיכום:

$$j = 1,2 \qquad , \qquad x_j + iy_j = \arcsin\left(\frac{b_j}{\sqrt{a_j^{\,2} + b_j^{\,2}}}\right) - i \ln\left(\sqrt{a_j^{\,2} + b_j^{\,2}}\right)$$

כאשר $a_{1,2} + ib_{1,2} = 3i - \sqrt{3} \pm \sqrt{-7 - 6\sqrt{3}i}$

סעיף ב

$$\sinh z = 2+i \quad \to \quad \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 2+i \quad \to \quad e^z - e^{-z} = 4+2i$$

נסמן $t = e^z$ ונקבל משוואה ריבועית:

$$t - \frac{1}{t} = 2(2+i) \qquad /\cdot t$$

$$t^2 - 2(2+i)t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2+i \pm \sqrt{(2+i)^2+1}}{1} = 2+i \pm \sqrt{4+4i-1+1} = 2+i \pm \sqrt{4+4i}$$

נסמן את שני הפתרונות: $e^{z_j} = a_j + ib_j = 2+i \pm 2\sqrt{1+i}$ ולכן:

$$e^{x_j+iy_j} = e^x\left(\cos y_j + i\sin y_j\right) = a_j + ib_j \qquad \Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y_j = a_j \\ e^x \sin y_j = b_j \end{cases}$$

$$\left(e^x \cos y_j\right)^2 + \left(e^x \sin y_j\right)^2 = a_j^{\ 2} + b_j^{\ 2}$$

$$e^{2x}\cos^2 y_j + e^{2x}\sin^2 y_j = a_j^{\ 2} + b_j^{\ 2}$$

$$e^{2x} = a_j^{\ 2} + b_j^{\ 2}$$

$$2x = \ln\left(a_j^{\ 2} + b_j^{\ 2}\right) \quad \to \quad x = \ln\left(\sqrt{a_j^{\ 2} + b_j^{\ 2}}\right)$$

ואז:

$$e^x \cos y_j = a_j \quad \to \quad e^{\ln\left(\sqrt{a_j^{\ 2}+b_j^{\ 2}}\right)}\cos y_j = a_j \quad \to \quad \sqrt{a_j^{\ 2}+b_j^{\ 2}}\cos y_j = a_j$$

$$y_j = \arccos\left(\frac{a_j}{\sqrt{a_j^{\ 2}+b_j^{\ 2}}}\right)$$

ולסיכום:

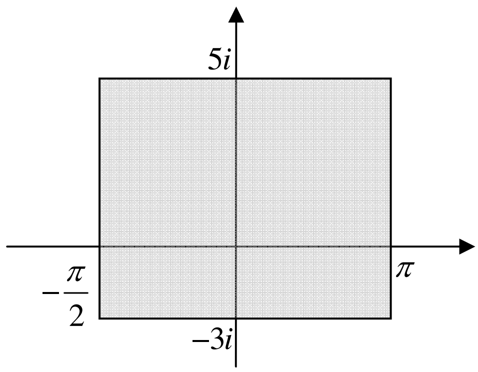
$$x_j + y_j = \ln\left(\sqrt{a_j^{\ 2}+b_j^{\ 2}}\right) + i\arccos\left(\frac{a_j}{\sqrt{a_j^{\ 2}+b_j^{\ 2}}}\right) \qquad , j = 1,2$$

כאשר $a_j + ib_j = 2+i \pm 2\sqrt{1+i}$

<u>שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

התחום D :



$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y = u(x,y)+iv(x,y)$$

ידוע ש:

$$u = \sin x\cosh y$$
$$v = \cos x\sinh y$$

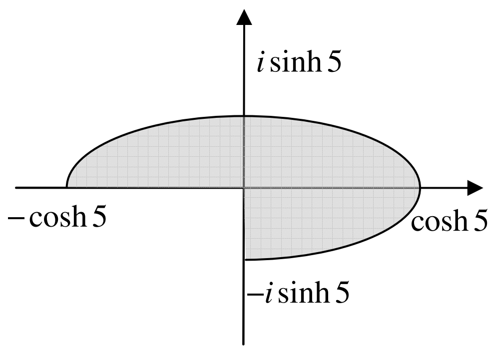
אנו מסתכלים על ישר $\ell_c : \left\{ x+iy \mid -\frac{\pi}{2} < x < \pi, y = c \right\}$

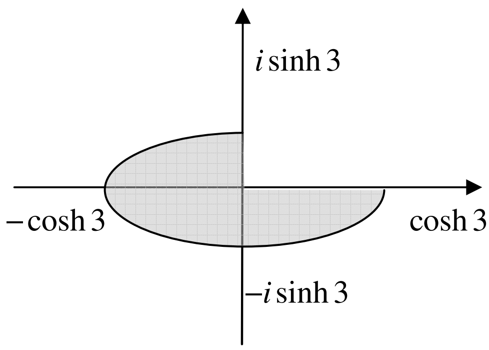
$$u = \sin x\cosh c$$
$$v = \cos x\sinh c$$

מתקיים:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c}+\frac{v^2}{\sinh^2 c} = \frac{\sin^2 x\cosh^2 c}{\cosh^2 c}+\frac{\cos^2 x\sinh^2 c}{\sinh^2 c} = 1$$

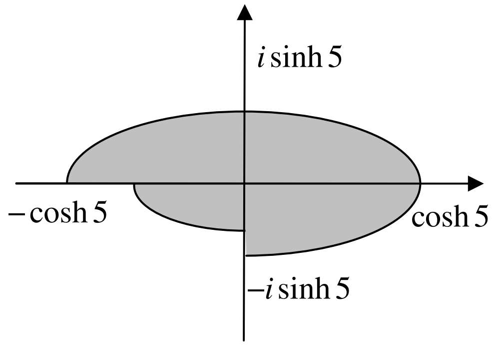
אם נחלק את התחום שלנו לשניים, אחד עבורו $\operatorname{Im} z \ge 0$ והשני עבורו $\operatorname{Im} z < 0$, נקבל את שתי התמונות:





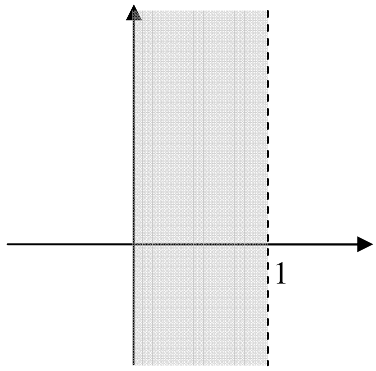
כל זאת כשאנו מסתמכים על העובדה שתמונת הקבוצה $\{x+iy \mid -\pi < x < \pi, y = Const\}$ היא אליפסה מלאה.

התמונה הסופית היא איחוד שתי התמונות שלעיל:



<u>סעיף ב</u>

התחום D :



תמונת הציר המקביל לציר המדומה, השפה הימנית של התחום, $E=\{iy+1, y\in\mathbb{R}\}$ היא: $w(E)=(iy+1-1)^3=-iy^3$ וזהו הציר המדומה.

תמונת הציר המדומה $E=\{iy, y\in\mathbb{R}\}$ היא:

$$w(E)=(iy-1)^3=i^3y^3-3i^2y^2+3iy-1$$

$$w(E)=-iy^3+3y^2+3iy-1=3iy-1+iy(3-y^2)$$

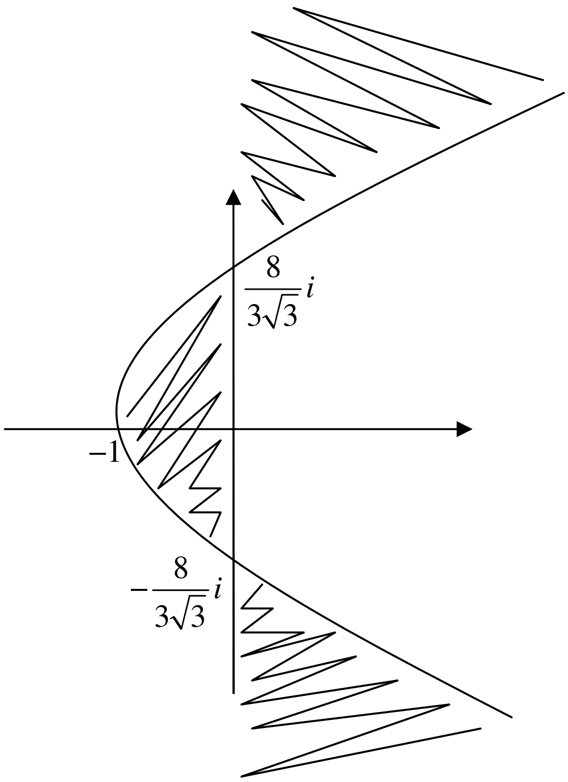
זהו עקום המתואר ע"י הפרמטר y, כאשר $-\infty<y<\infty$.

העקום הוא:

$$\mathrm{Re}(y)=3y^2-1$$
$$\mathrm{Im}(y)=y(3-y)(3+y)$$

מתקיים:

$$\mathrm{Re}(0)=-1$$
$$\mathrm{Im}(0)=0$$
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$
$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$
$$\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3-\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$\lim_{y\to\infty}\mathrm{Re}(y)=\lim_{y\to-\infty}\mathrm{Re}(y)=\infty$$
$$\lim_{y\to\infty}\mathrm{Im}(y)=-\infty$$
$$\lim_{y\to-\infty}\mathrm{Im}(y)=\infty$$



וכך נוכל לשרטט את העקום.

נסיק שהתמונה היא השטח שכלא בין שתי התמונות של השפות – העקום והציר המדומה.

