הפתק הסגול

www.technion.co.il

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1מ'

104010

סיכום הקורס

תוכן עניינים

מבוא

זהויות טריגונומטריות

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2} \qquad \sin\theta\cos\varphi = \frac{\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\theta\sin\varphi = \frac{\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\theta\cos\varphi = \frac{\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)}{2}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \qquad \sin 2t = 2\sin t\cos t$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

ערך מוחלט

1. אינטואיציה: מרחק מספר מהראשית. המספר 7 והמספר -7 שניהם מרוחקים 7 יחידות מהראשית, כלומר מהמספר 0.

הגדרה: $|x| \triangleq \begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases} = \max(x,-x)$

הרחבה: מכיוון ש $|x|=|x-0|$ הוא המרחק של x מהמספר 0, אזי $|x-a|$ הוא המרחק של x מהמספר a.

2. תכונות:

א. $|xy|=|x||y| \qquad x\le|x| \qquad |x|=|-x| \qquad \forall x\in\mathbb{R}: \ |x|\ge 0$

ב. $|x-a|<\varepsilon \iff \{x \mid a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$

ג. $0<|x-a|<\varepsilon \iff \{x \mid a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,\ x\ne a\}$

3. $\max(a,b)=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|b-a|}{2}$

4. $\min(a,b)=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{|a-b|}{2}$

פיתוח בינום ניוטון

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}a^{n-i}b^i \triangleq \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

המקדמים $\binom{n}{i}$ יוצרים את "משולש פסקל":

$$\begin{array}{lcl}
n=0: & 1 & \Rightarrow (a+b)^0=1 \\
n=1: & 1\ \ 1 & \Rightarrow (a+b)^1=1a+1b \\
n=2: & 1\ \ 2\ \ 1 & \Rightarrow (a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2 \\
n=3: & 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 & \Rightarrow (a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3 \\
n=4: & 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 & \Rightarrow (a+b)^3=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4
\end{array}$$

הצלעות של משולש פסקל בנויות מהמספר 1, וכל איבר פנימי למשולש הוא סכום שני האיברים שמעליו.

אי שוויון המשולש

$$|x+y|\le|x|+|y| \qquad |x+y|\ge|x|-|y| \qquad |x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$$

אי שוויון הממוצעים

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}_{Harmonic}\le\underbrace{\sqrt{ab}}_{Geometric}\le\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{Arithmetic}\le\underbrace{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}_{Quadric}$$

ובאופן כללי :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}}\le\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

אי שוויון ברנולי

$$\forall x>-1:\begin{cases}(1+x)^n>1+nx\\(1+x)^n>\frac{n(n-1)}{2}x^2\end{cases}$$

חילוק פולינומים

נראה ע"י דוגמא. ניקח את $p(x)=(x+5)^3=x^3+3x^2\cdot5+3x\cdot5^2+5^3=x^3+15x^2+75x+125$ ונחלק אותו ב $q(x)=(x+5)^2=x^2+10x+25$. נצפה לקבל את התוצאה $\frac{p(x)}{q(x)}=x+5$.

נכתוב :

$$x^3+15x^2+75x+125\quad:\qquad x^2+10x+25=$$

נתחיל לחלק את האיבר בעל החזקה הגבוהה ביותר במחולק, $p(x)$, עם האיבר בעל החזקה הגבוהה ביותר במחלק, $q(x)$. כלומר נחלק את x^3 ב x^2 , ונקבל x :

$$x^3+15x^2+75x+125\quad:\qquad x^2+10x+25=x$$

עכשיו נכפול את x בפולינום שבו מחלקים, $q(x)$, ונכתוב את התוצאה מתחת למחולק, $p(x)$:

$$\begin{aligned}&x^3+15x^2+75x+125\quad:\qquad x^2+10x+25=x\\&x^3+10x^2+25x\end{aligned}$$

נחסיר ונקבל פעולת חילוק חדשה, כאשר דרגת המחולק קטנה יותר :

$$\begin{aligned}&x^3+15x^2+75x+125\quad:\qquad x^2+10x+25=x\\&-(x^3+10x^2+25x)\\&=\ 0+5x^2+50x\end{aligned}$$

נמשיך ונחלק את $5x^2$ ב x^2 ונקבל 5 :

$$\begin{aligned}&x^3+15x^2+75x+125\quad:\qquad x^2+10x+25=x+5\\&-(x^3+10x^2+25x)\\&=\ 0+5x^2+50x+125\end{aligned}$$

עכשיו נכפול את 5 בפולינום שבו מחלקים, נכתוב את התוצאה מתחת למחולק :

$$\begin{aligned}&x^3+15x^2+75x+125\quad:\qquad x^2+10x+25=x+5\\&-(x^3+10x^2+25x)\\&=\ 0+5x^2+50x+125\\&-(5x^2+50x+125)\\&=0\end{aligned}$$

קיבלנו 0 , כלומר אין שארית בחלוקה. סיימנו!

קבוצות מספרים

הגדרות – קבוצות של מספרים

1. A חסומה מלעיל אם קיים M כך שלכל $x \in A$, $x \le M$. M חסם מלעיל.
2. A חסומה מלרע אם קיים m כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \ge m$. m חסם מלרע.
3. אם A חסומה מלעיל וגם חסומה מלרע, היא חסומה.
4. אם α הוא החסם מלעיל הקטן ביותר של A, נאמר ש α הוא הסופרימום של A. נסמן $\sup A = \alpha$.
5. אם α הוא החסם מלרע הגדול ביותר של A, נאמר ש α הוא האינפימום של A. נסמן $\inf A = \alpha$.

אקסיומת השלמות: אם $\mathbb{R} \supseteq A \neq \phi$ וחסומה מלעיל, אז יש ל A סופרימום.
מאקסיומה זו נובע גם: אם $\mathbb{R} \supseteq A \neq \phi$ וחסומה מלרע, אז יש ל A אינפימום.

<u>הערות</u>

1. אם ל A יש מקסימום, נאמר x_0, אז בהכרח $\sup A = x_0$.
2. אם ל A יש מינימום, נאמר x_0, אז בהכרח $\inf A = x_0$.

סדרות מספרים

הגדרה – גבול סופי של סדרה

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(\varepsilon)$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$; או:
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N, \ |a_n - L| < \varepsilon$; או:
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$, יש לכל היותר מספר סופי של אברי הסדרה מחוץ לסביבת ε של L.

הערה: הסימון $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ שקול לסימון $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

הגדרות נוספות

1. לסדרה שיש לה גבול קוראים סדרה מתכנסת; אחרת, הסדרה מתבדרת.
2. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל אם קיים M כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \le M$.
3. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע אם קיים m כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge m$.
4. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם קיים M כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le M$.

משפטים וטענות לגבי סדרות מספרים

1. לסדרה מתכנסת גבול אחד ויחיד.
<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שישנם שני גבולות שונים: $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$. בה"כ נניח $L_1 < L_2$.
יהי $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{2} > 0$. אזי קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$, $L_1 - \varepsilon < a_n < L_1 + \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2}$.
וגם קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$, $\frac{L_1 + L_2}{2} = L_2 - \varepsilon < a_n < L_2 + \varepsilon$.
ולכן עבור $n > \max\{N_1, N_2\}$, נקבל $\frac{L_1 + L_2}{2} < a_n < \frac{L_1 + L_2}{2}$. סתירה.
2. אם סדרה מתכנסת אז היא חסומה. ולכן אם סדרה לא חסומה, היא לא יכולה להתכנס.
<u>הוכחה</u>: נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. נבחר $\varepsilon = 1$, ואז מחוץ לקטע $(L-1, L+1)$ יש לכל היותר מספר סופי של אברי הסדרה. נניח שמחוץ לקטע הנ"ל נמצאים האיברים $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}$ ואז המספרים $M = \max\{L+1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}\}$ ו $m = \min\{L-1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}\}$ הם החסמים לסדרה.
(הערה: לא כל סדרה חסומה מתכנסת! לדוגמה $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$)

3. אם סדרה מתכנסת, אז כל סדרה שמתקבלת ממנה ע"י מחיקה או הוספה של מספר סופי של איברים תתכנס, ולאותו גבול של הסדרה המקורית.

אריתמטיקה של גבולות

אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ ו $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B$, אזי:

א. $a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \pm B$

<u>הוכחה:</u>

ראשית, לכל $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ קיים N_1 עבורו לכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

וגם, לכל $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ קיים N_2 עבורו לכל $n > N_2$ מתקיים $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|(a_n + b_n) - (L + M)\right| = \left|(a_n - L) + (b_n - M)\right|$$

ומאי-שיוויון המשולש: $\left|(a_n - L) + (b_n - M)\right| \le \left|(a_n - L)\right| + \left|(b_n - M)\right|$

שתי הסדרות מתכנסות ולכן עבור $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$

יתקיים $\left|(a_n - L)\right| + \left|(b_n - M)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

ב. $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} AB$

ג. אם $B \ne 0$ אז $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{A}{B}$

משפטים נוספים לגבי סדרות מספרים

1. משפט הסנדביץ'

אם קיים N_0 כל שלכל $n > N_0$ מתקיים $b_n \le a_n \le c_n$ ואם $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

<u>הוכחה:</u>

ע"פ הגדרת הגבול, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$

וקיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$ ולכן, לכל $n > N_3 = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ יתקיים

אי השווין $L - \varepsilon < b_n \le a_n \le c_n < L + \varepsilon$.

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אם"ם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

<u>הוכחה:</u> בהינתן $\varepsilon > 0$, קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$, $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$.

אי השוויון האחרון מתקיים אם"ם $\left||a_n| - 0\right| = |a_n| < \varepsilon$, ולכן לאותו N_0 נקבל גם ש $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

3. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ו b_n חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

<u>הוכחה:</u> בהינתן $\frac{\varepsilon}{M} > 0$, קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$, $|a_n| < \varepsilon$. b_n חסומה ולכן קיים $M > 0$ כך ש $|b_n| < M$ ולכן לכל $n > N_0$ מתקיים $|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < |a_n| M < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$.