<u>שאלה 5</u>

<u>סעיף א</u>

$$i^{i+3}=e^{(i+3)\ln i}=e^{(i+3)\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)}=e^{i(i+3)\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$$

$$=e^{3\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)i-1\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}\operatorname{cis}\left(\frac{3}{2}\pi+6\pi k\right)=-ie^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}$$

כאשר $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

<u>סעיף ב</u>

$$(1-i)^{3-i}=e^{(3-i)\ln(1-i)}=e^{(3-i)\left(\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}=e^{3\ln\sqrt{2}-i\ln\sqrt{2}+3i\left(2\pi k-\frac{\pi}{4}\right)+\left(2\pi k-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=e^{-\frac{\pi}{4}+3\ln\sqrt{2}+2\pi k}e^{i\left(6\pi k-\frac{3}{4}\pi-\ln\sqrt{2}\right)}=e^{-\frac{\pi}{4}+3\ln\sqrt{2}+2\pi k}\operatorname{cis}\left(-\frac{3}{4}\pi-\ln\sqrt{2}\right)$$

כאשר $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

<u>סעיף ג</u>

$$\ln\left(\ln\left(\ln(-1)\right)\right)=\ln\left(\ln\left(\ln 1+i(\pi+2\pi k)\right)\right)$$

$$=\ln\left(\ln\left(i(\pi+2\pi k)\right)\right)=\ln\left(\ln|\pi+2\pi k|+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)$$

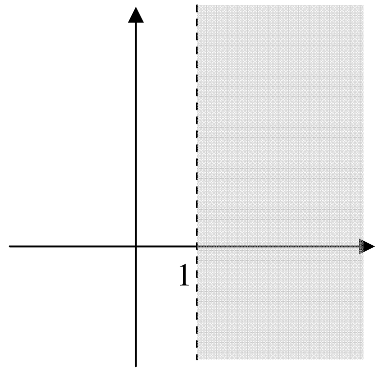
$$=\ln\left(\sqrt{\left(\ln|\pi+2\pi k|\right)^2+\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2}\right)+i\arctan\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{\ln|\pi+2\pi k|}\right)+i2\pi m$$

כאשר
$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$
$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$
$m=0,\pm1,\pm2,\ldots$

שאלה 6

סעיף א

התחום שלנו:



1. הפונקציה $w=\sqrt[3]{z}$:

$$w_k=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{3}\right)$$

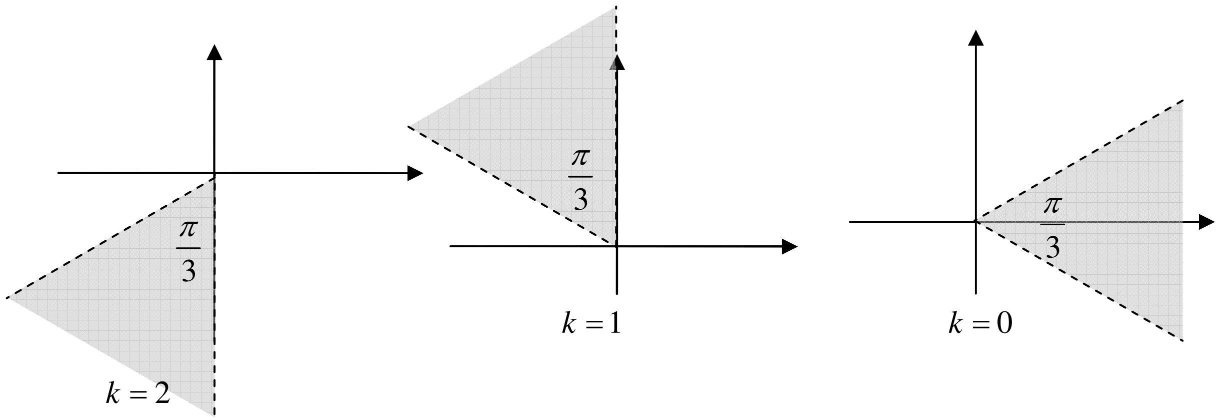
כאשר $k=0,1,2$. נקבל את הענפים הבאים:

$$w_0=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)=\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta}{3}}$$

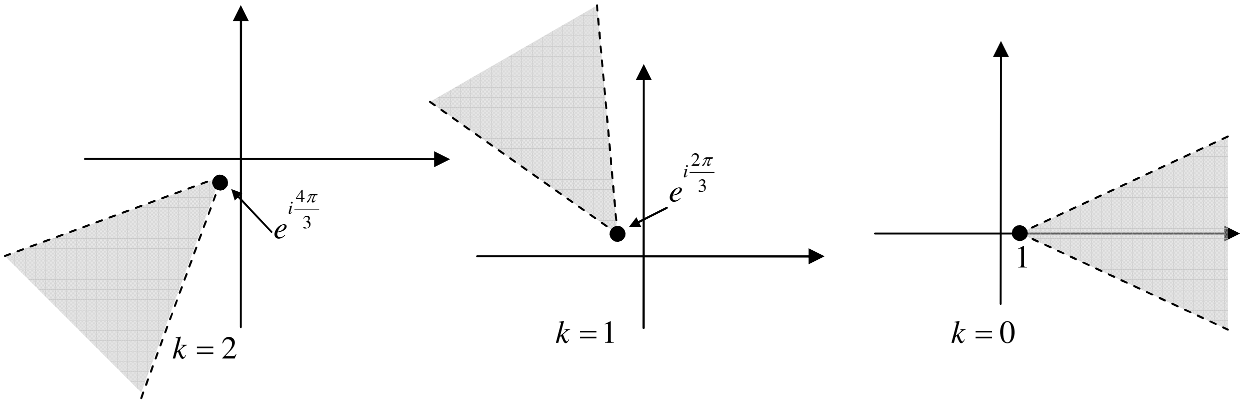
$$w_1=\sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2}{3}\pi\right)\right]=\sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2}{3}\pi\right)}$$

$$w_2=\sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4}{3}\pi\right)\right]=\sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4}{3}\pi\right)}$$

אם נבצע את ההעתקה על כל חצי המישור הימני נקבל את התמונות:



אבל מאחר ואנו מורידים פס ברוחב 1 בתחילת הציר הממשי, נקבל תחומים צרים יותר:



2. הפונקציה $w=\ln(z-1)$:

מכיון שהפונקציה $z-1$ "תזיז" את תחומינו, מספיק לבדוק מהי תמונת חצי המישור על ההעתקה $w'=\ln z$.

$$w'=\ln z=\ln|z|+iArg(z)+i2\pi k$$

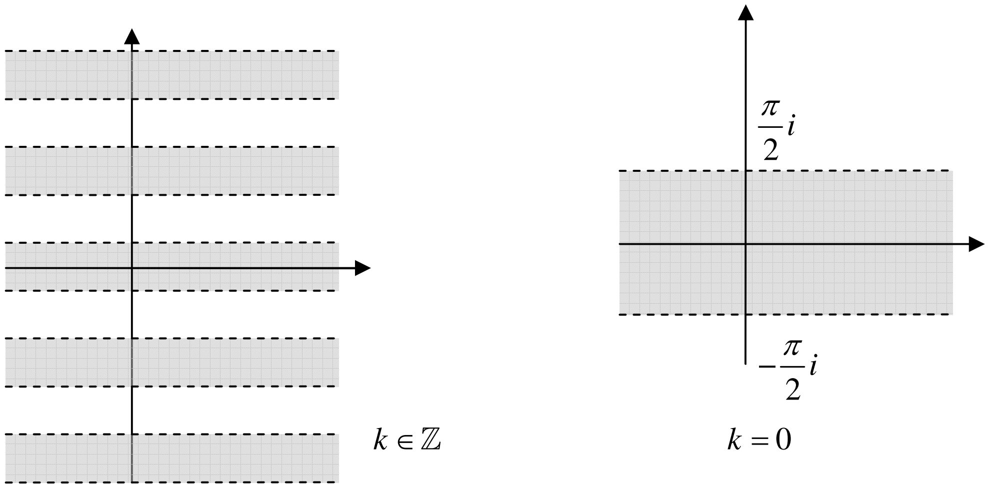
נבדוק לאן מועתקת קרן, שניתנת לתאור ע"י $z=re^{i\theta}$ כאשר θ קבועה ו $r>0$:

$$w'=\ln|z|+iArg(z)+i2\pi k=\ln r+i(\theta+2\pi k)$$

$\ln r$ מקבל ערכים בתחום $(-\infty,\infty)$, ואנו מסתכלים על $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

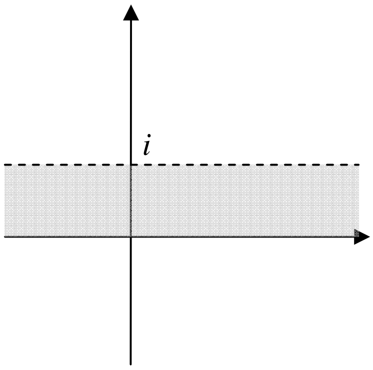
עבור $k=0$ נקבל פס ברוחב π.

וכאשר נרוץ על כל $k\in\mathbb{Z}$ נקבל אינסוף פסים כאלו,
במרווחים קבועים, כאשר מרכז כל פס בישר $2\pi ki$



<u>סעיף ב</u>

התחום שלנו:



1. הפונקציה $w=\sqrt[3]{z}$:

נבדוק לאן מועתקת שפת התחום.

תמונה הציר הממשי, $y=0$:

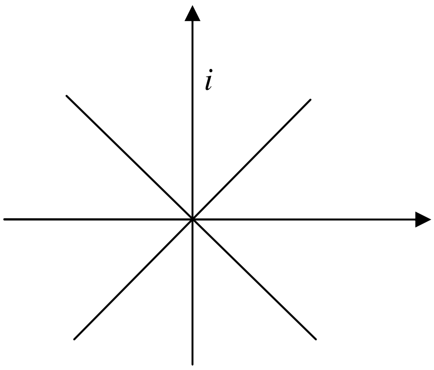
$$w=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{x+0i}=\sqrt[3]{x}\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\right)\right]$$

כאשר $k=0,1,2$. נפרט:

$$w_0=\sqrt[3]{x}\left[\cos\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)\right]=0$$

$$w_1=\sqrt[3]{x}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\sqrt[3]{x}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$w_2=\sqrt[3]{x}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\sqrt[3]{x}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$



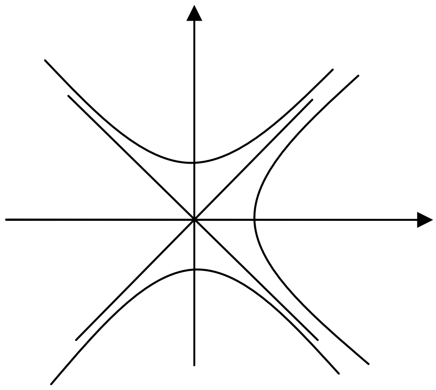
קיבלנו שני קווים.