4. אם $a_n \ge 0$ לכל n, וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז $L \ge 0$. (זהירות: אם $a_n > 0$ יכול להיות $L = 0$)

<u>רעיון ההוכחה:</u> מניחים בשלילה ש $L < 0$ וע"פ הגדרה מקבלים בסתירה שקיימים אברי סידרה שליליים.

5. אם $a_n \le b_n$ לכל n וקיימים $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ אזי $L \le M$. שים לב ש $a_n < b_n$ לא גורר $L < M$.

<u>רעיון ההוכחה:</u> מגדירים סדרה $c_n = b_n - a_n$ ומשתמשים באריתמטיקה של גבולות ובמשפט הקודם.

הגדרה – גבול אינסופי של סדרה

1. נאמר ש $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם לכל $M>0$ קיים $N=N(M)$ טבעי כך שלכל $n>N$, $a_n > M$.
2. נאמר ש $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אם לכל $M>0$ קיים $N=N(M)$ טבעי כך ש: $\forall n>N:\ a_n < -M$

הגדרה – התכנסות סדרה במובן הרחב

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב פירושו: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$; או $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; או $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

אריתמטיקה של גבולות במובן ברחב

1. רוב הזמן האינטואיציה נכונה:

א. אם $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אז $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ב. אם $a_n, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אז $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ וגם $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

2. זהירות! אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אין תמיד חוקים ברורים!

א. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ וגם $a_n > 0$ לכל $n > N_0$ אז $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

ב. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ וגם $a_n < 0$ לכל $n > N_0$ אז $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

3. אין כללים במקרים הללו (כתיב לא פורמאלי):

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ a_n^{\,b_n},\ \infty^0,\ 0^0,\ (\to 1)^{\infty}$$

הגדרות נוספות לגבי סדרות

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תקרא:

1. עולה אם $\forall n:\ a_{n+1} \ge a_n$
2. עולה ממש אם $\forall n:\ a_{n+1} > a_n$
3. יורדת אם $\forall n:\ a_{n+1} \le a_n$
4. יורדת ממש אם $\forall n:\ a_{n+1} < a_n$
5. מונוטונית אם היא עולה (או עולה ממש) או יורדת (או יורדת ממש)

<u>הערות</u>

1. אם קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים $a_n \ge b_n$, ו $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
2. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה אז לכל $n < m$, $a_n \le a_m$.

משפטים לגבי סדרות

1. כל סדרה מונוטונית ולא חסומה מתכנסת לאינסוף.
<u>רעיון ההוכחה:</u> בה"כ a_n מונוטונית עולה. לכל M, M אינו חסם מלעיל. בעזרת המונוטוניות מראים שכל אברי הסדרה גדולים מ M.

2. סדרה עולה וחסומה מלעיל מתכנסת ל sup שלה.
<u>רעיון ההוכחה:</u> נסמן $M = \sup a_n$ לכל $\varepsilon > 0$, $M-\varepsilon$ אינו חסם מלעיל של הסדרה. ולכן קיים N_0 כך ש $a_{N_0} > M$. מראים שמחוץ לכל ε סביבה של M יש מספר סופי בלבד של אברי הסדרה.

3. סדרה יורדת וחסומה מלרע מתכנסת ל inf שלה.

<u>מסקנה:</u> כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

הגדרה – תת-סדרה

סדרה $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ המתקבלת ממחיקת חלק (סופי או אינסופי) מאיברי הסדרה המקורית $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת תת-סדרה שלה, כאשר n_k הוא האינדקס בסדרה a_n שבו נמצא האיבר ה k בתת הסדרה.

כדי שישמר הסדר, צריך להתקיים $n_{k+1} > n_k$, לכל k, כלומר n_k סדרה עולה ממש של אינדקסים.

<u>משפטים עבור סדרות</u>

1. אם $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב, אז כל ת"ס שלה מתכנסת במובן הרחב, ולאותו גבול.

<u>רעיון ההוכחה</u>: לחלק לשני מקרים: גבול סופי ואינסופי. גבול אינסופי: לכל M, יש לכל היותר מספר סופי של אברי הסדרה הקטנים מ M, ולכן גן מספר סופי של אברי תת-הסדרה.
גבול סופי. בכל סביבת ε של הגבול L יש אינסוף אברי הסדרה, וכך גם עבור אברי תת-הסדרה.

2. הלֶמה של קנטור:

אם $a_n \le b_n$ לכל n ו $\left\{b_n\right\}$ יורדת ו $\left\{a_n\right\}$ עולה ו $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$, אז קיים L כך ש: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

נוסח שקול:

אם $I_n = [a_n, b_n]$ הם קטעים שמקיימים $I_{n+1} \subseteq I_n$ ואם אורכי הקטעים שואפים ל 0, אז קיים x_0 יחיד שנמצא בכל אינסוף הקטעים I_n.

<u>הוכחה</u>: $a_n \le b_n$ ולכן לכל n מתקיים: $a_n < b_1$ וגם $a_1 < b_n$. כלומר a_n וגם b_n חסומות. שתיהן מונוטוניות ולכן מתכנסות. נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. ע"פ הנתון ובעזרת אריתמטיקה של גבולות:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - B = 0$, כלומר $A = B$.

3. לכל סדרה יש ת"ס מונוטונית.

4. משפט בולצאנו-ויירשטראס:

לסדרה חסומה יש ת"ס מתכנסת; לכל סדרה יש ת"ס מתכנסת במובן הרחב.

<u>הוכחה</u>: נניח שלכל n, $m_1 \le a_n \le M_1$. נבחר $n_1 = 1$.

מקרה 1: בקטע $\left[m_1, \dfrac{m_1 + M_1}{2}\right]$ יש אינסוף אברי הסדרה a_n.

מקרה 2: בקטע $\left[\dfrac{m_1 + M_1}{2}, M_1\right]$ יש אינסוף אברי הסדרה a_n.

נבחר את הקטע שבו אינסוף אברי הסדרה ונסמן אותו $[m_2, M_2]$. אורך הקטע $M_2 - m_2 = \dfrac{M_1 - m_1}{2}$.

בקטע זה קיים a_{n_2} שבעבורו $n_2 > n_1$.

נחצה את $[m_2, M_2]$ באותו אופן, ונבחר את חצי הקטע שבו יש אינסוף מאברי הסדרה. נסמן את הקטע $[m_3, M_3]$. אורך הקטע יהיה $M_3 - m_3 = \dfrac{M_1 - m_1}{2^2}$. בקטע זה קיים a_{n_3} שבעבורו $n_3 > n_2$.

נמשיך לחלק כל קטע לשניים.

בקטע $[m_k, M_k]$ יש אינסוף איברים מהם נבחר את $a_{n_{k+1}}$ כך ש $n_{k+1} > n_k$. אורך הקטע:

$M_K - m_k = \dfrac{M_1 - m_1}{2^{k-1}}$.

ולסיכום: $M_{k+1} \le M_k$ וגם $m_k \le m_{k+1}$, וגם $\lim\limits_{k\to\infty}\left(M_K - m_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{M_1 - m_1}{2^{k-1}} = 0$.

ולפי הלמה של קנטור, קיים L כך ש: $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \lim\limits_{k\to\infty} M_k = L$.

בנוסף, לפני בניית תת הסדרה, $m_k \le a_{n_k} \le M_k$ ולכן ע"פ משפט הסנדביץ' $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.

5. אם $a_n \to A$, $b_n \to B$ ו $A<B$ אז קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$, $a_n < b_n$.

6. אם סדרה מונוטונית וחסומה, אזי היא מתכנסת לגבול סופי.

7. אם $L \xrightarrow[n\to\infty]{} a_n$ אז (התכנסות הממוצעים של סזרו):

א. $S_n^{arithmetic} = \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

ב. $S_n^{geometric} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

ג. $S_n^{harmonic} = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

8. מבחן המנה (או השורש): אם $\forall n: a_n > 0$ וגם $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ (או $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$) אז:

ד. אם $L<1$ אז $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ה. אם $L>1$ אז $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

ו. אם $L=1$ אין מסקנה חד משמעית.

9. אם $\forall n: a_n > 0$ אז אם $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ אז $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

מספר	גבולות ידועים	מספר	סדרות שימושיות
1	$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$	1	$\{(-1)^n\}$ חסומה ולא מתכנסת
2	$\forall \lvert q\rvert<1: \quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$	2	$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת ל 0
3	$\forall c>0: \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$	3	$\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\}$ לא מונוטונית אבל מתכנסת ל 0
4	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ובאופן כללי, כאשר $P(n)$ פלינום כלשהו של n : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$	4	$\left\{k+(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\}$ לא מונוטונית אבל מתכנסת ל k
5	לכל סדרה $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{a_n}\right)^{\beta a_n} = e^{\alpha\beta}$	5	$a_n=\{0,1,0,1,0,\dots\}$ ו $b_n=\{1,0,1,0,1,\dots\}$ לא מתכנסות אבל $a_nb_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
6	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a$	6	$a_n=(-1)^n$ ו $b_n=(-1)^{n+1}$ לא מתכנסות אבל $\{a_n+b_n\}$ כן מתכנסת
7	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$	7	$a_n=n$ ו $b_n=2n$ לא מתכנסות וגם סכומן לא
8	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$	8	$a_n=\sin n$ חסומה וְ- $b_n=\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ולכן $a_nb_n=\frac{\sin n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
9	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$	9	$a_n=n\left(1+(-1)^n\right)$ מתבדרת אבל יש לה ת"ס מתכנסת
10	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$	10	$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ ו $b_n=n$ מתכנסות במובן הרחב אבל $a_n \cdot b_n$ לא מתכנסת במובן הרחב.

התכנסויות סכומי ומכפלות סדרות

להלן כללי אצבע להתכנסות סכומים ומכפלות של סדרות

a_n	b_n	התכנסות a_n+b_n	התכנסות $a_n \cdot b_n$
מתכנסת	מתכנסת	תמיד מתכנסת, ע"פ חוקי אריתמטיקה של גבולות.	תמיד מתכנסת, ע"פ חוקי אריתמטיקה של גבולות.
מתכנסת	מתבדרת	תמיד מתבדרת, ההוכחה בשלילה.	יכולה להתכנס אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתבדרת אם $a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (הוכחה בשלילה)
מתבדרת	מתבדרת	יכולה להתכנס או להתבדר	יכולה להתכנס או להתבדר

פונקציות

הגדרות לגבולות של פונקציה

מספר	סימון	הגדרה
1	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$	לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך שלכל $x>M$ מתקיים $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$
2	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$	לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך שלכל $x<M$ מתקיים $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$
3	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x>K$ מתקיים $f(x)>M$
4	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$	לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x>K$ מתקיים $f(x)<-M$
5	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$	לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x<-K$ מתקיים $f(x)>M$
6	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x<-K$ מתקיים $f(x)<-M$
7	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ מתקיים $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$
8	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$	לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$
9	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$	לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$
10	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ מתקיים $f(x)>M$
11	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$	לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים $f(x)>M$
12	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$	לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים $f(x)>M$
13	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$	לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ מתקיים $f(x)<-M$
14	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$	לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים $f(x)<-M$
15	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$	לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים $f(x)<-M$

משפטים עבור גבולות של פונקציה, מקבילים למשפטים בסדרות

1. אם קיים לפונקציה גבול, הוא יחיד.
2. אם קיים $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ אז קיים b כך שבקרן $[b,\infty)$, $f(x)$ חסומה.
3. אריתמטיקה של גבולות: אם $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}A$ ו $g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}B$ אז:
   א. $f(x)\pm g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}A\pm B$
   ב. $f(x)g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}AB$
   ג. אם $B\neq 0$ אז $\dfrac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{}\dfrac{A}{B}$
4. משפט הסנדביץ'.

כל ההוכחות זהות להוכחות בסדרות, או ע"י שימוש במשפטי היינה.

"קצב שאיפה" לאינסוף

$$c<\log_a n<\sqrt{n}<n<n^2<P_{\alpha>2}(n)<\ldots<2^n<e^n<3^n<\ldots<n!<n^n$$

כאשר $P_k(n)$ פולינום מסדר k ב n.

כדאי לזכור / גבולות ידועים

נוסחא	מספר
$\left\|\sin x\right\| \le \left\|x\right\|$	1
$\sin x < x < \tan x \ , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$	2
$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$	3
$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$	4
$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$	5
$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a>1 \\ \infty & 0<a<1 \end{cases}$	6
$\lim_{x\to\infty}\left(\log_a x\right) = \begin{cases} \infty & a>1 \\ -\infty & 0<a<1 \end{cases}$	7
$\lim_{x\to 0^+}\left(\log_a x\right) = \begin{cases} -\infty & a>1 \\ \infty & 0<a<1 \end{cases}$	8
$\forall \alpha > 0: \qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$	9
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ויותר מזה: $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}$	10
$a^b = e^{\ln\left(a^b\right)} = e^{b\ln a}$	11

טענות לגבי גבולות של פונקציות, מקבילות לטענות עבור סדרות

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ אמ"ם $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = 0$.
2. אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ ו $g(x)$ חסומה בסביבה נקובה של x_0 אז $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.
3. אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$ מתקיים $f(x) > \frac{L}{2}$.
4. אם $f(x) \le 0$ בסביבה נקובה של x_0 ואם קיים $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אז $L \le 0$.
5. אם $f(x) \le g(x)$ בסביבה נקובה של x_0 ואם קיימים $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ אז $L \le M$.

משפטים עבור פונקציות

1. אם קיים $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אז יש סביבה נקובה של x_0 שבה f חסומה.
2. אם f עולה וחסומה מלעיל ב (a,b) אז קיים $\lim_{x\to b^-} f(x)$
<u>רעיון ההוכחה</u>: שימוש ישיר בהגדרה והוכחה שהגבול הוא הסופרימום, או הוכחה בשלילה.
3. אם f יורדת וחסומה מלרע ב (a,b) אז קיים $\lim_{x\to b^-} f(x)$
4. אם f עולה וחסומה מלרע ב (a,b) אז קיים $\lim_{x\to a^+} f(x)$
5. אם f מוגדרת בסביבה נקובה של x_0 אז $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אמ"ם $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ וגם $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$
6. אם f מונוטונית ב (a,b) ו $x_0 \in (a,b)$ אז קיימים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ וגם $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

משפטי היינה

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ אם"ם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שבה $x_n \neq x_0$, המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$
2. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ אם"ם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שבה $x_n > x_0$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$
3. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ אם"ם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שבה $x_n < x_0$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

מסקנה מהיינה: אם $x_n \to x_0$ וגם $y_n \to x_0$, וגם $f(x_n) \to A$ ו $f(y_n) \to B$ אז $\lim_{x \to x_0} f(x)$ לא קיים

רציפות של פונקציה

הגדרות

מספר	מושג	הגדרה
1	רציפות	1. תהי f מוגדרת בסביבת x_0, אזי $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ מתקיים $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$ 3. לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$
2	רציפות מימין	תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של x_0, אזי $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
3	רציפות משמאל	תהי f מוגדרת בסביבה שמאלית של x_0, אזי $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
4	רציפות בקטע פתוח	תהי f מוגדרת בקטע (a,b). f רציפה בכל נקודה $c \in (a,b)$.
5	רציפות בקטע סגור	תהי f מוגדרת בקטע $[a,b]$. f רציפה בכל נקודה $c \in (a,b)$, וכן רציפה מימין ב a ורציפה משמאל ב b.

אריתמטיקה של פונקציות רציפות

תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות בנקודה x_0, אזי:

1. $h(x) = f(x) \pm g(x)$ רציפה ב x_0
2. $h(x) = f(x) g(x)$ רציפה ב x_0
3. אם $g(x_0) \neq 0$ אז $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ רציפה ב x_0
4. אם $f(x)$ רציפה ב $g(x_0)$ אז $h(x) = f(x) \circ g(x) = f(g(x))$ רציפה ב x_0 (הרכבה של פונקציות).

סוגי אי-רציפות

1. אי רציפות סליקה:
   אם קיים $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אך $L \neq f(x_0)$ או שאינה מוגדרת ב x_0.

2. אי רציפות מסוג ראשון (קפיצה):
   אם קיימים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ וגם $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, אך הם שונים זה מזה.

3. אי רציפות מסוג שני (עיקרית):
   לפחות אחד משני הגבולות החד-צדדיים אינו קיים.

מסקנה: לפונקציה מונוטונית, כל נקודת אי-רציפות היא מסוג ראשון (קפיצה).

<u>משפט ערך הביניים :</u>
תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ כך ש $f(a)<f(b)$, אז לכל $f(a)<\alpha<f(b)$ קיים $a<c<b$ כך ש $f(c)=\alpha$.

<u>רעיון ההוכחה :</u> חלוקת $[a,b]$ בחצי כל פעם, עד אינסוף ובכך להשתמש בלמה של קנטור.

<u>משפטי ויירשטראס</u>

1. אם f רציפה בקטע $[a,b]$ אז f חסומה בקטע זה.
<u>הוכחה :</u> נניח בשלילה ש f אינה חסומה מלעיל. לכל $n\in\mathbb{N}$, המספר n אינו חסם מלעיל עבור ערכי f בקטע $[a,b]$. לכן לכל n קיימת נקודה $x_n\in[a,b]$ כך ש $f(x_n)>n$. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה כי היא מוכלת בקטע $[a,b]$ ולכן ע"פ משפט בולצאנו-ויירשטראס, יש לה תת סדרה $x_{n_k}\xrightarrow[n_k\to\infty]{}c\in[a,b]$. לכן, מרציפות f , נקבל ש $f(x_{n_k})\xrightarrow[n_k\to\infty]{}f(c)$. מצד שני $f(x_{n_k})>n_k$ כלומר $f(x_{n_k})\xrightarrow[n_k\to\infty]{}\infty$ וזו סתירה .

2. אם f רציפה בקטע $[a,b]$ אז f מקבלת מקסימום ומינימום בקטע זה.

<u>משפטי רציפות</u>

1. אם f רציפה ב $[a,b]$ אז תמונתה, $f([a,b])$, היא קטע סגור.
<u>הוכחה :</u> לפי משפט ויירשטראס, קיים $x_m\in[a,b]$ כך ש $f(x_m)=m=\min\limits_{[a,b]}\{f\}$, וכמו כך קיים $x_M\in[a,b]$ כך ש $f(x_M)=M=\max\limits_{[a,b]}\{f\}$. נפעיל את משפט ערך הביניים על קטע $[x_m,x_M]$ ונראה שכל ערך בין m ל M מתקבל ע"י f , ולכן תמונת $[a,b]$ מכילה את $[m,M]$. כך ערך מחוץ לקטע $[m,M]$ אינו יכול להתקבל ולכן קטע זה הוא תמונת $[a,b]$.

2. המסקנה ההפוכה ל(1) <u>לא</u> נכונה.
3. תהי f מונוטונית ב $[a,b]$, אז f רציפה ב $[a,b]$ אס"ם תמונתה היא קטע.
4. אם f רציפה וחח"ע ב $[a,b]$ אז f מונוטונית ממש ב $[a,b]$.
5. אם f רציפה ומונוטונית ממש ב $[a,b]$ אז היא הפיכה, כלומר $[a,b]\to f^{-1}:[f(a),f(b)]$.