נבדוק איך מועתק הישר $z=x+i$:

$$w=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{x+i}=\sqrt[6]{x^2+1^2}\,e^{\frac{i}{3}\left(\arctan\frac{1}{x}+2\pi k\right)}$$

רואים ש: $$\lim_{x\to\infty}=\sqrt[6]{x^2+1^2}\,e^{\frac{i}{3}\left(\arctan\frac{1}{x}+2\pi k\right)}=\infty\cdot e^{\frac{2\pi k}{3}i}\Big|_{k=0,1,2}=\infty\cdot e^0,\infty\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i},\infty\cdot e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

כלומר שפות התחום שואפות לקווים ישרים, ולכן נקבל:



כאשר התמונה היא התחום הכלוא בין ההיפרבולות לקווים הישרים.

2. הפונקציה $w=\ln(z-1)$:

הפונקציה $z-1$ "תזיז" את תחומינו, אך זה לא ישתנה ולכן די לבדוק את התמונה של הפונקציה $w=\ln z$.

$$w'=\ln z=\ln|z|+iArg(z)+i2\pi k$$

נבדוק לאן מועתק קו ישר $z=x+ic$:

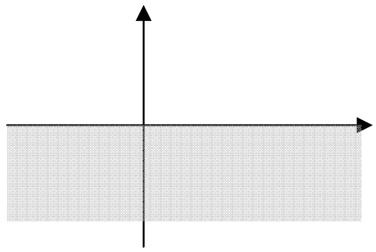
$$w'=\ln(x+ic)=\ln\sqrt{x^2+c^2}+i\left(\arctan\frac{c}{x}+2\pi k\right)=u+iv$$

עבור c קבוע, כאשר $x\in(-\infty,\infty)$, נקבל ש $v\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$.

בשביל u נקבל $u\in(\ln|c|,\infty)$.

אנו מתעסקים בתחום שבו $c\in(0,1)$ וכאשר $c\to 0$, נקבל $u\in(-\infty,\infty)$.

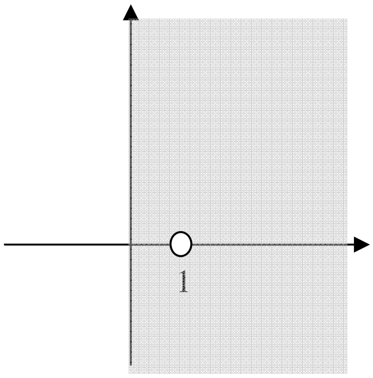
לכן, תמונת הפונקציה על התחום שלנו היא חצי המישור התחתון:



שאלה 7

הפונקציה שלנו: $w=\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{z}}$.

התחום שלנו:



נסמן: $h=\sqrt[3]{z}$, $g=\sqrt[5]{z}+1$ ולכן $w=h\circ g$.

נחקור את g:

$$g=\sqrt[5]{z}+1=\sqrt[5]{r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)}+1=\sqrt[5]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{5}\right)\right)+1$$

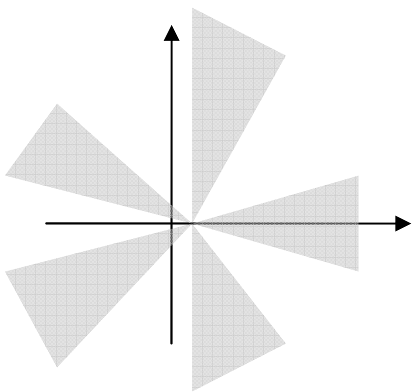
$$g=\sqrt[5]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{5}+\frac{2\pi}{5}k\right)}+1$$

כאשר $k=0,1,2,3,4$ - חמישה ענפים אנליטיים שונים, מכיוון שהתחום אינו מקיף את הראשית.

נבחן את תמונת הפונקציה עבור הציר המדומה $z=re^{\pm\frac{\pi}{2}i}$ עבור כל k ונשרטט את 5 התחומים:

$$g=\begin{cases}\sqrt[5]{r}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{10}\right)}+1, & k=0\\ \sqrt[5]{r}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{10}\right)}+1, & k=1\\ \sqrt[5]{r}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{10}+\frac{8\pi}{10}\right)}+1, & k=2\\ \sqrt[5]{r}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{10}+\frac{12\pi}{10}\right)}+1, & k=3\\ \sqrt[5]{r}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{10}+\frac{16\pi}{10}\right)}+1, & k=4\end{cases}$$

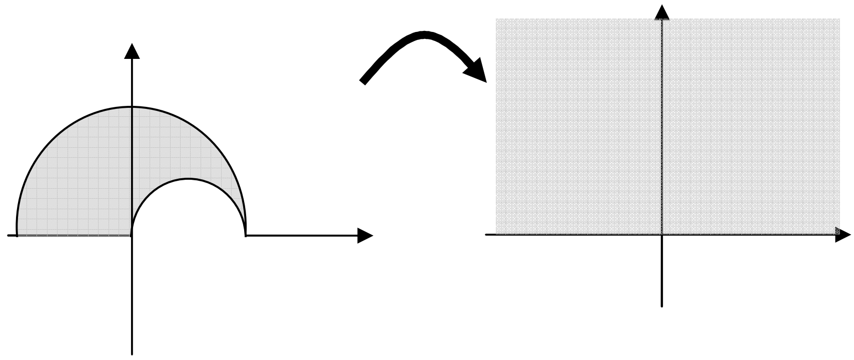
תמונות הענפים הם:



כשנרכיב את הפונקציה h על הפונקציה g, נקבל שלושה ענפים אנליטיים לכל תחום, מכיוון שכל תחום לא מקיף את הראשית. לכן, לסיכום נקבל 15 ענפים, כשכולם אנליטיים.

שאלה 8

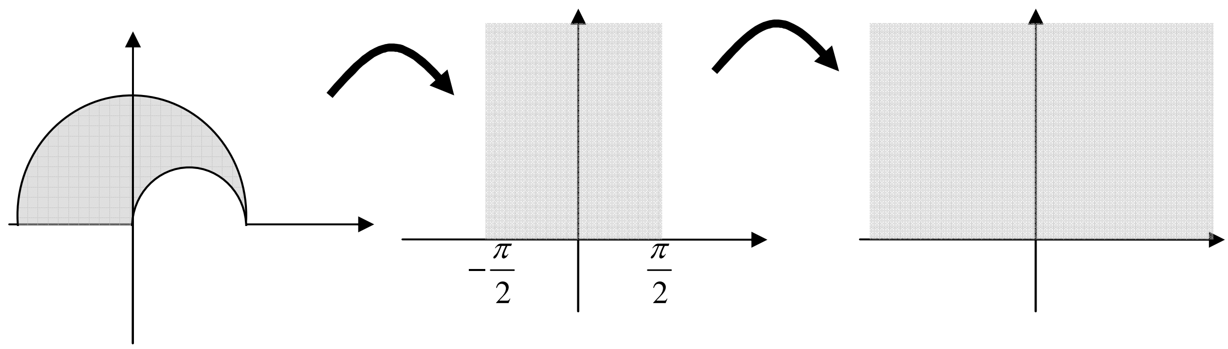
יש לבצע העתקה כזו:



לא ניתן למצוא העתקת מביוס מתאימה, מכיוון שזוויות החיתוך בין כל מעגל לציר הממשי, זוויות ישרות, צריכות להשמר, מה שלא יכול לקרות אם מנסים להעתיק את התחום על חצי המישור.

ניתן למצוא העתקת מביוס (קונפורמית וחח"ע) שתעתיק את התחום לפס $G=\left\{x+iy \mid -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, y>0\right\}$ ואז, בעזרת פונקצית $\sin z$ להעתיק פס זה על כל חצי המישור, מכיוון ש $\sin z$ חח"ע בתחום G.

כלומר נבצע:



נבחר נקודות ונשתמש בנוסחה $\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}=\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$:

$$w_1(z_1=2)=\infty$$

$$w_2(z_2=0)=\frac{\pi}{2}$$

$$w_3(z_3=-2)=-\frac{\pi}{2}$$

ואז:

$$\frac{w-\infty}{w+\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\infty}=\frac{z-2}{z+2}\cdot\frac{0+2}{0-2}\quad\to\quad\frac{\pi}{w+\frac{\pi}{2}}=\frac{2-z}{z+2}\quad\to\quad\pi(z+2)=(2-z)\left(w+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\pi z+2\pi=2w-zw+\pi-z\frac{\pi}{2}$$

$$2\pi z+2\pi=4w-2zw-z\pi$$

$$w(4-2z)=3z\pi+2\pi$$

$$w=\frac{3z\pi+2\pi}{4-2z}$$

נוסיף את פעולת ה $\sin$ על ההעתקה שמצאנו, ונקבל את ההעתקה:

$$w=\sin\left(\frac{3z\pi+2\pi}{4-2z}\right)$$

שאלה 9

מכיוון שהנקודות $0,i,-i$ נמצאות בתוך מעגל היחידה $|z|\le 1$, נוצרת בעיה כשמקיפים את ראשית הצירים וכך מגדילים את ערך הארגומט של הפונקציה ב 2π.

כדי שיהיה ענף לפונקציה $w=\left(z+i\right)^{\frac{1}{3}}\left(-z+i\right)^{\frac{1}{4}}z^{\frac{17}{12}}$ בתחום זה, צריך שלאחר סיבוב שלם סביב הראשית, ערך הארגומט לא ישתנה, כלומר יגדל בכפולה של 2π.

לאחר סיבוב שכזה, נבדוק בכמה יגדל כל ארגומנט של כל ביטוי במכפלה, תוך כדי שימוש בנוסחת דה-מואבר להוצאת שורש:

הארגומנט של $\left(z+i\right)^{\frac{1}{3}}$ יגדל ב $\frac{1}{3}\cdot 2\pi$

הארגומנט של $\left(-z+i\right)^{\frac{1}{4}}$ יגדל ב $\frac{1}{4}\cdot 2\pi$

הארגומנט של $z^{\frac{17}{12}}$ יגדל ב $\frac{17}{12}\cdot 2\pi$

ולכן, לסיכום, הארגונמט של הפונקציה יגדל ב $\frac{1}{3}\cdot 2\pi+\frac{1}{4}\cdot 2\pi+\frac{17}{12}\cdot 2\pi=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{17}{6}\right)=4\pi$ ולא ישנה את ערכה של הפונקציה.