דוגמאות לפונקציות שימושיות

מספר	נוסחא	דוגמא ל ...
1	$f(x)=x-[x]$	פונקציה חסומה ב $[0,1]$ אבל לא מקבלת מקסימום
2	$f(x)=\frac{1}{x}$	פונקציה רציפה בקטע פתוח $(0,1)$ ולא חסומה
3	$f(x)=\sin x$	פונקציה בלי גבול באינסוף (כל פונקציה טריגונומטרית תתאים)
4	$f(x)=\sin\frac{1}{x}$	פונקציה עם נקודת אי רציפות בודדת ב $x=0$
5	$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ -x^2, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$	פונקציה רציפה וגזירה רק ב $x=0$
6	$f(x)=\|x\|$	פונקציה רציפה ב $x=0$ אך לא גזירה שם
7	$f(x)=\|x-a\|+\|x-b\|$	פונקציה רציפה שלא גזירה ב a ו b
8	$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$	פונקצית דיריכלה. חסומה אבל לא אינטגרבילית.

הנגזרת

הגדרות נגזרות

מספר	מושג	הגדרה
1	גזירות	תהי f מוגדרת בסביבת x_0. נאמר ש f גזירה ב x_0 אם קיים $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. ערך הגבול יסומן $f'(x_0)$
2	גזירות מימין	תהי f מוגדרת ב $[x_0,x_0+r)$. נאמר ש f גזירה מימין ב x_0 אם קיים $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. ערך הגבול יסומן $f'_+(x_0)$
3	גזירות משמאל	תהי f מוגדרת ב $(x_0-r,x_0]$. נאמר ש f גזירה משמאל ב x_0 אם קיים $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. ערך הגבול יסומן $f'_-(x_0)$

משפטי גזירות

1. אם f גזירה מימין וגזירה משמאל ב x_0, ו $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$ אז $f'(x_0)=a$.
   <u>רעיון ההוכחה</u>: נובע ישירות מהגדרת הנגזרת והנגזרת החד-צדדית.

2. אם f גזירה ב x_0 אז f רציפה ב x_0
   <u>הוכחה</u>: מכיוון ש f גזירה ב x_0, מתקיים $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, כאשר $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$ ולכן $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x=0+0=0$
   כלומר $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$.

3. אריתמטיקה של נגזרות:
   אם f,g גזירות ב x_0 אז:
   א. $f\pm g$ גזירה ב x_0 ונגזרתה היא: $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$
   ב. fg גזירה ב x_0 ונגזרתה היא: $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
   ג. cf גזירה ב x_0 ונגזרתה היא: $(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$
   ד. אם $g(x_0)\neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ גזירה ונגזרתה היא: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

4. כלל השרשרת:
   אם g גזירה ב x_0 ו f גזירה ב $g(x_0)$ אז:
   $(f\circ g)(x_0)$ גזירה ב x_0 ונגזרתה: $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$

5. תהי f הפיכה ונניח קיימת $f'(x_0)$, אז:
   א. אם $f'(x_0)=0$ אז f^{-1} אינה גזירה ב $f(x_0)$.
   ב. אם $f'(x_0)\neq 0$ אז f^{-1} גזירה ב $f(x_0)$ ונגזרתה: $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

נגזרות ידועות

מספר	פונקציה	טווח	תחום	נגזרת הפונקציה
1	$\cos(x)$	$[-1,1]$	$(-\infty,\infty)$	$-\sin(x)$
2	$\sin(x)$	$[-1,1]$	$(-\infty,\infty)$	$\cos(x)$
3	$\tan(x)$	$(-\infty,\infty)$	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad \forall k\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
4	$\cot(x)$	$(-\infty,\infty)$	$x\neq\pi k,\quad \forall k\in\mathbb{N}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
5	$\arcsin(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$\arccos(x)$	$[0,\pi]$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$\arctan(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty,\infty)$	$\frac{1}{1+x^2}$
8	$\text{arccot}(x)$	$[0,\pi]$	$(-\infty,\infty)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
9	x^α	$(-\infty,\infty)$	לכל x בפנים תחום ההגדרה	$\alpha x^{\alpha-1}$
10	$\log_a(x)$	$(-\infty,\infty)$	$(0,\infty),\ a>0,\quad a\neq1$	$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$
11	a^x	$(0,\infty),\ a>0,\quad a\neq1$	$(-\infty,\infty)$	$a^x\ln a$
12	$\ln(x)$	$(-\infty,\infty)$	$(0,\infty)$	$\frac{1}{x}$
13	e^x	$(0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	e^x

<u>הגדרה – נקודה קריטית</u>

נקודה x_0 שבה מתקיים $f'(x_0)=0$ או f אינה גזירה ב x_0, נקראת נקודה קריטית של f.

<u>משפט פרמה:</u>

אם f גזירה ב x_0 ו x_0 נקודת קיצון של f אז $f'(x_0)=0$.

<u>רעיון ההוכחה:</u> שימוש בהגדרת הנגזרת מימין ומשמאל ל x_0 ובעובדה ש x_0 נקודת קיצון בסביבתה.

<u>משפט רול:</u>

אם f רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), כך ש $f(a)=f(b)$ אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש:
$f'(c)=0$.

<u>הוכחה:</u>

ע"פ משפט ויירשטראס, f מקבלת בקטע מינימום ומקסימום. אם אחד מהם מתקבל בנקודה פנימית $x_0\in[a,b]$ אז ע"פ משפט פרמה $f'(x_0)=0$. אם המינימום והמקסימום מתקבלים בקצוות, אז f קבועה ולכן $f'(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

<u>מסקנה ממשפט רול:</u>

לפולינום מסדר n יש לכל היותר n שורשים ממשיים שונים.

משפט לגרנז'

אם f רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה:

נגדיר $g(x)=f(x)-\left[f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$, רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b).

מתקיים $g(a)=g(b)=0$ ולכן לפי משפט רול, קיימת $c\in[a,b]$ כך ש:

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

כלומר $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

משפט ערך הביניים של קושי:

אם f,g רציפות ב $[a,b]$ וגזירות ב (a,b) אז קיימת $a<c<b$ כך ש: $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

רעיון ההוכחה:

הגדרת הפונקציה $h(x)=f(x)-f(a)-(g(x)-g(a))\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ ושימוש במשפט רול על פונקציה חדשה זו.

משפטים נוספים לגבי גזירות

1. אם f גזירה ב (a,b) אז f קבועה אמ"ם $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.
   רעיון ההוכחה: כיוון $\leftarrow$ ע"פ ההגדרה, כיוון $\rightarrow$ בעזרת משפט לגרנז'.
2. אם f גזירה ב (a,b) ולכל $x\in(a,b)$, $f'(x)\geq 0$ אז f עולה ב (a,b).
   רעיון ההוכחה: ישירות ע"י משפט לגנז'.
3. אם f גזירה ב (a,b) ולכל $x\in(a,b)$, $f'(x)>0$ אז f עולה ממש ב (a,b).

הערות

1. אם f גזירה בקטע בו היא מונוטונית עולה, אז $f'(x)\geq 0$ לכל x בקטע.
2. אם $f'(x)>0$ בקטע מלבד מספר סופי של נקודות בהן $f'(x)=0$, יתקיים עדיין f מונוטונית עולה ממש.
3. אם $f'(x)\geq 0$ בקטע וגם f' אינה מתאפסת על איזשהו תת-קטע, אז f עולה ממש.

כלל לופיטל עבור גבול בנקודה

אם מתקיימים כל התנאים הבאים:

1. f,g גזירות בסביבת x_0
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ או $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$
3. $g'(x_0)\neq 0$ בסביבה נקובה של x_0
4. קיים הגבול במובן הרחב: $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

אז $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$, במובן הרחב.

כללים זהים קיימים עבור גבולות חד-צדדיים, ושם הדרישה היא לגזירות בסביבה חד-צדדית לא נקובה.

כלל לופיטל עבור גבול באינסוף

אם מתקיימים התנאים :

1. f,g מוגדרות בקרן (c,∞)
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ או $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$
3. $g'(x)\neq 0$ ב (c,∞)
4. קיים הגבול במובן הרחב : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

אז $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$, במובן הרחב.

<u>משוואת משיק לפונקציה בנקודה</u>

משוואת המשיק ל $f(x)$ בנקודה $(x_0,f(x_0))$ היא

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

<u>הגדרה – קירוב ליניארי</u>

תהי f מוגדרת בסביבת x_0 . נאמר שלְ- f יש קירוב ליניארי בסביבת x_0 אם קיימים קבועים A,B ופונקציה $e(x)$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0} e(x)=0$ כך שלכל x בסביבה מתקיים

$f(x)=A+B(x-x_0)+e(x)(x-x_0)$.

<u>משפט</u>

ל f יש קירוב ליניארי בסביבת x_0 אס"ם f גזירה ב x_0 .

בנוסף, אם קיים קירוב ליניארי אז $A=f(x_0)$ וגם $B=f'(x_0)$.

פולינום טיילור

פולינום טיילור (ובהמשך נראה את טור טיילור, שזה פולינום עם אינסוף איברים) מגיע כדי לעזור לנו לחשב ערכים של פונקציה. הפולינום נותן לנו דרך מעשית לחשב ערך של כל פונקציה, בכל נקודה, בשגיאה שמתאימה לנו (כלומר אנו יכולים לקבוע את מידת הדיוק של הערך שנקבל).
הרעיון הוא שכל פונקציה (שהיא מספיק חלקה, כלומר גזירה) ניתנת לכתיבה ע"י סכום של חזקות.

המחשבון שלנו משתמש בפולינום זה. לדוגמה, נרצה לחשב את $\sin(24)$. לפי משפט טיילור, נוכל לקבל את ערך הפונקציה $\sin(x)$ בנקודה $x=24$ באיזה קירוב שנרצה (ככל שנרצה תשובה יותר מדוייקת, נצטרך לפתח את הפולינום לדרגה יותר גבוהה). הקירוב שהמחשבון נותן לנו מספק אותנו – 10 ספרות אחרי הנקודה – וזאת ע"י הצבת המספר 24 בפולינום של $f(x)=\sin(x)$, שמוגדר איפשהו בזכרון המחשבון.

חישוב ערכים ע"י הצבה בפולינום היא פעולה פשוטה לכל מחשבון בסיסי – אלו הם פעולות כפל וחיבור (נו טוב, גם חיסור לפעמים) הקיימות בכל מיקרו-מעבד.