ולכן קיים ענף אנליטי לפונקציה בתחום זה!

גליון 3

שאלה 1

$$f(z)=\int_{|\varepsilon|=5}\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon+z)(\varepsilon-z)\varepsilon}$$

נבדוק אילו ערכים מקבל האינטגרל עבור נקודות שונות במישור

עבור $|z|>5$:

$$f(z)=\int_{|\varepsilon|=5}\frac{\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon+z)(\varepsilon-z)}}{\varepsilon}=\int_{|\varepsilon|=5}\frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}=2\pi i\cdot h(0)=\frac{2\pi i}{-z^2}$$

עבור $0<|z|<5$:

$$f(z)=\int_{|\varepsilon|=5}\frac{\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon+z)(\varepsilon-z)}}{\varepsilon}+\int_{|\varepsilon-z|=5}\frac{\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon+z)\varepsilon}}{(\varepsilon-z)}+\int_{|\varepsilon+z|=\delta}\frac{\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon-z)\varepsilon}}{(\varepsilon+z)}=2\pi i\left[\frac{1}{-z^2}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z^2}\right]=0$$

נבחין בין המקרים $z=0$ ו $z=5$. אם $z=5$:

יש נקודה סינגולרית על מסלול האינטגרל כך שמתקבל ערך אינסופי בסכימה. לכן האינטגרל מתבדר.

אם $z=0$:

מדובר בפונקציה:

$$f(z)=\int_{|\varepsilon|=5}\frac{1\cdot d\varepsilon}{\varepsilon^3}=\frac{2\pi i}{2}h''(1)=0$$

שאלה 2

$f(z)=\frac{1}{(z-5)^2}+\cosh z-\sin^3 z-12\bar{z}$ אנליטית בתחום ועל שפתו.

$$\left|\int_\Gamma\left(\frac{1}{(z-5)^2}+\cosh z-\sin^3 z-12\bar{z}\right)dz\right|\le\left|\int_\Gamma\left(\frac{1}{(z-5)^2}+\cosh z-\sin^3 z\right)dz-\int_\Gamma 12\bar{z}dz\right|$$

$$=12\left|\int_\Gamma\bar{z}dz\right|\underset{\underset{Green}{\uparrow}}{=}12\left|2i\iint_\Delta\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\bar{z}dxdy\right|=24\left|\iint_\Delta dxdy\right|=24\cdot S(\Delta)=24\cdot 6=144$$

שאלה 3

$$h(z)=\frac{\cos z}{z^2-8z+15}=\frac{\cos z}{(z-5)(z-3)}$$

נתבונן במכנה ונבדוק נקודות סינגולריות: נקודות $z=3,5$ בעיתיות.

לכן, הפונקציה אנליטית בתחום.

מכאן שאינטגרל על כל מסלול שלא עובר בנקודה $z=3$ ייתן 0.

נבדוק סביב הנקודה $z=3$:

$$\int_\gamma\frac{\cos z}{(z-5)(z-3)}dz=\int_\gamma\frac{\frac{\cos z}{(z-5)}}{(z-3)}dz=2\pi i\cdot\left.\left(\frac{\cos z}{(z-5)}\right)\right|_{z=3}=-\pi i\cos 3\neq 0$$

כי $\frac{\cos z}{(z-5)}$ אנליטית בתחום.

קיבלנו, על מסלול סגור זה, שהאינטגרל שונה מ 0, ולכן לא קיימת פונקציה קדומה.

<u>שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\log(z+10)}{(z-1)(z+3)}dz = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)}dz$$

נגדיר $f(z)=\dfrac{\log(z+10)}{(z+3)}$ אנליטית בתחום $|z-1|\le 1$

לפי נוסחת קושי:

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)}dz = 2\pi i\cdot f(1) = 2\pi i\frac{\ln 11}{4} = \frac{\pi i}{2}\ln 11$$

<u>סעיף ב</u>

$$\int\limits_{|z-3|=1} \frac{\log(z+10)}{(z-1)(z+3)}dz = 0$$

מכיוון ש $f(z)=\dfrac{\log(z+10)}{(z-1)(z+3)}$ אנליטית ב $D=\{z \mid |z-3|\le 1\}$

<u>סעיף ג</u>

יש לנו בעיית אנליטיות בשתי נקודות: $z=1,-3$

ולכן, ע"י שימוש משפט קושי, נפרק את האינטגרל לשני אינטגרלים על שני עקומים בתוך התחום, ונקבל:

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{\log(z+10)}{(z-1)(z+3)}dz = \int\limits_{|z-1|=2} \frac{\log(z+10)}{(z-1)(z+3)}dz + \int\limits_{|z+3|=2} \frac{\log(z+10)}{(z-1)(z+3)}dz$$

וע"פ נוסחת קושי:

$$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\log(z+10)}{(z-1)(z+3)}dz + \int\limits_{|z+3|=2} \frac{\log(z+10)}{(z-1)(z+3)}dz = 2\pi i\left(\left[\frac{\log(z+10)}{z+3}\right]_{z=1} + \left[\frac{\log(z+10)}{z-1}\right]_{z=-3}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\ln 11}{4}+\frac{\ln 7}{-4}\right) = \frac{\pi i}{2}\ln\frac{11}{7}$$

<u>סעיף ד</u>

יש לנו בעיית אנליטיות בשתי נקודות: $z=\pm 5$

ולכן, ע"י שימוש משפט קושי, נפרק את האינטגרל לשני אינטגרלים על שני עקומים בתוך התחום, ונקבל:

$$\int\limits_{|z-6|=12} \frac{\cos^2 z\cosh^5 z}{z^2-25} = \int\limits_{|z-6|=12} \frac{\cos^2 z\cosh^5 z}{(z+5)(z-5)}dz = \int\limits_{|z-5|=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\cos^2 z\cosh^5 z}{(z+5)}}{(z-5)}\right)dz + \int\limits_{|z+5|=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\cos^2 z\cosh^5 z}{(z-5)}}{(z+5)}\right)dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos^2 5\cosh^2 5}{10}+\frac{\cos^2 5\cosh^2 5}{-10}\right) = 0$$

סעיף ה

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(z+1)^2(1-z)}dz = \int_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{(z+1)^2(1-z)}}{z^3}dz + \int_{|z+1|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(1-z)}}{(z+1)^2}dz + \int_{|1-z|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(z+1)^2}}{(1-z)}$$

נגדיר: $h(z)=\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(z+1)^2}$, $g(z)=\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(1-z)}$, $f(z)=\frac{\sinh^3 z\cos z}{(z+1)^2(1-z)}$ אנליטיות בתחומים המתאימים.

לצורך חישוב האינטגרל נשתמש בנוסחת קושי המורחבת. לשם כך נחשב את:

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{(z+1)^2(1-z)}}{z^3}dz = \frac{f''(0)\cdot 2\pi i}{2!} = \pi i\cdot\left(\frac{\left(3\sinh^2 z\cosh z\cos z-\sinh^3 z\sin z\right)\left(1-z^2\right)+2z\sinh^3 z\cos z}{\left(1-z^2\right)^2}\right)'\Bigg|_{z=0} = 0$$

$$\int_{|z+1|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(1-z)}}{(z+1)^2}dz = \frac{2\pi i}{1}f'(-1)$$

$$= 2\pi i\frac{\left(3\sinh^2 z\cosh z\cos z-\sinh^3 z\sin z\right)\left(z^3-z^4\right)-3z^2+4z^3\sinh^3 z\cos z}{\left(z^3(1-z)\right)^2}\Bigg|_{z=-1} \cong \frac{1}{2}i$$

$$\int_{|1-z|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(z+1)^2}}{(1-z)} = 2\pi i\cdot\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(z+1)^2}\Bigg|_{z=1} = 2\pi i\frac{\sinh^3 1\cos 1}{4} = \pi i\frac{\sinh^3 1\cos 1}{2}$$

לסיכום:

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(z+1)^2(1-z)}dz = \int_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{(z+1)^2(1-z)}}{z^3}dz + \int_{|z+1|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(1-z)}}{(z+1)^2}dz + \int_{|1-z|=\frac{1}{3}} \frac{\frac{\sinh^3 z\cos z}{z^3(z+1)^2}}{(1-z)}$$

$$\cong 0+\frac{1}{2}i+\pi i\frac{\sinh^3 1\cos 1}{2} = \frac{\pi i\sinh^3 1\cos 1+1}{2}$$

סעיף ו

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(1-z)^3(1+z)^2}dz =$$

יש לנו בעיית אנליטיות בשתי נקודות: $z=\pm 1$

ולכן, ע"י שימוש משפט קושי, נפרק את האינטגרל לשני אינטגרלים על שני עקומים בתוך התחום $|z|=3$, ונקבל:

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(1-z)^3(1+z)^2}dz = \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{(1+z)^2}dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{(1+z)^2}}{(1-z)^3}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{1!}\left(\frac{e^z}{(1-z)^3}\right)'\Bigg|_{z=-1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{e^z}{(1+z)^2}\right)''\Bigg|_{z=1}\right)$$

$$= 2\pi i\left[\left(\frac{e^z(1-z)^3+3e^z(1-z)^2}{(1-z)^6}\right)\Bigg|_{z=-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^z z(1+z)-6ze^{2z}}{1+z}\right)\Bigg|_{z=1}\right] = \ldots = -e\pi i+\frac{5\pi i}{8e}$$

<u>סעיף ז</u>

$$\int_{|z|=3} \frac{z+\bar{z}}{z+2} dz = \int_{|z|=3} \frac{z}{z+2} dz + \int_{|z|=3} \frac{\bar{z}}{z+2} dz$$

נטפל בכל אינטגרל בנפרד.

יש לנו בעיית אנליטיות ב: $z=-2$

ולכן, ע"י שימוש משפט קושי, נפרק את האינטגרל לשני אינטגרלים על שני עקומים בתוך התחום $|z|=3$, ונקבל:

$$\int_{|z|=3} \frac{z}{z+2} dz = 2\pi i(-2) = -4\pi i$$

בקשר לאינטגרל השני, נבחר פרמטריזציה:

$\begin{cases} z(t) = 3e^{it} \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$. נקבל $dz = 3ie^{it}dt$.

$$\int_{|z|=3} \frac{\bar{z}}{z+2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{3e^{-it}}{3e^{it}+2} 3ie^{it} dt = 9i \int_0^{2\pi} \frac{e^{-it}}{3+2e^{-it}} dt = \left[-\frac{9}{2}\left[\ln\left(3+2e^{-it}\right)\right]\right]_0^{2\pi} = 0$$

ולסיכום:

$$\int_{|z|=3} \frac{z+\bar{z}}{z+2} dz = -4\pi i$$

<u>שאלה 5</u>

מגדיר פונקציה: $g(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$

נראה ש $g(z)$ רציפה ב $z=0$ ע"פ כלל הסנדביץ':

$0 \le |f(z)| = |g(z)| \le |z| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$. כלומר $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} g(z) = 0$.

לכן $g(z)$ רציפה.

נראה שהאינטגרל של $g(z)$ על כל מסלול סגור γ בעיגול היחידה מתאפס ע"י חלוקת סוגי המסלולים למקרים:

1. מסלול שאינו מקיף את הראשית:
   בתחום זה, $g(z)=f(z)$ ולכן $\int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = 0$ כי $f(z)$ אנליטית התחום – נתון.

2. מסלול המקיף את הראשית:
   נבחר עיגול $|z|=\varepsilon$, נשאיף את ε ל 0, ונקבל:

$$0 \le \left| \int_{|z|=\varepsilon} f(z)dz \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangle} \\ \text{inequilty}}}{\le} \int_{|z|=\varepsilon} |f(z)|dz \underset{\substack{\uparrow \\ |f(z)|\le|z|}}{\le} \int_{|z|=\varepsilon} |z|dz = \int_{|z|=\varepsilon} \varepsilon dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{|z|=\varepsilon} 0dz = 0$$

   מחוקי אינטגרציה פשוטים, אם $\left| \int_{|z|=\varepsilon} f(z)dz \right| = 0$ אז $\int_{|z|=\varepsilon} f(z)dz = 0$

   הראנו שגם אינטגרציה על מסלול שמקיף את הראשית תיתן 0.

כלומר, האינטגרל של $g(z)$ על כל מסלול סגור γ בעיגול היחידה מתאפס ולכן ע"פ משפט מוררה, הפונקציה $g(z)$ אנליטית בכל עיגול היחידה.

גליון 4

שאלה 1

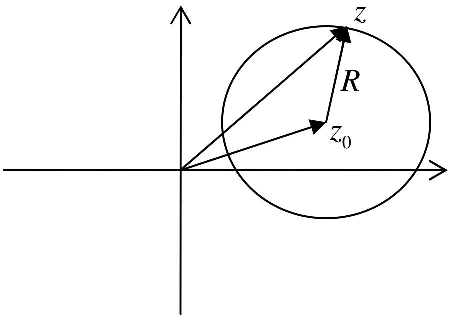
יהיו $f(z)$ פונקציה שלמה ו q מספר ממשי חיובי. ידוע כי f מקיימת את התנאי הבא: $|f(z)| \le M|z|^q$ לכל $|z|>1$.
הוכח כי f פולינום וקבע מה היא דרגתו המקסימלית.

פתרון:

$f(z)$ שלמה. נבחר $n = \lfloor q \rfloor + 1$ ולכן $f^{(n+1)}(z)$ קיימת ושלמה. נוסחת קושי: $f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}dz$

כאשר $\Gamma = \{z \mid |z-z_0| = R\}$.

$$\left|f^{(n+1)}(z_0)\right| = \left|\frac{(n+1)!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}dz\right| \le \frac{(n+1)!}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\right|dz \le \frac{(n+1)!}{2\pi}\left(\max_{\Gamma}\frac{|f(z)|}{\left|(z-z_0)^{n+2}\right|}\cdot 2\pi R\right)$$
$$= (n+1)!R\cdot\max_{\Gamma}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+2}}$$



כעת, על פי אי-שיוויון המשולש: $|z| \le \left|R-|z_0|\right|$

ולכן עבור R גדול מספיק, $|z| \le R-|z_0|$

ולכן, לפי הנתון, עבור $|z|>1$ מתקיים:

$$\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+2}} \le \frac{M|z|^q}{R^{n+2}}$$

ומכיוון ש $n>q$:

$$\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+2}} \le \frac{M|z|^q}{R^{n+2}} \le \frac{M|z|^n}{R^{n+2}} \le \frac{M\left(R-|z_0|\right)^n}{R^{n+2}}$$

הנוסחה נכונה לכל R כי $f(z)$ שלמה, ולכן:

$$\left|f^{(n+1)}(z_0)\right| = R(n+1)!\cdot\max_{\Gamma}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+2}} \le R(n+1)!\cdot\frac{M\left(R-|z_0|\right)^n}{R^{n+2}} = (n+1)!\frac{M\left(R-|z_0|\right)^n}{R^{n+1}}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

לכן, $f^{(n+1)}(z)=0$, לכל $|z|>1$.

לכן $f^{(n)}(z)=a_n$ (a_n קבוע), ולאחר n אינטגרציות, רואים כי $\boxed{f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1q+a_0}$

כלומר, $f(z)$ פולינום שדרגתו המכסימלית היא $n=\lfloor q \rfloor$

שאלה 2

א. מצא את קבוצת כל הפונקציות השלמות המקיימות $\left|f(z)\right| \le 3\left|4-z\right|$ לכל z.

פתרון:

f שלמה ולכן מקיימת את נוסחת קושי לנגזרת מסדר k: $f^{(k)}(z_0)=\dfrac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{C_R}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz$

כאשר C_R המעגל $\left|z-z_0\right|=R$.

נעריך את האינטגרל: $\left|f^{(k)}(z_0)\right|=\left|\dfrac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{C_R}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\right|=\left|\dfrac{k!}{2\pi i}\right|\left|\oint\limits_{C_R}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\right|\le\dfrac{k!}{2\pi}\oint\limits_{C_R}\left|\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right|dz$

ע"פ משפט הערכת האינטגרל לפי מסלול האינטגרציה:

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right|\le\frac{k!}{2\pi}\oint\limits_{C_R}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right|dz\le\frac{k!}{2\pi}\cdot L\cdot\max_{|z-z_0|=R}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right|=\frac{k!}{2\pi}\cdot2\pi R\cdot\max_{|z-z_0|=R}\frac{\left|f(z)\right|}{R^{k+1}}$$

ומהנתון $\left|f(z)\right|\le3\left|4-z\right|$ נקבל:

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right|\le k!R\cdot\max_{|z-z_0|=R}\frac{\left|f(z)\right|}{R^{k+1}}\le k!R\cdot\max_{|z-z_0|=R|}\frac{3\left|4-z\right|}{R^{k+1}}$$

ועל-גבי המעגל $\left|z-z_0\right|=R$ מתקיים $R=\left|z-z_0\right|\ge\left\|z\right|-\left|-z_0\right\|=\left|z\right|-\left|z_0\right|$

ולכן $\left|4-z\right|\le\left|4\right|+\left|-z\right|=4+\left|z\right|\le4+R+\left|z_0\right|$.

וכאשר $k\ge2$:

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right|\le k!R\cdot\max_{|z-z_0|=R}\frac{3\left|4-z\right|}{R^{k+1}}=k!R\frac{3\left(4+R+\left|z_0\right|\right)}{R^{k+1}}=k!\frac{4R+R^2+\left|z_0\right|R}{R^{k+1}}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

מכיוון ש $f''(z_0)=0$ לכל z_0, אז $f''(z)\equiv0$ ולכן $f'(z)=a$ ואז $\boxed{f(z)=az+b}$.

וגם:

$$\left|f(0)\right|=\left|b\right|\le3\left|4-0\right|=12\qquad\Rightarrow\qquad\left|b\right|\le12$$

$$\left|f(4)\right|=\left|4a+b\right|\le3\left|4-4\right|=0\ \Rightarrow\qquad f(4)=0\ \Rightarrow\ 4a+b=0\ \Rightarrow\ \left|a\right|=\frac{\left|-b\right|}{4}\le3$$

כלומר $\boxed{\left|b\right|\le12}$ ו $\boxed{\left|a\right|\le3}$.

ב. מצא את כל הפונקציות השלמות f המקיימות $\left|f\right|\ge1$ בכל $\mathbb{C}$.

פתרון:

נגדיר פונקציה $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}>0$ שלמה כהרכבת שלמות, ומשום ש $\left|f(z)\right|\ge1$ ולכן המכנה לא מתאפס בשום נקודה.

מהנתון $\left|f(z)\right|\ge1$ מתקיים: $\left|g(z)\right|=\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|=\dfrac{1}{\left|f(z)\right|}\le\dfrac{1}{1}=1$.

מכיוון ש $g(z)$ שלמה וחסומה, $g(z)$ קבועה. נסמן $g\equiv c>0$.

נקבל: $\dfrac{1}{f(z)}\equiv c$ ומכאן ש $f(z)\equiv\dfrac{1}{c}$, כלומר $\boxed{f(z)\ \text{קבועה}}$.

<u>שאלה 3</u>

מצא את כל הפתוחים האפשריים לטורי טיילור ולורן ב 0, וקבע מהו תחום ההתכנסות של הטורים הללו

א. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)^2}$

יש לנו עסק עם שתי נקודות סינגולריות: $z=0$ ו $z=2$. נפתח לטורים בשני תחומים שונים:

פיתוח לטור לורן בתחום $0<|z|<2$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}=-\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{z-2}\right]'=\frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{2-z}\right]'=\frac{1}{2z}\cdot\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)}\right]'$$

ידוע ש $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\dfrac{1}{1-q}$ (ונשתמש בעובדה זו לאורך כל שאלה 3) ולכן:

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]'=\frac{1}{2z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z^n}{2^n}\right]'=\frac{1}{2z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{z^{n-1}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{z^{n-2}}{2^{n+1}}$$

פיתוח לטור לורן בתחום $|z|>2$:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)^2}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z-2}\right]'=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z}\right)}\right]'=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right]'=\frac{1}{z}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\right]'$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}-(n+1)\frac{2^n}{z^{n+2}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{z^{n+3}}$$

ב. $f(z)=(z-1)e^{z^{-3}}$

יש כאן נקודה סינגולרית יחידה: $z=0$

$$f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z^3}}=ze^{\frac{1}{z^3}}-e^{\frac{1}{z^3}}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z^3}\right)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z^3}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{3n-1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{3n}}$$

$$=(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z^3}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)}{n!z^{3n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!z^{3n-1}}-\frac{1}{n!z^{3n}}\right)$$

ג. $f(z)=\dfrac{z^2}{(a+z)^2}$, כאשר $a\in\mathbb{C}$.