הגדרה – פולינום טיילור

תהי $f(x)$ גזירה n פעמים ב x_0. פולינום טיילור מסדר n עבור $f(x)$ בנקודה x_0 מוגדר כך:

$$P_n(x) \triangleq \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

הגדרה – שארית מסדר n

השארית מסדר n עבור הפונקציה $f(x)$ ופולינום טיילור המתאים $P_n(x)$ היא ההפרש בין ערך הפונקציה לערך הפלינום המקרב אותה:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

משפט השארית של לגרנז'

תהי $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים בקטע I, המכיל את x_0 (הנקודה סביבה אנו מפתחים את פולינום טיילור).
אזי, לכל נקודה $x \in I$, קיימת נקודה $x_0 < c < x$ כך ש:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>הערות / תוצאות</u>

1. פיתוח פולינום טיילור סביב $x_0=0$ נקרא פולינום מקלורן:
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$
2. קיום $f^{(n)}(x_0)$ פירושו שכל $n-1$ הנגזרות קיימות בסביבה של x_0 והן עצמן גזירות ליצירת $f^{(n)}(x_0)$.
3. $P_1(x)$ הוא הקירוב הליניארי לפונקציה – משוואת המשיק לגרף הפונקציה ב x_0.
4. מכיוון שאנו רואים כי פונקציה יכולה להיות מיוצגת ע"י פולינום, אזי f זוגית $\Leftarrow$ f' אי זוגית.
5. ובאותו אופן: f אי זוגית $\Leftarrow$ f' זוגית.
6. בפולינום טיילור של פונקציות זוגיות יופיעו חזקות זוגיות בלבד.
7. בפולינום טיילור של פונקציות אי זוגיות יופיעו חזקות אי זוגיות בלבד.
8. פולינום טיילור הוא היחיד המקיים $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$: $0 \le k \le n$ - הוא מזדהה עם n הנגזרות הראשונות של הפונקציה בנקודה x_0.

פולינומים ידועים

ראשית נרחיב את הגדרת הבחירה (n בחר k, כאשר n,k טבעיים) למספרים ממשיים:

$$\binom{\alpha}{n} \triangleq \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\binom{\alpha}{0}\triangleq 1$$

מספר	פונקציה	פולינום טיילור המתאים לפונקציה
1	$f(x)=(1+x)^{\alpha}$ $\alpha\in\mathbb{R}$	$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{\alpha}{n}x^k\right)$
2	$f(x)=e^x$	$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots.+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^k}{k!}\right)$
3	$f(x)=\sin x$	$P_{2n+1}(x)=P_{2n+2}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots.+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)$
4	$f(x)=\cos x$	$P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots.+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$
5	$f(x)=\ln(1+x)$	$P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$

משפטים/תוצאות

ג. אם קיימת $f^{(n)}(x_0)$ אז $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$

ד. תהי f גזירה $n+1$ פעמים בסביבת x_0, אז לכל x בסביבה זו קיימת נקודת ביניים, בין x_0 ל x, נסמנה c_x כך ש: $f(x)-P_n(x)=R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (השארית בצורת לגרנז')

ה. כאשר נתון פולינום מקלורן מסדר n, $P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ וברצוננו לחשב את פולינום מקלורן עבור $g(x)=f(x^3)$, די להציב x^3 בפולינום של $f(x)$.

ו. תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0. נניח שמתקיים $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ ו $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ (כלומר הנגזרת הראשונה שמתאפסת בנקודה x_0 היא הנגזרת ה n-ית), אזי:

1. אם n זוגי אז x_0 נקודת קיצון:
   א. אם $f^{(n)}(x_0)>0$, אז x_0 מינימום מקומי
   ב. אם $f^{(n)}(x_0)<0$, אז x_0 מקסימום מקומי
2. אם n אי-זוגי אז x_0 אינה נקודת קיצון, אלא נקודת פיתול.

הגדרה – פונקציה קמורה (צורת $\cup$)

f קמורה בקטע I אס"ם לכל $a,b \in I$ ולכל $0<\lambda<1$ מתקיים

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) \le \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

הגדרה – פונקציה קעורה (צורת $\cap$)

f קמורה בקטע I אס"ם לכל $a,b \in I$ ולכל $0<\lambda<1$ מתקיים

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) \ge \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

משפטי קמירות

1. אם f קמורה בקטע I, אז f רציפה בכל נקודה פנימית של I.
2. תהי f גזירה בקטע I, אז f קמורה ב I אס"ם f' עולה ב I.
3. תהי f גזירה פעמיים בקטע I, אז f קמורה ב I אס"ם $f''\ge 0$ ב I.
4. תהי f קמורה וגזירה בקטע I ו x_0 נקודה פנימית שבה $f'(x_0)=0$, אז x_0 נקודת מינימום גלובלי ב I
5. תהי f גזירה בקטע I, אז f קמורה ב I אס"ם לכל נקודה פנימית $x_0 \in I$ המשיק לגרף של f בנקודה נמצא מתחת לגרף של f בקטע I (מתחת במובן הרחב – יכול גם להתלכד בתת-קטע כלשהו)

הגדרה – פונקציה הופכית

תהי f מוגדרת בתחום D והיא חח״ע. נסמן ב E את תמונת f. הפונקציה ההופכית f^{-1} מוגדרת כך:
לכל $y \in E$ יש $x \in D$ יחיד (בגלל החד-חד ערכיות של f) ונגדיר לכן את $f^{-1}(y) = x$.
לכן f^{-1} מוגדרת ב E ותמונתה D.

משפטים לגבי פונקצית הופכית

1. תהי f רציפה וחח״ע בקטע I, אז f^{-1} רציפה
2. תהי f פונקציה רציפה וחח״ע בקטע $[a,b]$, אז f מונוטונית ממש בקטע.
3. אם f חח״ע ורציפה בסביבת x_0 וגזירה ב x_0 ו $f'(x_0) = 0$ אז f^{-1} אינה גזירה ב $f(x_0)$.
4. אם f חח״ע ורציפה בסביבת x_0 ו $f'(x_0) \neq 0$ אזי $g = f^{-1}$ גזירה בנקודה $y_0 = f(x_0)$ וגם
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

האינטגרל הלא מסוים

הגדרה – פונקציה קדומה

אם $F'(x)=f(x)$ לכל x ב I, נאמר ש F היא פונקציה קדומה של f ב I. נסמן ב $\int f(x)dx$ את קבוצת כל הפונקציות הקדומות של f. $\int f(x)dx$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של f.

הערה: אם F היא קדומה של f אז גם $G(x)=F(x)+c$ קדומה של f, כאשר c קבוע.

כללי אינטגרציה

1. $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
2. $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$, עבור c קבוע (לא תלוי ב x)
3. אינטגרציה בחלקים: ידוע כי $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
ולכן $f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$, ואז מתקבל הכלל
$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$
4. כלל השרשרת (שיטת ההצבה): אם $F'(x)=f(x)$ אז:
$$\left[F(g(x))\right]'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$$
ואז, אם $\int f(x)dx=F(x)+c$ אז:
$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+c$$
5. הצבות שימושיות:
   א. הצבת אוילר: $t=x+\sqrt{1+x^2},\ dx=\frac{\sqrt{1+x^2}}{t}dt$
   ב. הצבה טריגונומטרית:
$$t=\tan\frac{x}{2}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{cases}$$
6. פירוק לשברים חלקיים:
$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2\left(x^2+cx+d\right)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+cx+d\right)}$$
כאשר x^2+cx+d פולינום ריבועי לא פריק (שורשיו אינם ממשיים).

אינטגרלים מיידים

אינטגרל לא מסויים	פונקציה קדומה מתאימה	מספר
$\int \frac{dx}{(x\pm d)^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x\pm d}{a}\right)+c$	1
$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$	2
$\int \frac{dx}{x^2+1}$	$\arctan(x)+c$	3
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+c$	4
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	5
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+c$	6
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$	7
$\int \cos x dx$	$\sin x+c$	8
$\int \sin x dx$	$-\cos x+c$	9
$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+c$	10
$\int x^n dx, \quad n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	11
$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+c$	12
$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+c$	13
$\int \frac{dx}{\sin x}$	$\ln\left\|\tan\frac{x}{2}\right\|+c$	14
$\int \frac{dx}{\cos x}$	$\ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+c$	15
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$\frac{\sin x}{\cos x}+c=\tan x+c$	16
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-\frac{\cos x}{\sin x}+c=-\cot x+c$	17

האינטגרל המסוים

ראשית נביא כמה סימונים שבהם נשתמש להגדרת האינטגל המסוים

- P היא חלוקה של הקטע $[a,b]$: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$
- הקטע $[x_{i-1},x_i]$ הוא קטע החלוקה מספר i ואורכו $\Delta i=x_i-x_{i-1}$
- בהינתן פונקציה f שמוגדרת ב $[a,b]$, נבחר בכל קטע חלוקה נקודה c_i.

הסכום $R(P,c_1,\ldots,c_n)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta i$ נקרא סכום רימן של f, בהתאם לחלוקה P ולבחירת $c_1,\ldots,c_n$.

- פרמטר החלוקה P יסומן $\delta(P)$ והוא מוגדר כך : $\delta(P)\triangleq\max_{1\le i\le n}\Delta i$

הגדרה – אינטגרביליות רימן

נאמר ש f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$ אם $\lim_{\delta(P)\to 0}R(P)=\lim_{\delta(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta i$ קיים וסופי. כלומר,

קיים מספר I כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\delta(P)<\delta$ אז

$\left|R(P)-I\right|=\left|\left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta i\right)-I\right|<\varepsilon$, כל זאת עבור כל סכום רימן של f שמתאים לחלוקה P. כלומר,

בלי קשר לבחירת הנקודות $c_1,\ldots,c_n$.

את הגבול מסמנים $I=\int_a^b f(x)dx$.