יש נקודת סינגולריות יחידה ב $z=a$. נפתח בתחום $|z|<|a|$:

$$f(z)=\frac{z^2}{(a+z)^2}=z^2\left[-\frac{1}{a+z}\right]'=z^2\left[\frac{1}{-a-z}\right]'=z^2\left[\frac{1}{-a}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z}{-a}\right)}\right]'=-\frac{z^2}{a}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z}{-a}\right)}\right]'$$

$$=-\frac{z^2}{a}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z}{-a}\right)}\right]'=-\frac{z^2}{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{a^n}\right)'=-\frac{z^2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^n\frac{z^{n-1}}{a^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^n\frac{z^{n+1}}{a^{n+1}}$$

כעת, בתחום $|a|<|z|$:

$$f(z)=\frac{z^2}{(a+z)^2}=-z^2\left[\frac{1}{a+z}\right]'=-z^2\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{z}}\right]'=-z^2\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{a}{z}\right)}\right]'=-\frac{z^2}{a}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z}{-a}\right)}\right]'$$

$$=-z^2\left[\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{z}\right)^n\right]'=-z^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^n z^{-(n+1)}\right]'=z^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n\frac{a^n}{z^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n\frac{a^n}{z^n}$$

ד. $f(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}$

באופן כללי: $f(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{(z+2)(z+1)}=\frac{2}{2+z}-\frac{1}{1+z}$

יש לנו שתי נקודות סינגולריות: $z=-1$ ו $z=-2$.

כלומר נצתרך לפתח 3 טורים שונים, עבור התחומים הבאים: $|z|<1$, $1<|z|<2$ ו $|z|>2$.

כאשר $|z|<1$: (גם $\left|\frac{z}{2}\right|<1$)

$$f(z)=\frac{2}{2+z}-\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n z^n\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\right]$$

כאשר $1<|z|<2$:

$$f(z)=\frac{2}{2+z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

כאשר $|z|>2$:

$$f(z)=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

כל התחומים המצויינים בסעיפים אלו הם תחומי התכנסות הטורים הרלוונטיים.

שאלה 4

מצא את החלק העיקרי (חלק עם חזקות שליליות) של טור לורן שמתכנס בסביבת נקודה $z=-\pi$ של הפונקציה $z^{-2}\sin^{-2}z$.

פתרון:

$f(z)=\frac{1}{z^2\sin^2 z}$, אנליטית מלבד נקודות סינגולריות בדידות.

נביט בפונקציה $g(z)=\frac{1}{f(z)}=z^2\sin^2 z$.

$g(z)$ אנליטית והיא מכפלה של שתי פונקציות:

א. הפונקציה z^2 : פונקציה זו לא מתאפסת ב $z=-\pi$ ולכן אין ל z^2 אפס בנקודה $z=-\pi$.

ב. הפונקציה $\sin^2 z$: $\sin z$ מתאפסת ב $z=-\pi$, ונגזרת לא, ולכן ל $\sin z$ אפס פשוט ב $z=-\pi$. לכן ל $\sin^2 z$ אפס מסדר 2 ב $z=-\pi$.

כלומר, לפונקציה $g(z)=z^2\sin^2 z$ יש אפס מסדר 2 בנקודה $z=-\pi$. ולכן ל $f(z)=\frac{1}{g(z)}$ יש קוטב מסדר 2 בנקודה $z=-\pi$. כלומר, יש שני איברים, לכל היותר, בחלק העיקרי של פיתוח $f(z)$ לטור לורן.

ולכן נוכל לכתוב את $f(z)$ כך: $f(z)=\frac{a_{-2}}{(z+\pi)^2}+\frac{a_{-1}}{z+\pi}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+\pi)^n$

נפתח את z^2 לטור סביב $z=-\pi$: $z^2=(z+\pi-\pi)^2=(z+\pi)^2-2\pi(z+\pi)+\pi^2$

נפתח את $g(z)$ לטור סביב $z=-\pi$:

$$g(z)=z^2\sin^2 z=z^2\left(\frac{1-\cos(2z)}{2}\right)=\frac{1}{2}z^2\left[1-\cos(2z+2\pi)\right]=z^2\left[1-\cos(2(z+\pi))\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(z+\pi)^2-2\pi(z+\pi)+\pi^2\right]\left[1-\left(1-\frac{2^2(z+\pi)^2}{2!}+\frac{2^4(z+\pi)^4}{4!}-\frac{2^6(z+\pi)^6}{6!}+\dots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(z+\pi)^2-2\pi(z+\pi)+\pi^2\right]\left[\frac{2^2(z+\pi)^2}{2!}-\frac{2^4(z+\pi)^4}{4!}+\frac{2^6(z+\pi)^6}{6!}-\dots\right]$$

מהגדרת $g(z)$ נובע ש $g(z)\cdot f(z)=1$. כלומר:

$$\frac{1}{2}\left[(z+\pi)^2-2\pi(z+\pi)+\pi^2\right]\left[2(z+\pi)^2-\frac{2}{3}(z+\pi)^4+\dots\right]\cdot\left[\frac{a_{-1}}{z+\pi}+\frac{a_{-2}}{(z+\pi)^2}+\dots\right]=1$$

$$\left[(z+\pi)^2-2\pi(z+\pi)+\pi^2\right]\left[(z+\pi)^2-\frac{1}{3}(z+\pi)^4+\dots\right]\cdot\left[\frac{a_{-1}}{z+\pi}+\frac{a_{-2}}{(z+\pi)^2}+\dots\right]=1$$

$$a_{-1}(z+\pi)\left[(z+\pi)^2-2\pi(z+\pi)+\pi^2\right]+a_{-2}\left[(z+\pi)^2-2\pi(z+\pi)+\pi^2\right]+\dots=1$$

$$\left[\pi^2a_{-1}-2\pi a_{-2}\right](z+\pi)+a_{-2}\pi^2+\dots=1$$

נוכל לבצע השוואת מקדמים בין הפולינומים הרשומים בשני צידי השיוויון, ולכן:

$(z+\pi)^0:\quad a_{-2}\pi^2=1$

$(z+\pi)^1:\quad \pi^2a_{-1}-2\pi a_{-2}=0$

מכאן נקבל: $a_{-2}=\frac{1}{\pi^2}$ ו $a_{-1}=-\frac{2}{\pi^3}$

כלומר, החלק העיקרי של $z^{-2}\sin^{-2}z$ שמתכנס בסביבות $z=-\pi$ הוא $\boxed{\frac{1}{\pi^2(z+\pi)^2}-\frac{2}{\pi^3(z+\pi)}}$.

גליון 5

שאלה 1

מצא את כל הנקודות הסינגולריות של הפונקציה: $f\left(z\right)=\frac{1}{\sin z}+\frac{\pi^2}{z\left(4z-\pi^2\right)}+\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$, ומיין אותן.

פתרון

$f\left(z\right)$ מורכבת משלושה מחוברים, ולכן נקודה סינגולרית של אחד המחוברים תתן נקודה סינגולרית של $f\left(z\right)$, כאשר נסכם בסוף בזהירות את הנתונים על כל נקודה. נבחן כל מחובר בנפרד:

א. $\frac{1}{\sin z}$: נבדוק את האפסים של $\sin z$: $\sin z=0$ כאשר $z=\pi k$ כש $k\in\mathbb{Z}$.

$\left(\sin z\right)'=\cos z$ ו $\cos\left(z=\pi k\right)\neq 0$ לכל $k\in\mathbb{Z}$.

לכן נסיק של $\sin z$ אפס פשוט בנקודות $z=\pi k$ כש $k\in\mathbb{Z}$, ולכן ל $\frac{1}{\sin z}$ קטבים פשוטים באותן נקודות.

ב. $\frac{\pi^2}{z\left(4z^2-\pi^2\right)}$: נחפש אפסים של המכנה: $z\left(4z^2-\pi^2\right)=z\left(2z-\pi\right)\left(2z+\pi\right)$. האפסים מתקביל כאשר $z=0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$. נבדוק את נגזרת המכנה: $\left[z\left(4z^2-\pi^2\right)\right]'=12z^2-\pi^2$. נגזרת המכנה לא מתאפסת באף נקודה סינגולרית שמצאנו, כלומר שלושת הנקודות $z=0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$ הן אפסים פשוטים של $z\left(4z^2-\pi^2\right)$ ולכן הם קטבים פשוטים של $\frac{\pi^2}{z\left(4z^2-\pi^2\right)}$.

ג. $\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$: ראשית, ניתן להבחין שיש נקודה סינגולרית ב $z=0$. מכיוון שהגבול $\lim\limits_{z\to 0}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ לא קיים, גם $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$, ולכן $z=0$ נקודה סינגלרית עיקרית.

שנית, נבדוק היכן המכנה מתאפס: $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ כאשר $\frac{1}{z}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, או $z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$

נגזור את המכנה: $\left[\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right]'=\frac{1}{z^2}\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. נגזרת המכנה לא מתאפסת ב $z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}$

לכן נסיק שלביטוי $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ אפסים פשוטים ב $z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$.

ולכן ל $\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$ קטבים פשוטים באותן נקודות.

כעת ניתן לראות שקיימת סדרה של נקודות סינגולריות: $z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, ולכן ב $z=0$ יש נקודת סינגולריות לא מבודדת.

סיכום:

- בנקודות $z=\pi k$, כש $0\neq k\in\mathbb{Z}$, נקודות סינגולריות מסוג קוטב פשוט.
- בנקודות $z=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$ יש נקודות סינגולריות מסוג קוטב פשוט.
- בנקודות $z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}$, $n\in\mathbb{Z}$ יש נקודות סינגולריות מסוג קוטב פשוט.
- בנקודה $z=0$ יש נקודה סינגולרית לא מבודדת.