זהו האינטגרל המסוים של f בקטע $[a,b]$, או אינטגרל רימן בקטע $[a,b]$

הגדרה – אינטגרביליות דארבו

אם f חסומה בקטע $[a,b]$ ו P חלוקה: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

נסמן $M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$ ו $m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$ (קיימים כי f חסומה ב $[a,b]$)

ואז סכום דארבו עליון: $S(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta i$, סכום דארבו תחתון: $s(P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta i$.

לכל חלוקה P מתקיים $s(P)\le R(P)\le S(P)$ ($R(P)$ סכום רימן)

נאמר ש f אינטגרבילית דארבו ב $[a,b]$ אם $\sup_P s(P)=\inf_P S(P)$ ומספר זה הוא האינטגרל המסוים של f ב $[a,b]$.

לגבי אינטגרלים מסויימים, מגדירים:

1. $\int_a^a f(x)dx=0$
2. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ (שינוי כיוון האינטגרציה משנה את סימן הסכום).

הגדרה – רציפות במידה שווה

נאמר ש f רציפה במידה שווה בקטע I אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,x_0\in I$, אם $|x-x_0|<\delta$

אז $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. (כאן δ תלויה ב ε בלבד ולא בנקודות בקטע I)

משפטים לגבי אינטגרל מסויים

1. תהי f מוגדרת ב $[a,b]$ אז f אינטגרבילית רימן אס"ם f חסומה ואינטגרבילית דארבו.

2. אם f חסומה ב $[a,b]$ אז f אינטגרבילית בקטע אס"ם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש $|S(P)-s(P)|<\varepsilon$.

3. אם f אינה חסומה ב $[a,b]$ אז היא אינה אינטגרבילית רימן בקטע
<u>הוכחה</u>: תהי $P=\{\Delta x_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של הקטע $[a,b]$. אזי קיים j כך ש $f(x)$ אינה חסומה בקטע Δx_j.
נסמן $M=\left|\sum_{i\neq j} f(c_i)\Delta x_i\right|$. מכיוון ש f אינה חסומה בקטע Δx_j, $\left|f(c_j)\cdot\Delta x_j\right|>M+\frac{1}{\delta(P)}$.
ע"פ אי-שוויון המשולש, $\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\right|=\left|\sum_{i\neq j} f(c_i)\Delta x_i+f(c_j)\Delta x_j\right|\geq\left|f(c_j)\Delta x_j\right|-\left|\sum_{i\neq j} f(c_i)\Delta x_i\right|$
ואז $\left|f(c_j)\Delta x_j\right|-\left|\sum_{i\neq j} f(c_i)\Delta x_i\right|>M+\frac{1}{\delta(P)}-M=\frac{1}{\delta(P)}$.
כלומר, לכל חלוקה נוכל לבחור נקודות c_i כך ש $\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\right|\geq\frac{1}{\delta(P)}$, וכאשר $\delta(P)\to 0$, $\delta(P)\to\infty$,
ולכן לא קיים הגבול $\lim\limits_{\delta(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

4. אם f מונוטונית בקטע $[a,b]$ אז f אינטגרבילית ב $[a,b]$.
<u>רעיון ההוכחה</u>: מראים שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש $|S(P)-s(P)|<\varepsilon$ ע"י כך שבכל קטע חלוקה Δx_i מתקיים $M_i-m_i=x_i-x_{i-1}$ ואז בעצם $\sum_{i=1}^{n} M_i-m_i=f(b)-f(a)$.

5. אם f רציפה ב $[a,b]$ אז f רציפה במידה שווה ב $[a,b]$.

6. אם f רציפה ב $[a,b]$ אז f אינטגרבילית ב $[a,b]$.
<u>רעיון ההוכחה</u>: שימוש ברעיון ש f רציפה במידה שווה. מראים שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש $|S(P)-s(P)|<\varepsilon$ כאשר כל $M_i-m_i<\delta=\frac{\varepsilon}{b-a}$.

7. אם f חסומה ב $[a,b]$ ורציפה שם, פרט למספר סופי של נקודות, אז f אינטגרבילית ב $[a,b]$.

8. אם g אינטגרבילית ב $[a,b]$ ו $f(x)=g(x)$ לכל x בקטע $[a,b]$ חוץ ממספר סופי של נקודות, אז f אינטגרבילית ב $[a,b]$ וגם $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

9. אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$ אז גם $|f|$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ ומתקיים: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

<u>הוכחה</u>: מכיוון ש f אינטגרבילית, f חסומה ב $[a,b]$ ולכן גם $|f|$ חסומה שם. תהי P חלוקה כלשהי של $f(x)$, ונסמן את M_i^f ו m_i^f הסופרימום והאינפימום בהתאמה שמקבלת הפונקציה בקטע החלוקה Δx_i.

אזי לכל $x, x' \in \Delta x_i$, מתקיים $\big||f(x)|-|f(x')|\big| \le |f(x)-f(x')| \le M_i^f - m_i^f$.

ולכן כאשר נסמן את $M_i^{|f|}$ ו $m_i^{|f|}$ הסופרימום והאינפימום בהתאמה שמקבלת הפונקציה $|f|$ בקטע החלוקה Δx_i, נקבל: $\Big||M_i^{|f|}|-|m_i^{|f|}|\Big| \le \left|M_i^{|f|}-m_i^{|f|}\right| \le M_i^f - m_i^f$.

ע"פ משפט, f אינטגרבילית אם"ם $\lim\limits_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^n \left(M_i^f - m_i^f\right)\cdot \Delta i = 0$, ולכן גם

$\lim\limits_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^n \left(M_i^{|f|} - m_i^{|f|}\right)\cdot \Delta i = 0$, ולכן גם $|f|$ אינטגרבילית.

לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, ולכן ע"פ משפט מתקיים

$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$, או במילים אחרות $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

10. אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$ ו $m \le f(x) \le M$ לכל $x\in[a,b]$ אז $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

<u>הוכחה</u>: מכיוון שהפונקציה f חסומה, כאשר נביט בסכום רימן של הפונקציה נקבל:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\cdot\Delta i \le \sum_{i=1}^n M\cdot\Delta i = M\sum_{i=1}^n \Delta i = M(b-a)$$

וגם $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\cdot\Delta i \ge \sum_{i=1}^n m\cdot\Delta i = m\sum_{i=1}^n \Delta i = m(b-a)$.

11. ערך הביניים: אם f רציפה ב $[a,b]$, אז קיימת $c\in[a,b]$ כך ש $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

הוכחה: ע"פ משפט ויירשטראס, f חסומה ומקבלת ערך מינימאלי ומכסימלי, ולכן

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. מכיוון ש $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$, ע"פ משפט ערך הביניים

לפונקציות רציפות, קיים c כך ש $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, כלומר $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

12. אם f רציפה ב $[a,b]$ ו $f(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$, וקיים $x_0\in[a,b]$ כך ש $f(x_0)\ne 0$, אז

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

<u>הוכחה</u>: מכיוון ש f רציפה ו $f(x_0)>0$, קיימת סביבה של x_0 כך שלכל $|x-x_0|<\delta$, $f(x)>0$.

מכיוון ש f רציפה: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x-\delta} f(x)dx + \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)dx + \int_{x+\delta}^b f(x)dx = A + f(c)\cdot 2\delta + B$

ובגלל ש $x-\delta < c < x+\delta$, $f(c)>0$ ולכן $A+f(c)\cdot 2\delta + B > 0$.

13. אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$ ונגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, אז F רציפה ב $[a,b]$.

<u>הוכחה</u>: אם f אינטגרבילית אז גם $|f|$ אינטגרבילית, והן אינטגרביליות בכל קטע $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$ וכמו-כן מתקיים $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx$. בנוסף, f ו $|f|$ חסומות ב $[a,b]$.

ניקח $x>x_0$. מכיוון שקיים $M>0$ עבורו $|f|<M$, יתקיים:

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_a^x f(x)\,dx-\int_a^{x_0} f(x)\,dx\right|=\left|\int_{x_0}^x f(x)\,dx\right|\le\int_{x_0}^x|f(x)|\,dx\le M(x_0-x)$$

אי שוויון זה יתקיים גם אם נבחר $x<x_0$, ולכן נקבל בסוף ש: $|F(x)-F(x_0)|\le M|x_0-x|$.

כעת, בהינתן $\varepsilon>0$, נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ כך שאם $|x-x_0|<\delta$: $|F(x)-F(x_0)|\le M\delta=M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.

14. המשפט היסודי של החדו"א:

אם f רציפה ב $[a,b]$ ו $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, אז F גזירה ו $F'(x)=f(x)$ בכל $x\in[a,b]$.

(בקצוות רק $F'_+(a)=f(a)$ ו $F'_-(b)=f(b)$)

משמעות המשפט, בין היתר, היא שלכל פונקציה רציפה יש פונקציה קדומה.

<u>הוכחה</u>: ע"פ הגדרת $F(x)$: $F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx=\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx$.

מכיוון ש f רציפה, ע"פ משפט ערך הביניים: $\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx=f(c)\cdot\Delta x$, כאשר $x<c<x+\Delta x$.

כעת: $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}f(c)=f(x)$

כי f רציפה וכאשר $\Delta x\to0$, $c\to x$.

15. משפט ניוטון-לייבניץ:

אם f רציפה ב $[a,b]$ ו $F(x)$ קדומה שלה, אז $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$

<u>הוכחה</u>: ע"פ המשפט היסודי, $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ פונקציה קדומה של $f(x)$, ולכן קיים C כך ש $F(x)=G(x)+C$. ואז:

$$F(b)-F(a)=G(b)+C-(G(a)+C)=G(b)-G(a)=\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^a f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt.$$

16. שיטת ההצבה: אם f רציפה ב $[a,b]$ ו φ פונקציה גזירה ברציפות בקטע שקצותיו α,β ומתקיים: $\varphi(\alpha)=a$ ו $\varphi(\beta)=b$ וגם φ מעבירה את הקטע שקצותיו α,β על $[a,b]$ אז:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

תכונות האינטגרל המסוים

1. אדיטיביות: אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$ ו $a<c<b$ אז f אינטגרבילית גם ב $[a,c]$ וגם ב $[c,b]$ ומתקיים: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$. (תכונה זו מתקיימת בעצם לכל a,b,c ולשלושת הקטעים המוגדרים).

2. ליניאריות: עם f,g אינטגרביליות ב $[a,b]$ ו α,β מספרים, אז $\alpha f+\beta g$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ ומתקיים: $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

3. אם $f(x)$ אינטגרבילית ואי זוגית, אז $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

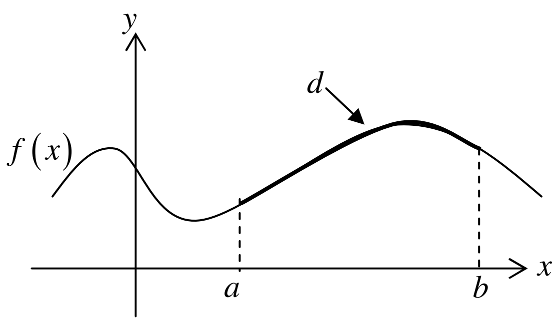
4. אם $f(x)\geq 0$ לכל x בקטע $[a,b]$ ו f אינטגרבילית ב $[a,b]$ אז $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

5. אם $f(x)\geq g(x)$ ב $[a,b]$ ו f,g אינטגרביליות ב $[a,b]$ אז $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

הגדרה – אורך קשת (אורך הגרף)

אורך הקשת d של $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$ הוא:

$$d\triangleq\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$



אינטגרלים מוכללים

הגדרה – אינטגרל מוכלל

1. אם f אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ כאשר $a<b$, וקיים (וסופי) $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=L$, נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס והוא שווה ל L. סימון: $\int_a^\infty f(x)dx=L$.
2. אם f אינטגרבילית בכל קטע $[c,b]$ כש $a<c<b$, אז אם קיים $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx=L$, אז נאמר ש $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס ושווה ל L
3. בצורה דומה, $\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{d\to-\infty}\int_d^a f(x)dx$
4. בצורה דומה, $\int_0^2\frac{dx}{x-2}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x-2}$

הערה: קל לראות שאם f רציפה ב (a,∞), ו $a<c$ אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אם"ם $\int_c^\infty f(x)dx$ מתכנס.

הערה זו נכונה לגבי כל סוג של קטע בו מחפשים התכנסות אינטגרלים, בין אם הקטע סופי או לא, או פתוח או סגור.

אופן עבודה עם אינטגרלים בעייתיים:

אם יש בקטע כמה נקודות בעייתיות, מחלקים את הקטע לקטעים שבכל אחד מהם יש בעיה בקצה אחד בלבד.

האינטגרל כולו נחשב מתכנס אם"ם כל אחד ואחד מהאינטגרלים של תת-הקטעים מתכנס.

הגדרה: נאמר ש $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס (נכון גם לקטעים סופיים, $\int_a^b f$)

הגדרה: נאמר ש $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בתנאי אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס ו $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתבדר.

משפטים/תוצאות לגבי אינטגרל מוכלל

1. $\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס אם"ם $\alpha>1$; $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס אם"ם $\alpha<1$
2. אם f רציפה ב $[a,\infty)$ ו $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט, אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס
3. מבחן ההשוואה:

   אם f ו g רציפות ב $[a,b)$ ולכל $x\in[a,b)$, $0\le f(x)\le g(x)$ אז:

   א. אם $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס, אז $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס

   ב. אם $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר, אז $\int_a^b g(x)dx$ מתבדר

<u>הוכחה:</u> מכיוון ש $0\le f(x)\le g(x)$, הפונקציות $S(b)=\int_a^b g(x)dx$ ו $s(b)=\int_a^b f(x)dx$ מונוטוניות עולות ומקיימות $s(b)\le S(b)$, ולכן אם $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אז $S(b)$ חסומה ולכן $s(b)$ חסומה ולכן

$\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

אם $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר אז $s(b)$ לא חסומה ולכן גם $S(b)$ לא חסומה ולכן גם $\int_a^b g(x)dx$ מתבדר.

4. מבחן ההשוואה הגבולי:

אם f,g רציפות ב $[a,\infty)$ וחיוביות בקטע, ואם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L>0$

אז $\int_a^\infty f(x)dx$ ו $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

באופן כללי, אפשר לנסח משפט השוואה גבולי לכל נקודה בעייתית, לאו דווקא עבור $x\to\infty$, כלומר $\int_a^\infty f(x)dx$. הנוסח הכללי יראה כך:

אם f,g רציפות ב (a,b) וחיוביות בקטע, ואם $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L>0$

אז $\int_a^b f(x)dx$ ו $\int_a^b g(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו, כאשר הקטע (a,b) יכול להיות קטע סופי, קרן ימנית, קרן שמאלית או קטע אינסופי.

5. אם קיים M כך ש $\left|\int_a^b f(x)dx\right|<M$ לכל b, וגם $g(x)$ מונוטונית יורדת ב $[a,\infty)$ ומקיימת $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$, אזי האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס (כלומר הגבול $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)g(x)dx$ קיים).

טורי מספרים

הגדרה – טור מספרים

נביט בסדרה אינסופית a_n, כלומר $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

הטור של a_n הוא סכום אינסופי, של אינסוף איברי הסדרה a_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

הגדרה – סכום חלקי

עבור N מסוים, סכום סופי של N האיברים הראשונים של הסדרה נקרא הסכום החלקי ה N-י:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

ניתן להביט כעת על סדרת הסכומים החלקיים, S_N.

איבר N בסדרה זו יהיה סכימה של N האיברים הראשונים בסדרה a_n.

הגדרה – התכנסות של טור

נאמר שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם קיים $\lim_{N\to\infty} S_N = L$.

במקרה זה, L הוא סכום הטור ומסמנים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$.

במילים (לא פורמאלי): אם ככל שאנו הולכים ומסכמים עוד ועוד אברי סדרה, הסכום הזה שואף למספר L, אז הטור מתכנס.

הגדרות ותכונות נוספות של טורי מספרים

1. טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא חיובי אם לכל n, $a_n \ge 0$.
2. טור שסדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה נקרא טור חסום.
3. טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

הערה: ברור שאם טור הוא חיובי אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

עוד הערה: בד"כ התכנסות בהחלט תהיה יותר חזקה מהתכנסות רגילה של הטור, כי לסכימת הערכים המוחלטים של הטור פחות סיכוי להתכנס, בעוד שלטור עצמו יכולים להיות איברים שליליים שיפחיתו מסכום הטור, וכך "יעזרו" לטור להתכנס.

4. טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

משפטים/טענות/מבחני התכנסות עבור טורי מספרים

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>הוכחה:</u> S_N סדרת הסכומים החלקיים של הטור, ולכן $\lim_{N\to\infty} S_N = L$. לכן

$$a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n = S_N - S_{N-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} L - L = 0.$$

הערה: מכאן ניתן להסיק שאם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא יכול להתכנס.

2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

<u>הוכחה:</u> ראשית, $a_n = |a_n| - \left(|a_n| - a_n\right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-a_n$ מתכנס כי $0\le |a_n|-a_n=|a_n|+(-a_n)\le|a_n|+|-a_n|=2|a_n|$, ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס כהפרש של שני טורים מתכנסים.

3. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים, ו c קבוע, אז:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ מתכנס ל $c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ מתכנס ל $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

4. אם טור חיובי, אז $\{S_n\}_{n=1}^{N}$ (סדרת הסכומים החלקיים) מונוטונית עולה.

5. טור חיובי מתכנס אם"ם סדרת הסכומים החלקיים שלו $\{S_n\}_{n=1}^{N}$ חסומה (מלעיל כמובן).

6. אם N_0 קבוע, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו $\sum_{n=N_0}^{\infty}a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו (אך סכומיהם בד"כ שונים).

7. מבחן קושי להתכנסות <u>סדרות</u>:

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $m>n>N_0$, $|a_m-a_n|<\varepsilon$.

8. מבחן קושי להתכנסות <u>טורים</u>:

טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $m>n>N_0$,

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=|S_m-S_n|<\varepsilon$$

9. מבחן ההשוואה:

אם $0\le b_n\le a_n$ לכל n, אז:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס (אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר, אין מה לומר על $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$).

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר (אם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, אין מה לומר על $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$).

<u>הוכחה</u>: נסמן $\sigma_N=\sum_{n=1}^{N}b_n$, $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$. לכל N מתקיים $0\le\sigma_N\le S_N$, כי $b_n\le a_n$ לכל n.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ולכן סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה, כלומר $S_N<M$. לכן $0\le\sigma_N\le S_N<M$, כלומר גם סדרת הסכומים החלקיים σ_N חסומה ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, שהוא טור חיובי, מתכנס.

10. מבחן ההשוואה הגבולי:

אם $0\le a_n,b_n$ לכל n וגם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L>0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

11. מבחן הדלילות: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת, אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ מתבדרים ומתכנסים יחדיו.

12. מבחן אַבֶּל: אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

13. מבחן רַאבֶּה:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חיובית, $\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=q$ אזי:

אם $q>1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

אם $q<1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

14. מבחן דיריכלה:

אם סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומה, ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית, $b_n \to 0$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

15. מבחן האינטגרל:

אם $f(x)$ חיובית, רציפה ומונוטונית יורדת ב $[a,\infty)$ אזי $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס.