שאלה 2

מהו סדר האפס של הפונקציה $f(z)=\frac{\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\cos z\right)^4}{z^6}$, בנקודה $z=0$?

פתרון

קל לראות ש $f(z)$ לא מוגדרת ב $z=0$, ולכן אין טעם כלל לשאלה מהו סדר האפס בנקודה זו.

נגדיר: $\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ ונמשיך.

נפתח את $\cos z$ לטור טיילור סביב $z=0$:

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+-\ldots$$

ולכן:

$$f(z)=\frac{\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\cos z\right)^4}{z^6}=\frac{\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+-\ldots\right)\right)^4}{z^6}=$$

$$=\frac{\left(\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\ldots\right)^4}{z^6}=\frac{\left(\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\ldots\right)\left(\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\ldots\right)\left(\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\ldots\right)\left(\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\ldots\right)}{z^6}=$$

$$=\frac{\left(\frac{z^6}{6!}\right)^4+\ldots}{z^6}=\frac{z^{18}}{(6!)^4}+\ldots$$

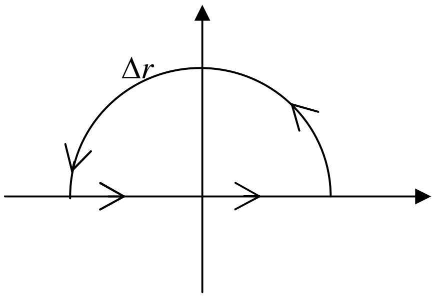
לפי ההתחלה של פיתוח טיילור שמצאנו, ניתן לכתוב את $\tilde{f}(z)$ כך: $z^{18}\left(\frac{1}{(6!)^4}+\ldots\right)$

ולכן $\boxed{\text{ל } \tilde{f}(z) \text{ אפס מספר } 18 \text{ בנקודה } z=0}$.

<u>שאלה 3</u>

השתמש במשפט השארית וחשב את האינטגרלים הבאים:

<u>סעיף א:</u> $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)(x^2+36)}$. פתרון:



נסתכל על האינטגרל $I(r)=\oint_{\Gamma_r}\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}$, כאשר Γ_r קונטור המורכב מחצי מעגל ברדיוס r, נסמן אותו ב Δr ומקוטר המעגל המתאים.

נחלק את $I(r)$ לשניים:

$$I(r)=\oint_{\Delta r}\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}+\int_{-r}^{r}\frac{x^2dx}{(x^2+4)(x^2+36)}.$$

ומצד שני נוכל לחשב את האינטגרל עפ"י משפט השארית:

$$I(r)=\oint_{\Gamma_r}\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}=2\pi i\sum_n\operatorname{Res}(z_n).$$

לשם כך, נמצא את נקודות הסינגולריות מסוג קטבים של האינטגרנד:

$$\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+36)}=\frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)(z+6i)(z-6i)}.$$

כלומר, בחצי המישור העליון, עבור r מספיק גדול יכללו בתחום האינטגרציה שלנו שתי נקודות קוטב פשוט: $z=2i,6i$.

נחשב אז את האינטגרל:

$$I(r)=\oint_{\Gamma_r}\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}=2\pi i\left(\operatorname{Res}(2i)+\operatorname{Res}(6i)\right)=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z+2i)(z+6i)(z-6i)}+\lim_{z\to 6i}\frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)(z+6i)}\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{-4}{(4i)(8i)(-4i)}+\frac{-36}{(8i)(4i)(12i)}\right)=2\pi i\left(-\frac{1}{32i}+\frac{3}{32i}\right)=\frac{\pi}{8}$$

כעת נראה ש $\oint_{\Delta r}\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}=0$:

$$\left|\oint_{\Delta r}\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}\right|\le\oint_{\Delta r}\left|\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}\right|\le\pi r\cdot\max_{\Delta r}\frac{|z^2|}{|z^2+4||z^2+36|}$$

כעת מאי-שיוויון המשולש: $|z^2+4|\ge\left||z^2|-|4|\right|=|z^2-4|$, ועבור r גדול מספיק: $\left||z^2|-|4|\right|=|z^2-4|$

כנ"ל לגבי $|z^2+36|$. ולכן:

$$\left|\oint_{\Delta r}\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}\right|\le\pi r\cdot\max_{\Delta r}\frac{|z^2|}{|z^2+4||z^2+36|}\le\pi r\frac{r^2}{(r^2-4)(r^2-36)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0.$$

כלומר, קיבלנו ש:

$$I(r)=\oint_{\Delta r}\frac{z^2dz}{(z^2+4)(z^2+36)}+\int_{-r}^{r}\frac{x^2dx}{(x^2+4)(x^2+36)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)(x^2+36)}$$

ומצד שני, $I(r)=\frac{\pi}{8}$, ולכן

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)(x^2+36)}=\frac{\pi}{8}}.$$

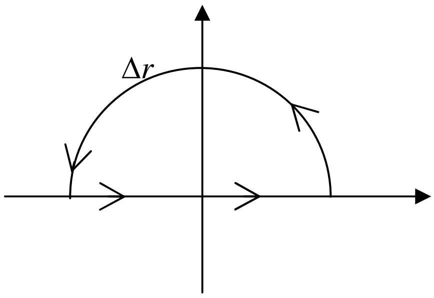
<u>סעיף ב:</u> $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}dx$. פתרון:

נתבונן ב: $f(x)=\frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}$. מתקיים $f(-x)=\frac{-x\sin(-x)}{(-x)^4+4(-x)^2+4}=\frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}=f(x)$, כלומר $f(x)$ פונקציה זוגית, ולכן אם $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}dx$ מתכנס אז גם $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}dx$ מתכנס, ומתקיים

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}dx .$$

נתבונן ב: $f(x)=\frac{x\cos x}{x^4+4x^2+4}$. מתקיים $f(-x)=\frac{-x\cos(-x)}{(-x)^4+4(-x)^2+4}=-\frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}=-f(x)$, כלומר $f(x)$ פונקציה אי-זוגית, ולכן מתקיים

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^4+4x^2+4}dx\equiv\lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^r \frac{x\cos x}{x^4+4x^2+4}dx=0 .$$



נסתכל על האינטגרל $I(r)=\oint\limits_{\Gamma_r}\frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4}dz$, כאשר Γ_r קונטור המורכב מחצי מעגל ברדיוס r , נסמן אותו ב Δr ומקוטר המעגל המתאים.

נחלק את $I(r)$ לשניים:

$$I(r)=\oint\limits_{\Delta r}\frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4}dz+\int\limits_{-r}^r \frac{xe^{ix}}{x^4+4x^2+4}dx$$

$$=\oint\limits_{\Delta r}\frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4}dz+\cancel{\int\limits_{-r}^r \frac{x\cos x}{x^4+4x^2+4}dx}+i\int\limits_{-r}^r \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}dx$$

$$=\oint\limits_{\Delta r}\frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4}dz+i\int\limits_{-r}^r \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4}dx$$

נוכל לחשב את האינטגרל עפ"י משפט השארית:

$$I(r)=\oint\limits_{\Delta r}\frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4}dz=\oint\limits_{\Delta r}\frac{ze^{iz}}{\left(z+\sqrt{2}i\right)^2\left(z-\sqrt{2}i\right)^2}dz=2\pi i\operatorname{Res}\left(\sqrt{2}i\right)$$

כי עבור r גדולים מספיק, אנו תוחמים את נקודת הסינגולריות $z=\sqrt{2}i$, שהיא קוטב מסדר שני.

$$I(r)=2\pi i\operatorname{Res}\left(\sqrt{2}i\right)=2\pi i\cdot\frac{1}{1!}\lim_{z\to\sqrt{2}i}\left(\frac{ze^{iz}}{\left(z+\sqrt{2}i\right)^2}\right)'=2\pi i\lim_{z\to\sqrt{2}i}\frac{e^{iz}\left[(1+iz)\left(z+\sqrt{2}i\right)-2z\right]}{\left(z+\sqrt{2}i\right)^3}$$

$$I(r)=2\pi i\frac{e^{i\sqrt{2}i}\left[\left(1+\sqrt{2}i^2\right)\left(\sqrt{2}i+\sqrt{2}i\right)-2\sqrt{2}i\right]}{\left(\sqrt{2}i+\sqrt{2}i\right)^3}=2\pi i\frac{\left[\left(1-\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i\right]}{e^{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}i\right)^3}=2\pi i\frac{\left[2\sqrt{2}i-4i-2\sqrt{2}i\right]}{-e^{\sqrt{2}}8\sqrt{8}i}$$

$$I(r)=\frac{\pi i}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{8}}$$

נַראה ש $\oint_{\Delta r} \frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4} dz = 0$:

$$\left|\oint_{\Delta r} \frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4} dz\right| \le \oint_{\Delta r} \left|\frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4}\right| dz \le \pi r \cdot \max_{\Delta r} \frac{|z|\left|e^{iz}\right|}{\left|z+\sqrt{2}i\right|^2\left|z-\sqrt{2}i\right|^2}$$

מאי-שיוויון המשולש, ועבור r מספיק גדול, מתקיים: $\left|z+\sqrt{2}i\right| \ge \left||z|-\left|\sqrt{2}i\right|\right| = |z|-\sqrt{2}$, כנ"ל בשביל $\left|z-\sqrt{2}i\right|$.