16. מבחן המנה (ד'אלמבר) ומבחן השורש (קושי):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ או $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, אז:

אם $q>1$, הטור מתבדר

אם $q<1$, הטור מתכנס

17. מבחן לייבניץ:

אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית יורדת ו $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

יתר על כן: סכום הסדרה מקיים $0<S<a_1$ וגם השארית מקיימת $|r_n|\le a_{n+1}$

<u>הוכחה:</u>

נביט בסכום: $S_{2N}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots-a_{2N}$. אז $S_{2N}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2N-1}-a_{2N})$. כל שני איברים בסוגריים נותנים מספר חיובי כי a_n מונוטונית יורדת, ולכן S_{2N} מונוטונית עולה, נראה שהיא חסומה:

$S_{2N}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2N-2}-a_{2N-1})-a_{2N}$. כל האיברים בסוגריים חיוביים, כי a_n מונוטונית יורדת, ולכן נקבל ש $S_{2N}<a_1$. קיבלנו ש S_{2N} עולה וחסומה ולכן מתכנסת. נסמן $\lim_{N\to\infty} S_{2N}=L$.

מכיוון ש $S_{2N-1}=S_{2N}-a_{2N}$ וגם $a_{2N}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$, נעבור לגבול ומאריתמטיקה של גבולות $S_{2N-1}=L$.

מאחר ושתי הסדרות מכסות את כל הסדרה S_N ומתכנסות לאותו הגבול, $\lim_{N\to\infty} S_N=L$, כלומר הטור מתכנס.

מכיוון ש $S_{2N}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2N-2}-a_{2N-1})-a_{2N}$, אז לכל $n>2$, $S_{2N}<a_1-(a_2+a_3)$ כלומר $S_{2N}-a_1<-(a_2+a_3)<0$, וכשנעבור לגבול, $S-a_1<0$ כלומר $S<a_1$.

השארית היא: $\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=\left|S_N-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\right|=|r_n|$. וזהו טור לייבניץ שמתכנס ומקיים $S<a_1$, ולכן $|r_n|<a_{n+1}$.

18. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$ מתכנס אם"ם $\alpha>1$ או $\alpha=1,\beta>1$.

טורים ידועים

1. טור הנדסי: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ מתכנס אם"ם $|q|<1$, ואז: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n=\frac{a}{1-q}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ מתבדר אם"ם $|q|\ge 1$, $a\ne 0$.
3. טור טלסקופי: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ מתבדר כי $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\ne 0$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ מתבדר כי $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר למרות ש $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, כי הוא לא מקיים את מבחן קושי.

סדרות של פונקציות

סדרות של מספרים כבר פגשנו. סדרות אלה הם קבוצה אינסופית של מספרים, המסודרים באופן מסויים, כאשר לכל מספר בסדרה יש אינדקס. את סדרת המספרים סימנו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ואז לכל אינדקס n מתאים מספר a_n.

כעת נרחיב את הדיבור על סדרות ונסתכל על סדרות של פונקציות. כלומר, כעת לכל אינדקס n תתאים פונקצית $f_n(x)$. פונקציה זו תהיה מוגדרת ל x-ים מסויימים, תלוי בבעיה. סימן סדרת הפונקציות דומה לסימון סדרת המספרים: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

הגדרה – התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות

תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות שמוגדרות באינטרוול I.
נאמר שהסדרה מתכנסת לפונקציה $f(x)$ ב I (נקודתית) אם לכל $x\in I$ מתקיים:
לכל $\varepsilon>0$, קיים $N(\varepsilon,x)$ כך שאם $n>N$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

הגדרה – התכנסות במידה שווה (במ"ש) של סדרת פונקציות

תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות שמוגדרות ב I.
נאמר שהסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(x)$ ב I אם:
לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=N(\varepsilon)$ כך שאם $n>N$ אז $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, לכל $x\in I$.

משפטים לגבי סדרות של פונקציות

1. תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ב I, ו $f(x)$ מוגדרת ב I. נסמן: $a_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$.
   אז $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל $f(x)$ ב I אם"ם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$
2. אם $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות רציפות ב I שמתכנסות במידה שווה ל $f(x)$ ב I אז $f(x)$ רציפה ב I.
   משמעות המשפט:
   אם $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ במידה שווה ב I, אז:
   $$\forall x_0\in I: \qquad \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0}f_n(x)\right)$$
3. תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות ב $[a,b]$. אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע ל $f(x)$ אז:
   $\int_a^x f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^x f(t)\,dt$, במידה שווה ב $[a,b]$.

   הערה: אם $\int_a^x f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^x f(t)\,dt$ במידה שווה, לא בהכרח $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ במידה שווה.

טורי פונקציות

הגדרות

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס (נקודתית) ב I אם סדרת הסכומים החלקיים $S_N(x)$, $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב I.
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב I אם סדרת הסכומים החלקיים $S_N(x)$, $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב I.
3. תחום ההתכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ הוא קבוצת כל ערכי x שעבורם הוא מתכנס.

משפטים לגבי טורי פונקציות

1. אם ידוע ש $|S_N(x)-S(x)|\le b_N$ לכל $x\in I$ (תלוי רק ב N), אז אם $b_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז הטור מתכנס במידה שווה ב I (ואז $S(x)$ הוא סכום הטור)
2. משפט ויירשטראס:

   אם לכל n, קיים מספר a_n כך ש $|u_n(x)|\le a_n$ לכל $x\in I$, ואם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז:

   $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס וגם $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ מתכנס, שניהם במידה שווה.
3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ טור של פונקציות רציפות ב I שמתכנס במידה שווה ל $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ב I אז $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ רציפה ב I.
4. אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ טור של פונקציות אינטגרביליות ב $[a,b]$ מתכנס במידה שווה בקטע ל $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ אז:

   $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x u_n(t)\,dt\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)dt$, במידה שווה ב $[a,b]$.
5. יהיו $u_n(x)$ גזירות ברציפות ב I. אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ מתכנס במידה שווה ב I, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס בנקודה $x_0\in I$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב I, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'$.

טורי חזקות

טור חזרות הוא מקרה פרטי של טור פונקציות, כאשר בו סדרת הפונקציות אותה סוכמים סדרה של פונקציות מהצורה x^n (חזקה).

הגדרה – טור חזקות

טור חזקות הוא טור פונקציות מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + a_2\left(x-x_0\right)^2 + \dots$$

נאמר שטור זה מפותח סביב נקודה x_0.

תכונות טור חזקות

1. טור חזקות מתכנס תמיד ב x_0. במקרה זה סדרת הפונקציות זהותית 0, ולכן הטור מתכנס ל 0.
2. איברי טור חזקות הם תמיד פונקציות רציפות, גזירות ואינטגרביליות.
3. אינטגרציה וגזירה של טור חזקות (כלומר של הפונקציות המרכיבות את הטור) תיתן תמיד טור חזקות.

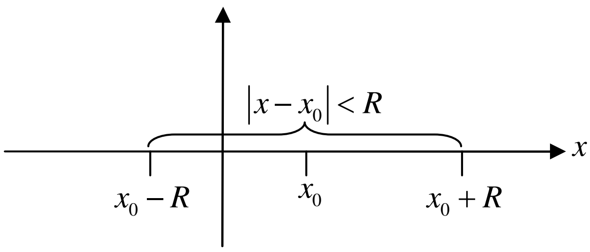
משפטים לגבי טורי חזקות

1. לכל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ קיים $0 \le R \le \infty$ כך ש:

   לכל $\left|x-x_0\right| < R$ הטור מתכנס ולכל $\left|x-x_0\right| > R$ הטור מתבדר. R נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור.

   לכן, תחום ההתכנסות של הטור הוא אחד מארבעת הקטעים הבאים:

   $$(-R,R), \qquad [-R,R), \qquad (-R,R], \qquad [-R,R]$$



2. חישוב רדיוס ההתכנסות של טור:

   אם קיים במובן הרחב: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|} = q$, או לחילופין $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, אז $R \triangleq \frac{1}{q}$.

   כאשר: אם $q=0$ אז $R \triangleq \infty$, ואם $q=\infty$ אז $R \triangleq 0$.

3. טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור שחלקי לתחום ההתכנסות שלו.

   מסקנה 1: $f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ רציפה בכל תחום ההתכנסות.

   מסקנה 2: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^x a_n t^n dt\right) = \int_a^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt$, לכל x בתחום ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

4. טור הנגזרות של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$. רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות זהה לרדיוס ההתכנסות של הטור.

5. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות, בעל רדיוס התכנסות $R>0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'$, לכל x בתחום ההתכנסות של טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$.

מסקנה: אם $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, אז $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים ב $(-R,R)$, ובפרט: $f^{(n)}(0)=n!a_n$

הגדרה – טור טיילור

אם $g(x)$ גזירה אינסוף פעמים ב x_0 , ניתן להגדיר טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

טור זה נקרא טור טיילור (או טור מקלורן כאשר $x_0=0$) של $g(x)$.

הערות

1. תחום ההתכנסות של טור טיילור של $g(x)$ אינו בהכרח תחום ההגדרה של $g(x)$.
2. בתחום שבו טור טיילור של $g(x)$ מתכנס, סכומו לא בהכרח שווה ל $g(x)$.
3. אם מצאנו טור שמתכנס ל $g(x)$, אז הוא בהכרח טור טיילור שלה.

<u>משפט</u>:

אם $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בקטע $[-r,r]$ וקיים $M>0$ כך שלכל n ולכל x בקטע, $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$,

אזי טור מקלורן של $f(x)$ מתכנס ב $[-r,r]$ ל $f(x)$.

<u>הוכחה</u>:

טור מקלורן יתכנס ל $f(x)$ אם, ע"פ משפט, הביטוי $\left|S_N(x)-S(x)\right|$ יהיה קטן מביטוי b_N כלשהו, ונראה ש $\lim_{N\to\infty}b_N=0$.

ע"פ השארית בצורת לגרנז', וע"פ הנתונים לגבי החסימות:

$$\left|S(x)-S_N(x)\right|=\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right|=\left|\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}x^N\right|\le\frac{M}{(N+1)!}r^{N+1}$$

וכמובן $\lim_{N\to\infty}\frac{M\cdot r^{N+1}}{(N+1)!}=0$.

טורי טיילור ידועים

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$	$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$			

ומהם ניתן לפתח:

	$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$	$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$
$\sinh x\triangleq\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$		$\cosh x\triangleq\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	