וכך נקבל:

$$\left|\oint_{\Delta r} \frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4} dz\right| \le \pi r \cdot \max_{\Delta r} \frac{|z|\left|e^{i(x+iy)}\right|}{\left|z+\sqrt{2}i\right|^2\left|z-\sqrt{2}i\right|^2} \le \pi r \frac{r\cdot \max e^{-y}}{\left(r+\sqrt{2}\right)^2\left(r-\sqrt{2}\right)^2}$$

אנחנו על חצי המישור העליון, ולכן $y \ge 0$ ולכן $e^{-y} \le 1$. נמשיך לתחום:

$$\left|\oint_{\Delta r} \frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4} dz\right| \le \pi r \frac{r}{\left(r+\sqrt{2}\right)^2\left(r-\sqrt{2}\right)^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

לסיכום, הראנו ש:

$$I(r) = \oint_{\Delta r} \frac{ze^{iz}}{z^4+4z^2+4} dz + i\int_{-r}^{r} \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4} dx \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4} dx$$

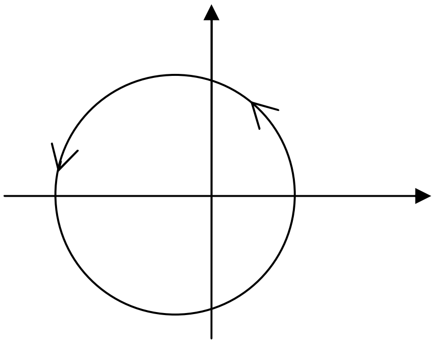
ומצד שני, ש $I(r) = \frac{\pi i}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{8}}$, כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4} dx = \frac{\pi}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{8}}$.

עפ"י הטענה שבתחילת הסעיף: $\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4} dx$

כלומר $\boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+4x^2+4} dx = \frac{\pi}{2e^{\sqrt{2}}\sqrt{8}}}$

<u>סעיף ג:</u> $\oint\limits_{|z+1|=2.5}\frac{dz}{\cos^2\pi z-1}$. פתרון:

נשים לב כי:



$$I=\oint\limits_{|z+1|=2.5}\frac{dz}{\cos^2\pi z-1}=\oint\limits_{|z+1|=2.5}\frac{dz}{\frac{1}{2}\cos 2\pi z-\frac{1}{2}}=\oint\limits_{|z+1|=2.5}\frac{2dz}{\cos 2\pi z-1}$$

נחפש אפסים במכנה האינטגרנד: $\cos 2\pi z=1$ כאשר $2\pi z=2\pi k$, או $z=k$ לכל $k\in\mathbb{Z}$.

נגזרת המכנה היא $-2\pi\sin 2\pi z$ - גם זו מתאפסת באותן נקודות.

נגזרתו השנייה של המכנה היא $-4\pi^2\cos 2\pi z$ וזו לא מתאפסת בנקודות אלו.

לכן, האינטגרנד שלנו אנליטי חוץ מהנקודות $z=k$ לכל $k\in\mathbb{Z}$, בהן יש לו קוטב מסדר שני.

בתוך המסלול שלנו, נמצאות נקודות הקוטב הללו: $z=-3,-2,-1,0,1$, ולכן, ע"פ משפט השארית:

$$\oint\limits_{|z+1|=2.5}\frac{2dz}{\cos 2\pi z-1}=2\pi i\left(\text{Res}(-3)+\text{Res}(-2)+\text{Res}(-1)+\text{Res}(0)+\text{Res}(1)\right)$$

נביט בפונקציה $f(z)=\frac{2}{\cos 2\pi z-1}$. ע"פ משפט, $\text{Res}(f(z),z_0)=a_{-1}$, כאשר a_{-1} מקדם לורן של $(z-z_0)^{-1}$ בפיתוח $f(z)$ סביב z_0, כאשר ל $f(z)$ קוטב מסדר m ב z_0.

נפתח את $\frac{1}{2}(\cos 2\pi z-1)$ $g(z)\equiv\frac{1}{f(z)}=$ לטור סביב $z=a\in\mathbb{Z}$:

$$g(z)=\frac{1}{2}(\cos 2\pi z-1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2\pi(z+a))^2}{2!}+\frac{(2\pi(z+a))^4}{4!}-....-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\pi^2(z+a)^2+\frac{2}{3}\pi^4(z+a)^4-....\right)$$

אנו יודעים של $f(z)$ קוטב מסדר שני ב $z=a\in\mathbb{Z}$, ולכן נכתוב את $f(z)$ כך:

$$f(z)=a_{-2}(z-a)^{-2}+a_{-1}(z-a)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

מהגדרת $g(z)$ נובע ש $f(z)\cdot g(z)\equiv 1$.

ולכן:

$$f(z)\cdot g(z)=\left[a_{-2}(z-a)^{-2}+a_{-1}(z-a)^{-1}+...\right]\cdot\left[\pi^2(z+a)^2+\frac{1}{3}\pi^4(z+a)^4-....\right]=1$$

$$a_{-2}\pi^2+a_{-1}\pi^2(z-a)+...=1$$

ולכן, מהשוואת מקדמים בין שני אגפי השיוויון נקבל ש:

$$a_{-1}=0$$

$$a_{-2}=\frac{1}{\pi^2}$$

ללא תלות ב a.

ולכן:

$$\oint\limits_{|z+1|=2.5}\frac{2dz}{\cos 2\pi z-1}=2\pi i\left(\text{Res}(-3)+\text{Res}(-2)+\text{Res}(-1)+\text{Res}(0)+\text{Res}(1)\right)=2\pi i(0)$$

לסיכום: $\boxed{\oint\limits_{|z+1|=2.5}\frac{dz}{\cos^2\pi z-1}=0}$

שאלה 4

חשב את האינטגרלים הבאים:

סעיף א: $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^4}$. פתרון:

נחפש נקודות סינגולריות של המכנה של האינטגרנד ונחשב באמצעות משפט השארית:

$$z^4+1=0$$

$$z=\sqrt[4]{(\cos\pi+i\sin\pi)}=\left[\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right]_{k=0,1,2,3}$$

ולכן: $$\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{\left(z-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\right)\left(z-\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\right)\left(z-\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\right)\left(z-\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\right)}$$

כלומר יש לנו עסק עם 4 נקודות קוטב פשוט בתחומינו, $|z|\le 2$.

ולכן:

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^4}=2\pi i\left(\text{Res}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+\text{Res}\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+\text{Res}\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)+\text{Res}\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\right)$$

$$=2\pi i\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{z\to\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\frac{1}{\left(z+\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}+\\ \lim\limits_{z\to-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\frac{1}{\left(z-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}+\\ \lim\limits_{z\to-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\frac{1}{\left(z-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(z+\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}+\\ \lim\limits_{z\to\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\frac{1}{\left(z-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(z+\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}\end{array}\right]$$

$$=2\pi i\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}\right)\left(i2\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\left(-2\sqrt{2}\right)\left(i2\sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}\right)}+\\ \frac{1}{\left(-2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}\right)\left(-i2\sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\left(-i2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)}\end{array}\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{16\sqrt{2}i(1+i)}+\frac{1}{-16\sqrt{2}i(-1+i)}+\frac{1}{16\sqrt{2}i(-1-i)}+\frac{1}{-16\sqrt{2}i(1-i)}\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{16\sqrt{2}i(1+i)}-\frac{1}{16\sqrt{2}i(1+i)}+\frac{1}{16\sqrt{2}i(1-i)}+-\frac{1}{16\sqrt{2}i(1-i)}\right]$$

$$=0$$

סעיף ב: $\displaystyle\oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)}$ פתרון:

נחפש אפסים של המכנה בתחום שנתחם ע"י מסלול האינטגרציה שלנו:

$$z_j = 2+i, 0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}$$

כאשר בנקודות $z_j = 2+i, 0$ הקוטב של האינטגרנד הוא מסדר שני, ובשאר הנקודות, הקוטב הוא מסדר ראשון.

נוכל לחשב את האינטגרל ע"י שימוש במשפט השארית:

$$\oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)} = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left(\frac{dz}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)}, z_j\right)$$

$$= 2\pi i \left(\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{dz}{(z-2-i)^2 \cos(2\pi z)}\right)' + \lim\limits_{x\to 2+i}\left(\frac{dz}{z^2 \cos(2\pi z)}\right)' + \lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}} \frac{\left(z+\frac{1}{4}\right)dz}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)} \\ +\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}} \frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)}dz + \lim\limits_{x\to \frac{3}{4}} \frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)}dz \\ +\lim\limits_{x\to \frac{5}{4}} \frac{\left(z-\frac{5}{4}\right)}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)}dz + \lim\limits_{x\to \frac{7}{4}} \frac{\left(z-\frac{7}{4}\right)}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)}dz \\ +\lim\limits_{x\to \frac{9}{4}} \frac{\left(z-\frac{9}{4}\right)}{(z-2-i)^2 z^2 \cos(2\pi z)}dz \end{array} \right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{2}{(2+i)^3} - \frac{3}{2\pi \cos^4(2+\mathrm{i})} + 0+0+0+0+0\right) = \ldots \cong \frac{2}{100}(1-i)$$

<u>שאלה 5</u>

כמה אפסים יש לפולינום $f(z)=z^5-8z+2$ בתחומים הבאים:

א. $|z|<1$:

נבחר $g(z)=-8z$ ו $h(z)=z^5+2$.

על עיגול היחידה מתקיים:

$$|h(z)|=|z^5+2|\le|z^5|+|2|=|z|^5+2=3$$

$$|g(z)|=|-8z|=8$$

כלומר, על שפת התחום מתקיים $|g(z)|>|h(z)|$, לכן תנאי משפט רושה מתקיימים.

ל $g(z)$ בדיוק אפס אחד בתחום שלנו, והוא ב $z=0$.

לכן, עפ"י משפט רושה, גם ל $f(z)=g(z)+h(z)$ יש אפס אחד.

ב. $1<|z|<2$:

נבחר $g(z)=z^5$ ו $h(z)=-8z+2$.

על שפת העיגול, $|z|=2$, מתקיים:

$$|h(z)|=|-8z+2|\le|-8z|+|2|=18$$

$$|g(z)|=|z^5|=32$$

על שפת העיגול, $|z|=2$, מתקיים $|g(z)|>|h(z)|$, לכן תנאי משפט רושה מתקיימים.

ל $g(z)$ בדיוק חמישה אחד בתחום $|z|<2$, והם ב $z=0$.

לכן, עפ"י משפט רושה, גם ל $f(z)=g(z)+h(z)$ יש חמישה אפסים בתחום זה.

$f(z)$ פולינום ממעלה 5 ולכן יש לו בדיוק 5 אפסים, ולכן כל אפסיו בעיגול $|z|<2$.

אחד מאפסיו, כמו שראינו בסעיף א, נמצא במעגל היחידה. לכן נסיק בתחום $1<|z|<2$ יש ל $f(z)$ ארבע אפסים.